نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۱، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۱، ص. ۱۱۶-۱۰۱

مقاله پژوهشی

مقایسه مدل‌های همگن و بونجورنو با مدل اویلری-لاگرانژی در انتقال حرارت نانوسیالات در یک میکروکانال

جواد رستمی*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه رازی

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۷/۲۳ – دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۲/۱۱)

چکیده– در این مقاله انتقال حرارت نانوسیالات در یک میکروکانال با استفاده از مدل یکفازی به روش همگن و مدل دوفازی به روش بونجورنو به‌صورت عددی حل و با نتایج مدل اویلری-لاگرانژی به عنوان یک روش دقیق، مقایسه شده است. سیال پایه آب و نانوذرات از دو جنس اکسید آلومینیوم و مس هستند. غلظت حجمی نانوذرات تا ۲٪ و قطر آن‌ها ۱۰۰ نانومتر و برای پرهیز از افت فشار زیاد در میکروکانال، رژیم جریان آرام و محدوده عدد رینولدز از ۲۵۰ تا ۱۰۰۰ است. معادلات حاکم شامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی به روش حجم کنترل حل شده‌اند. برای حل معادلات ممنتوم از روش سیمپل استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهند که حداکثر اختلاف نتایج مدل یک‌فازی همگن با نتایج مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی برای نانوسیال آب-اکسد آلومینیوم در رینولدز ۱۰۰۰ و غلظت ۲٪ اتفاق می‌افتد و برابر با ۷/۳۳ درصد و برای نانوسیال آب-مس در رینولدز ۲۵۰ و غلظت ۱٪ اتفاق می‌افتد و ۶/۶ درصد است. همچنین حداکثر اختلاف نتایج مدل بونجورنو با نتایج مدل اویلری-لاگرانژی برای نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم در رینولدز ۲۵۰ و غلظت ۲٪ اتفاق می‌افتد و برابر با ۳ درصد و برای نانوسیال آب-مس در رینولدز ۱۰۰۰ و غلظت ۲٪ اتفاق می‌افتد و ۲/۰۹ درصد است. به این ترتیب با مدل بونجورنو می‌توان با حداکثر ۳٪ خطا به نتایج روش دقیق اویلری-لاگرانژی دست یافت بدون آنکه به برنامه‌نویسی به روش پردازش موازی و امکاناتی مانند ابرکامپیوتر نیاز باشد.

واژه‌های کلیدی: نانوسیال، مدل یک‌فازی همگن، مدل دوفازی بونجورنو، مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی.

Comparison of Homogenous and Buongiorno' Model with Eulerian-Lagrangian Model for Nanofluids Heat Transfer in a Microchannel

J. Rostami*

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Razi University, Kermanshah, IRAN

Abstract: ***In this paper, nanofluid heat transfer in a microchannel has been studied using homogenous and Buongiorno's models, and compared with Eulerian-Lagrangian model. The base fluid is water and the particles are Al2O3 and Cu with a diameter of 100nm. The volume fraction is up to 2% and Reynolds number is in the range of 250-1000. The governing equations including continuity, momentum and energy, have been solved using a control volume method (SIMPLE). The results show that***

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی:jrostami@razi.ac.ir

for Water-Al2O3, the maximum difference between the homogeneous model and the Eulerian-Lagrangian model is 7.5%, and for Buongiorno's model is 3%. It can be concluded that the Buongiorno's model has an acceptable accuracy in results, and is simple enough to be used. On the other hand, unlike the Eulerian-Lagrangian, Buongiorno's model doesn't need the parallel processing and super computers, and is a good model to predict heat transfer of nanofluids.

Keywords: ***Nanofluid, Homogeneous one-phase model, Buongiorno's two-phase model, Eulerian-Lagrangian two-phase model***

فهرست علائم

C	نسبت غلظت محلی به متوسط	v	سرعت عمودی
Cp	ظرفیت گرمایی ویژه ($j.kg^{-1}.K^{-1}$)	x	راستای افقی
D_b	پخش براونی ($m^2.s^{-1}$)	y	راستای عمودی
d_p	قطر ذرات (m)	**یونانی**	
D_t	پخش ترموفورتیک ($m^2.s^{-1}$)	α	ضریب پخش حرارتی ($m^2.s^{-1}$)
H	ارتفاع کانال (m)	θ	دما (K)
k	ضریب هدایت حرارتی ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	μ	ویسکوزیته ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
k_B	ثابت بولتزمن ($J.K^{-1}$)	ρ	چگالی ($kg.m^{-3}$)
L	طول کانال (m)	Ø	غلظت حجمی ذرات
Le	عدد لویس	**زیرنویس‌ها**	
N_{BT}	نسبت پخش براونی به ترموفورتیک	b	مقدار حجمی سیال
Nu	عدد ناسلت	f	سیال
Nx	تعداد نقاط در راستای افقی	0	متوسط
Ny	تعداد نقاط در راستای عمودی	nf	نانوسیال
P	فشار	p	ذره
Pe	عدد پکلت	x	مقدار محلی
Re	عدد رینولدز	w	مقدار روی دیواره
Sc	عدد اشمیت	in	مقدار در ورودی
Pr	عدد پرانتل	**بالانویس‌ها**	
T	دمای بی‌بعد	*	طول بی‌بعد کانال
u	سرعت افقی		

۱- مقدمه

کوچک‌تر کردن اندازه قطعات الکترونیکی یکی از اهداف صنعت الکترونیک است. یکی از مهم‌ترین موانع رسیدن به این هدف، مساله دفع حرارت از این قطعات است که یکی از دلایل آن محدود بودن خواص حرارتی سیالات موجود مانند هوا و آب است. در نتیجه بهبود خواص حرارتی سیالات برای افزایش نرخ انتقال حرارت از اهداف علوم حرارتی می‌باشد. یکی از روش‌های بهبود خواص حرارتی سیالات، افزودن نانوذرات[1] فلزی به یک سیال پایه[2] مانند آب است. از آنجا که ضریب هدایت حرارتی فلزات بیش‌تر از سیالاتی مانند آب است، افزودن آنها به سیال باعث افزایش ضریب هدایت حرارتی و بهبود عملکرد حرارتی این سیالات به عنوان نانوسیال می‌شود.

در ابتدای پیدایش نانوسیالات به عنوان یک راه افزایش انتقال حرارت، مطالعه عددی رفتار حرارتی نانوسیالات نیز مانند سیالات معمولی انجام می‌شد. در این روش نانوسیال را یک سیال همگن فرض می‌کردند و خواص آن را به صورت ترکیبی از خواص سیال و ذرات در نظر می‌گرفتند و فرض می‌شد که سرعت و دمای ذرات با سرعت و دمای سیال اطراف آن برابر است. این روش به روش یک‌فازی همگن معروف است و مورد استفاده قرار گرفته است [۱-۳]. اما نتایج حاصل از این مدل کردن مقداری با نتایج تجربی فاصله دارد [۴-۸]. آزمایشات نشان می‌داد که برخلاف توزیع همگن[۳] نانوذرات در سیال، هنگام به جریان درآمدن نانوسیال، ذرات تحت تأثیر سرعت سیال و نیروی جانب از مزکز (در مسیرهای غیرمستقیم) توزیع همگن خود را از دست می‌دهند. همین دور شدن سیال از حالت همگن منشا اختلاف نتایج این مدل با نتایج تجربی است [۵-۱۱]. روش دیگر مطالعه نانوسیالات روش پخش [۱۱-۱۳] است. در این روش تأثیر رفتار نانوسیال با افزایش ضریب هدایت حرارتی آن در داخل جریان توجیه شده است. این روش نیز مانند روش همگن یک‌فازی یک روش ساده است. اما برای یافتن مقدار ضریب هدایت حرارتی نانوسیال ضرایب مجهولی وجود دارد که با انطباق آن با نتایج تجربی به‌دست می‌آید. به عبارتی ضریب هدایت حرارتی در این روش نیازمند نتایج تجربی است. در نتیجه دانشمندان به روش‌های دوفازی برای مطالعه نانوسیالات روی آوردند. یکی از این روش‌ها، روش اویلری-اویلری است [۱۴] که در آن هر دو فاز سیال و ذره از دیدگاه اویلری مطالعه می‌شوند. به عبارتی معادلات ممنتوم و انرژی هم برای سیال و هم برای ذرات حل می‌شوند. اما یک ایراد اساسی آن عدم وجود توجیه فیزیکی برای چسبندگی ذرات در معادلات ممنتوم ذرات است. روش دیگر روش ترکیبی است که این روش نیز توسط محققین زیادی استفاده شده است [۲، ۳، ۱۵ و ۱۶]. نتایج این روش نیز به نتایج تجربی نزدیک است. اما در معادلات آن جملات چشمه ظاهر می‌شوند که ناشی از تأثیر فازها بر همدیگر است و این جملات چشمه نیز نیاز به تثبیت بیشتری دارند. دیگری دیدگاه اویلری-لاگرانژی است. در دیدگاه اویلری-لاگرانژی سیال از دیدگاه اویلری دیده می‌شود و معادلات پیوستگی[۴]، ممنتوم[۵] و انرژی برای آن حل می‌شود و برای ذرات نیز از دیدگاه لاگرانژی و تعقیب ذرات به حل مساله پرداخته می‌شود. در این روش تمام نیروهای وارد بر ذرات لحاظ می‌شوند و با استفاده از قانون دوم نیوتن شتاب و سپس سرعت و در نهایت مکان هر ذره در هر لحظه به‌دست می‌آید [۵-۱۱ و ۱۷]. در این روش، در مدل کردن سیال و ذرات از هیچ تقریبی استفاده نمی‌شوند و یک روش دقیق است و نتایج آن به نتایج تجربی نزدیک است [۵-۱۱]. اگر چه این روش، یک روش دقیق است اما نقاط ضعفی نیز دارد. از آنجا که باید برای تک تک ذرات معادلات ممنتوم و انرژی حل شود، این روش یک روش بسیار زمان‌بر است. در نتیجه برای حل به این روش باید در برنامه‌نویسی از روش پردازش موازی استفاده کرد و برای اجرای برنامه از کامپیوتری با تعداد پردازشگر زیاد که به ابرکامپیوتر[۶] معروف است استفاده کرد. این محدودیت‌ها باعث می‌شود که این روش برای مطالعه نانوسیال با قطر کم یا در کانال‌های غیر از میکروکانال‌ها[۷] منطقی و امکان‌پذیر نباشد.

روش دیگر روش بونجورنو [۱۸] است که بسیار مورد استفاده محققین قرار گرفته‌است [۱۹-۲۵]. این روش با این که یک روش دوفازی محسوب می‌شود اما از نظر سادگی مانند روش‌های یک‌فازی (همگن و پخش) است و تا حدی دقت روش اویلری-لاگرانژی را نیز دارد. مطالعات زیادی در زمینه انتقال حرارت در نانوسیالات به روش بونجورنو انجام شده است. اما مقایسه‌ای بین دقت این روش با روش اویلری-لاگرانژی صورت نگرفته‌است. در این مطالعه انتقال حرارت در یک میکروکانال با استفاده از روش‌های یک‌فازی همگن و دوفازی بونجورنو بررسی و نتایج آن با نتایج روش اویلری-لاگرانژی مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم

برای امکان مقایسه بین روش‌های مختلف و با توجه به نتایج موجود از روش اویلری لاگرانژی [۷ و ۱۰] و برای امکان مقایسه نتایج، هندسه انتخابی، هندسه استفاده شده در مراجع [۷ و ۱۰] است. در نتیجه، ناحیه حل، یک میکروکانال به ارتفاع ۱۰۰ میکرون و طول ۱ سانتیمتر است (شکل ۱). غلظت حجمی[۸] نانوذرات تا ۲% و عدد رینولدز محدوده ۲۵۰ تا ۱۰۰۰ را پوشش می‌دهد.

ابتدا معادلات حاکم در مدل دوفازی بونجورنو معرفی می‌شوند. نسبت به مدل یک‌فازی، در این مدل یک معادله بیشتر حل می‌شود. این معادله، معادله غلظت است و با حل آن توزیع ذرات به دست می‌آید. با داشتن توزیع ذرات می‌توان خواص را به‌صورت محلی به‌دست آورد و در سایر معادلات از آن استفاده کرد. در حالی که در مدل یک‌فازی معادلات حاکم همان معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی برای سیالات معمولی است با این تفاوت که به جای خواص سیال، خواص نانوسیال با استفاده از غلظت متوسط جایگزین می‌شوند.

مدل بونجورنو [۱۸]:

توجه شود که خواص سیال در این مدل به‌صورت محلی تعریف می‌شود.

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial \rho_{nf} U}{\partial X} + \frac{\partial \rho_{nf} V}{\partial Y} = 0 \qquad (۱)$$

معادلات ممنتوم:

$$\frac{\partial \rho_{nf} UU}{\partial X} + \frac{\partial \rho_{nf} VU}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}\left(\mu_{nf}\frac{\partial U}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\mu_{nf}\frac{\partial U}{\partial Y}\right) \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial \rho_{nf} UV}{\partial X} + \frac{\partial \rho_{nf} VV}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X}\left(\mu_{nf}\frac{\partial V}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\mu_{nf}\frac{\partial V}{\partial Y}\right) \qquad (۳)$$

معادله انرژی:

$$\frac{\partial (\rho Cp)_{nf} U\theta}{\partial X} + \frac{\partial (\rho Cp)_{nf} V\theta}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X}\left(k_{nf}\frac{\partial \theta}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(k_{nf}\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right) + (\rho Cp)_p D_B\left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial Y}\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right) + (\rho Cp)_p D_T\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)^{۲}\right] \qquad (۴)$$

که در آن D_B و D_T به ترتیب ضریب پخش براونی و ضریب پخش حرارتی نانوذرات هستند که به علت حرکت تصادفی ذرات (نیروی براونی) و نیروی ترموفورسیس ایجاد می‌شوند و از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$D_B = \frac{k_B \theta}{۳\pi \mu_f d_p} \qquad (۵)$$

$$D_T = ۰/۲۶ \frac{k_f}{۲k_f + k_p}\frac{\mu_f}{\rho_f}\frac{\phi}{\theta} \qquad (۶)$$

و K_B ثابت بولتزمن و برابر با $۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}\ J/K$ است.

معادله غلظت:

$$\frac{\partial U\phi}{\partial X} + \frac{\partial V\phi}{\partial Y} = D_B\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial Y}\right)\right] + D_T\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)\right] \qquad (۷)$$

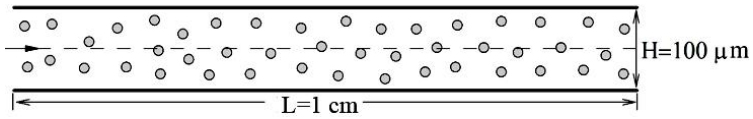
در این روابط چگالی و ظرفیت گرمائی نانوسیال از روابط زیر به‌دست آمده‌اند:

$$\rho_{nf} = (1-\phi)\rho_f + \phi\rho_p \qquad (۸)$$

$$(\rho Cp)_{nf} = (1-\phi)(\rho Cp)_f + \phi(\rho Cp)_p \qquad (۹)$$

در این مقاله برای مقایسه نتایج با نتایج روش اویلری-لاگرانژی موجود [۷ و ۱۰] برای محاسبه چسبندگی و ضریب هدایت حرارتی نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم از روابط مایگا و همکارن [۲۶]

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_f} = ۱ + ۷/۳\phi + ۱۲۳\phi^{۲} \qquad (۱۰)$$



شکل ۱- هندسه میکروکانال

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = ۱ + ۲/۷۲\phi + ۴/۹۷\phi^۲ \qquad (۱۱)$$

و برای چسبندگی آب-مس از رابطه برینکمن [۲۷] و برای ضریب هدایت حرارتی آن از رابطه پاتل و همکاران [۲۸] استفاده شده است.

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_f} = (1-\phi)^{-۲/۵} \qquad (۱۲)$$

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = ۱ + \frac{k_p}{k_f}\frac{d_f}{d_p}\frac{\phi}{۱-\phi}\left(۱ + c\frac{۲k_B\theta}{\alpha_f \pi \mu_f d_p}\right) \qquad (۱۳)$$

در این رابطه نیز d_f اندازه قطر یک مولکول سیال پایه و برای آب برابر با ۰/۲ نانومتر است [۲۸] و α_f ضریب پخش حرارتی سیال و c یک ثابت تجربی و برابر با ۲۵۰۰۰ است.

با استفاده از متغیرهای بی‌بعد زیر،

$$\begin{gathered} x = \frac{X}{H}, y = \frac{Y}{H}, L^* = \frac{L}{H}, u = \frac{U}{U_b}, v = \frac{V}{U_b}, p = \frac{P}{\rho_f U_b^۲} \\ T = \frac{\theta - \theta_{in}}{\theta_w - \theta_{in}}, C = \frac{\phi}{\phi_۰}, Pr = \frac{\mu_f Cp_f}{k_f}, Re = \frac{\rho_f U_b H}{\mu_f} \\ Le = \frac{\alpha_f}{D_B \phi_۰}, N_{BT} = \frac{D_B \phi_۰}{(\theta_w - \theta_{in}) D_T}, Sc = \frac{\mu_f}{\rho_f}\frac{۱}{D_B} \end{gathered} \qquad (۱۴)$$

که در آن ϕ_0 غلظت حجمی متوسط ذرات، L_e عدد لویس و برابر با نسبت پخش حرارتی سیال به پخش براونی و N_{BT} نسبت پخش براونی به پخش ترموفورتیک و Sc عدد اشمیت و برابر با نسبت پخش ممنتوم به پخش براونی است، شکل بی‌بعد معادلات حاکم به‌صورت زیر است:

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_f}u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_f}v\right) = ۰ \qquad (۱۵)$$

معادلات ممنتوم:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_f}uu\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_f}vu\right) = \\ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{۱}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \end{gathered} \qquad (۱۶)$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_f}uv\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho_{nf}}{\rho_f}vv\right) = \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{۱}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \end{gathered} \qquad (۱۷)$$

معادله انرژی:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(\rho Cp)_{nf}}{(\rho Cp)_f}uT\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(\rho Cp)_{nf}}{(\rho Cp)_f}vT\right] = \\ \frac{۱}{Pe}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_{nf}}{k_f}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_{nf}}{k_f}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] + \\ \frac{۱}{Pe.Le}\frac{(\rho Cp)_p}{(\rho Cp)_f}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \\ \frac{۱}{Pe.Le.N_{BT}}\frac{(\rho Cp)_p}{(\rho Cp)_f}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^۲\right] \end{gathered} \qquad (۱۸)$$

معادله غلظت:

$$\begin{gathered} \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} = \\ \frac{۱}{Re.Sc}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)\right] + \\ \frac{۱}{Re.Sc.N_{BT}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] \end{gathered} \qquad (۱۹)$$

۲-۱- شرایط مرزی:

شرط مرزی ورودی سرعت و دما و غلظت یکنواخت و شرط

مرزی خروجی شرط توسعه‌یافتگی است. با توجه به این که در میکروکانال عدد نادسن کمتر از ۰/۰۰۱ است، شرط عدم لغزش برای سرعت و عدم پرش برای دما روی بدنه برقرار است. شرط مرزی دما ثابت برای دیواره در نظر گرفته شده است و شرط مرزی غلظت روی دیواره نیز به‌صورت زیر است [۱۸]:

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{1}{N_{BT}}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{۲۰}$$

معادلات حاکم در مدل یک‌فازی همگن:

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{۲۱}$$

معادلات ممنتوم:

$$\frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\rho_f}{\rho_{nf}}\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{۲۲}$$

$$\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nf}}{\mu_f}\frac{\rho_f}{\rho_{nf}}\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \tag{۲۳}$$

معادله انرژی:

$$\frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} = \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f}\frac{1}{Pe}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] \tag{۲۴}$$

لازم به یادآوری است که خواص استفاده شده در روابط (۲۲) تا (۲۴) از روابط (۸) تا (۱۳) به‌دست می‌آید. اما در آن به جای غلظت محلی ϕ از غلظت متوسط ϕ_0 استفاده می‌شود.

۳- روش حل عددی[۹]

در این مقاله به دو روش یک‌فازی همگن و دوفازی بونجورنو مساله حل و با نتایج به‌دست آمده و موجود با روش اویلری-لاگرانژی مقایسه شده‌اند. برای حل، ابتدا معادلات برای سیال خالص (بدون وجود ذرات) به‌دست آمد و از نتایج آن به عنوان حدس اولیه برای حل معادلات در دو مدل یک‌فازی همگن و دوفازی بونجورنو استفاده شد. حل معادلات حاکم با استفاده از برنامه‌نویسی با استفاده از کدنویسی در زبان فرترن توسط نویسنده انجام شد. در مدل بونجورنو با حدس اولیه به‌دست آمده از سیال خالص، حل آغاز می‌شود و ابتدا معادله غلظت (۱۹) حل می‌شود. با معلوم شدن غلظت محلی خواص نانوسیال از روابط (۸) تا (۱۳) محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از این خواص محلی به‌دست آمده، معادلات ممنتوم و تصحیح فشار و انرژی تا رسیدن به همگرایی کامل حل شده‌اند. برای حل معادلات ممنتوم از روش حجم کنترلی سیمپل [۲۹] همراه با طرح اختلاف پیوندی اسپالدینگ [۳۰] برای تقریب جملات جابه‌جایی استفاده شده است. شبکه تولید شده دارای فشردگی در نزدیکی دیواره‌ها است. برای حل از شبکه متمرکز استفاده شده است، به‌طوری که تمامی متغیرهای سرعت، فشار، غلظت و دما در نقاط اصلی ذخیره می‌شوند. در نتیجه، برای پرهیز از شطرنجی شدن میدان فشار، از میانیابی رای و چو [۳۱] در معادله تصحیح فشار برای مقادیر سرعت در وجوه حجم کنترل‌ها استفاده شده است.

ناسلت محلی از رابطه زیر

$$Nu_X = \frac{k_{nf}}{k_f}\frac{-\left.\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right|_w (2H)}{\theta_w - \theta_b} \tag{۲۵}$$

که در آن 2H قطر هیدرولیکی کانال است. در حالت بی‌بعد، رابطه به‌صورت

$$Nu_x = 2\frac{k_{nf}}{k_f}\frac{-\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_w}{1 - T_b} \tag{۲۶}$$

است به‌دست می‌آید و ناسلت متوسط نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$Nu = \frac{1}{L^*}\int_{x=0}^{x=L^*} Nu_x dx \tag{۲۷}$$

در رابطه (۲۶) نیز T_b دمای حجمی نانوسیال است و از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$T_b = \frac{\int_{y=0}^{y=1}\left[(1-\phi)\rho_f Cp_f + \phi\rho_p Cp_p\right] uTdy}{\rho_{nf} Cp_{nf}} \qquad (۲۸)$$

تاکید می‌شود که ϕ استفاده شده در رابطه (۲۸) غلظت محلی است.

۴- بحث در نتایج

در ابتدا لازم به ذکر است که هدف این مقاله مقایسه روش‌های اویلری-لاگرانژی و بونجورنو است. برای این منظور تمامی نتایج روش اویلری-لاگرانژی نتایج مستخرج از منابع [۷ و ۱۰] هستند.

استقلال نتایج از تعداد نقاط شبکه[۱۰] در جدول (۱) برای عدد ناسلت متوسط و در شکل (۲) برای عدد ناسلت محلی نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است تعداد نقاط ۱۰۰-۴۰ برای تحلیل نتایج کفایت می‌کند. اگرچه استفاده از تعداد نقاط کمتر نیز کافی به‌نظر می‌رسد، اما برای امکان مقایسه بهتر نتایج با روش اویلری-لاگرانژی در [۷ و ۱۰] از تعداد نقاط بیشتر استفاده شده است.

برای اعتبارسنجی[۱۱] نتایج، ابتدا عدد ناسلت متوسط برای ناحیه طول ورودی مرکب (هیدرودینامیکی و حرارتی) با نتایج عبادیان و دانگ [۳۲] مقایسه شده است و مطابق نتایج جدول (۲)، اختلاف نتایج کمتر از ۰/۵ درصد است.

همچنین در شکل (۳) عدد ناسلت محلی برای مدل بونجورنو با نتیجه روش اویلری-لاگرانژی در [۷ و ۱۰] مقایسه شده است و انطباق مناسبی در این شکل مشاهده می‌شود.

خواص ترموفیزیکی سیال پایه و نانوذرات نیز مطابق جدول (۳) هستند [۷ و ۱۰].

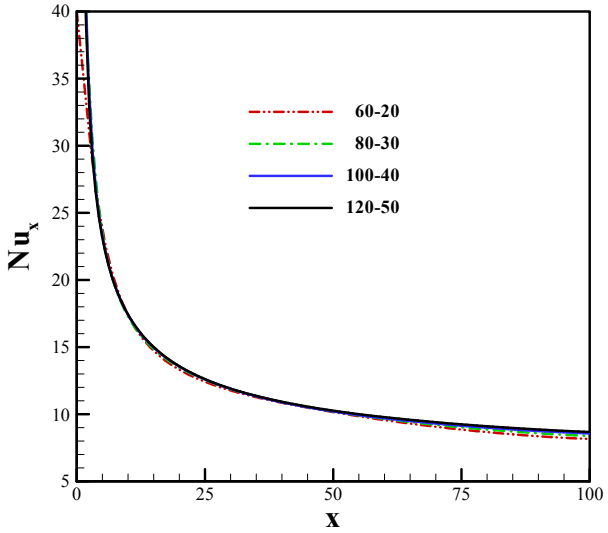
یکی از نقاط قوت روش اویلری-لاگرانژی مشخص شدن توزیع ذرات در آن است. اما این کار سختی‌های خاص خود شامل لزوم برنامه‌نویسی به صورت پردازش موازی و نیاز به ابرکامپیوتر برای اجرای برنامه دارد. یکی از نقاط قوت روش بونجورنو ارائه معادله برای توزیع ذرات است. به‌طوری که بدون محدودیت‌های روش اویلری-لاگرانژی و فقط با حل یک معادله اضافی مانند سایر معادلات، می‌توان توزیع ذرات را یافت. شکل (۴) توزیع ذرات در مقطع خروجی را به هر دو روش نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که توزیع ذرات در روش بونجورنو پیوستگی دارد. در روش اویلری-لاگرانژی غلظت محلی ذرات در نزدیکی دیواره صفر است اما در روش بونجورنو به واسطه شرط مرزی (رابطه (۲۰)) صفر نیست.

کم بودن غلظت نانوذرات در نزدیکی دیواره در شکل (۵) نیز که به روش بونجورنو انجام شده است، قابل مشاهده می‌باشد. این موضوع توسط روش اویلری لاگرانژی [۷، ۱۰ و ۳۳] نیز گزارش شده است. از دلایل آن می‌توان به وجود مولفه عمودی سرعت در ناحیه طول ورودی هیدرودینامیکی اشاره کرد که باعث فرستادن ذرات به سمت مرکز کانال می‌شود. در روش اویلری-لاگرانژی غلظت محلی ذرات در نزدیکی دیواره صفر است اما در روش بونجورنو مقدار کمی را به خود اختصاص می‌دهد.

در ادامه نتایج به‌دست آمده از روش یک‌فازی همگن و دوفازی بونجورنو با نتایج مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی مقایسه می‌شوند. در شکل (۶) عدد ناسلت محلی برای سیال آب خالص و نانوسیال آب-اکسیدآلومینیوم با غلظت‌های مختلف در رینولدز ۵۰۰ رسم شده است. ملاحظه می‌شود که روند تغییرات عدد ناسلت محلی در روش‌های مختلف یکسان است. نتایج مدل دوفازی بونجورنو نسبت به نتایج مدل یکفازی همگن به نتایج اویلری-لاگرانژی نزدیک‌تر است. در شکل (۶-الف) که برای غلظت ۱٪ رسم شده است نتایج از قسمت‌های میانی کانال به بعد از هم فاصله می‌گیرند. شکل (۶-ب) نیز برای غلظت متوسط ۲٪ رسم شده است. در این شکل نیز نتایج روش بونجورنو به نتایج اویلری-لاگرانژی نزدیک‌تر است و در بیشتر مناطق بر هم منطبق هستند. اما نتایج روش همگن از آن‌ها فاصله دارد. دلیل این فاصله را می‌توان به کمک شکل‌های (۳) و (۴) توجیه کرد. در روش همگن فرض بر این است که غلظت

جدول ۱- استقلال نتایج از تعداد نقاط شبکه در رینولدز ۱۰۰۰

Nx-Ny	ناسلت متوسط پژوهش حاضر	درصد خطا
۲۰-۶۰	۱۲/۶۴۱	۱/۲۷
۳۰-۸۰	۱۲/۷۱۴	۰/۷۱
۴۰-۱۰۰	۱۲/۷۹۱	۰/۰۹
۵۰-۱۲۰	۱۲/۸۰۳	-



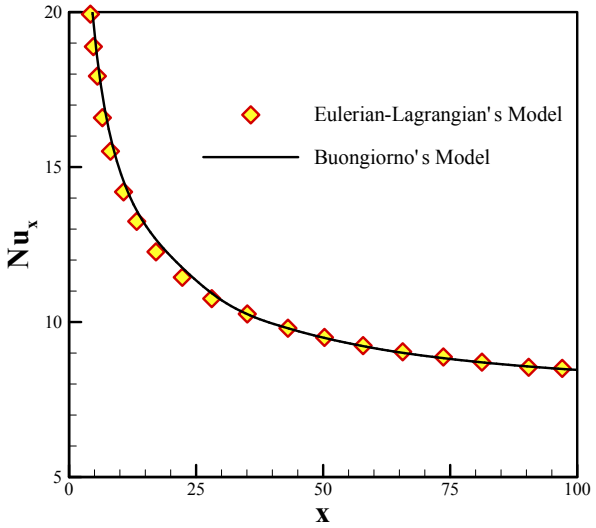
شکل ۲- استقلال نتایج از تعداد نقاط شبکه

جدول ۲- اعتبار سنجی نتایج

عدد رینولدز	ناسلت متوسط مطالعه حاضر	ناسلت متوسط [۳۲]	درصد خطا
۲۵۰	۹/۲۵۰	۹/۲۸۷	۰/۴۰
۵۰۰	۱۰/۶۷۱	۱۰/۶۳۶	۰/۳۳
۷۵۰	۱۱/۸۲۵	۱۱/۷۷۲	۰/۴۵
۱۰۰۰	۱۲/۷۹۱	۱۲/۷۷۳	۰/۱۴

ذرات در تمامی فضای کانال برابر و یکنواخت است درحالی‌که به علت وجود مولفه عمودی سرعت در ناحیه طول ورودی هیدرودینامیکی غلظت ذرات در نزدیکی دیواره به مراتب کمتر از آن در مرکز کانال است. به همین دلیل نتایج مدل یکفازی همگن از دو روش دوفازی دیگر که توزیع ذرات را بهتر پیش‌بینی می‌کنند فاصله دارد.

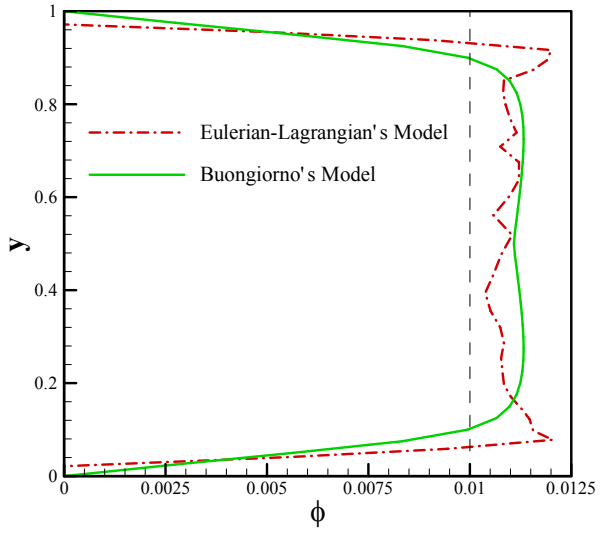
عدد ناسلت متوسط در شکل (۷) برای سیال آب خالص و نانوسیال آب-اکسیدآلومینیوم با غلظت‌های مختلف در رینولدزهای مختلف رسم شده است. ملاحظه می‌شود که در غلظت متوسط ۱٪ نتایج دو مدل دوفازی در رینولدزهای کمتر از ۵۰۰ تقریبا بر همدیگر منطبق هستند. بیش‌ترین اختلاف نتایج برای این دو مدل دوفازی در رینولدز ۱۰۰۰ روی می‌دهد و برابر با ۲/۷ درصد است. اما نتایج مدل یک‌فازی در تمام رینولدزها از نتایج این دو روش فاصله دارد. به‌طوری که این اختلاف برای مدل یک‌فازی همگن با مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی در رینولدز ۱۰۰۰ برابر با ۴/۷۸ درصد است. اختلاف بین نتایج در رینولدز ۲۵۰ با مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی برای مدل یک‌فازی برابر با ۱/۳۸ درصد و برای مدل بونجورنو ۰/۶۳ درصد است.



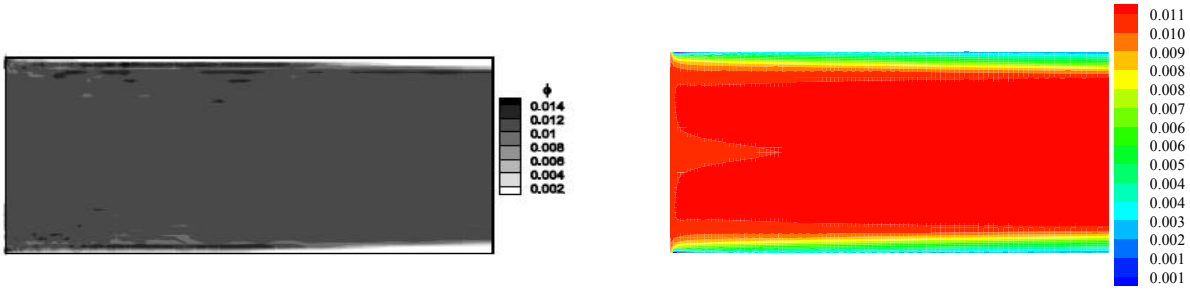
شکل ۳- عدد ناسلت محلی در رینولدز ۵۰۰ و غلظت ۲ درصد برای نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم

جدول ۳- خواص ترموفیزیکی سیال پایه و نانوذرات

	آب	اکسید آلومینیوم	مس
چگالی (kg/m^3)	۹۹۸/۲	۳۸۸۰	۸۹۵۴
ظرفیت گرمایی ویژه (J/kg.K)	۱۴۸۱/۸	۷۳۳	۳۸۳/۱
ضریب هدایت حرارتی (W/m.K)	۰/۵۹۷	۳۶	۳۸۶
چسبندگی (kg/m.s)	۰/۰۰۱	-	-

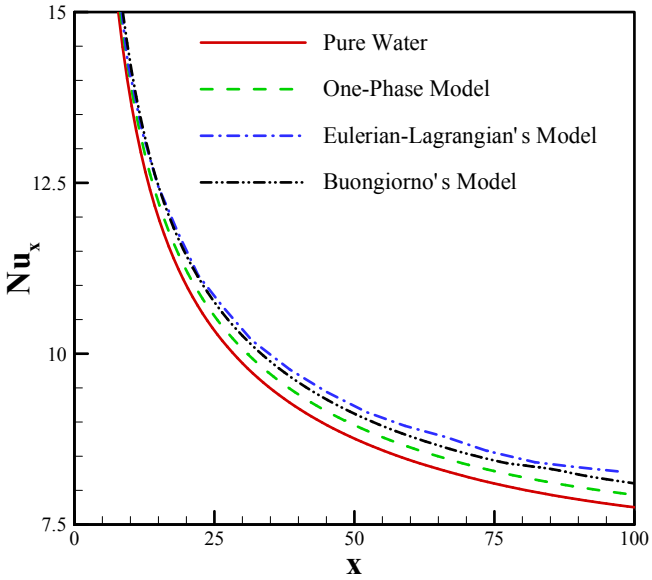


شکل ۴- غلظت محلی در مقطع خروجی برای رینولدز ۵۰۰ و غلظت متوسط ۱ درصد نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم

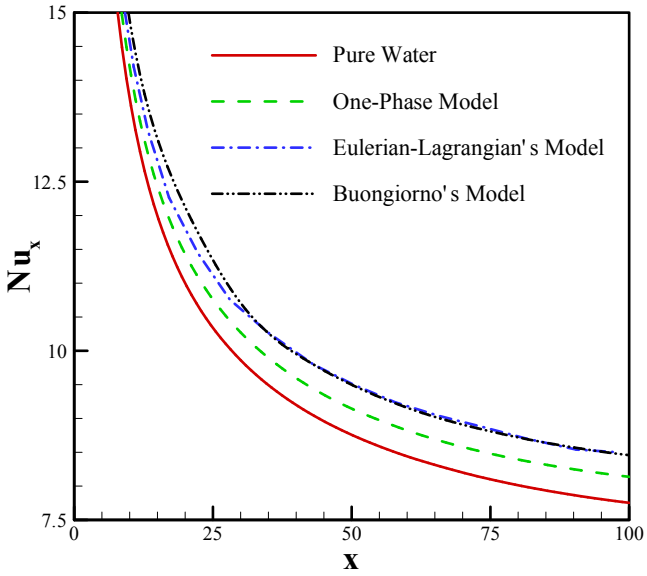


(ب) (الف)

شکل ۵- کانتورهای غلظت محلی برای رینولدز ۲۵۰ و غلظت متوسط ۱ درصد نانوسیال آب-مس (الف) مطالعه حاضر (ب) میرزایی [۱۰]

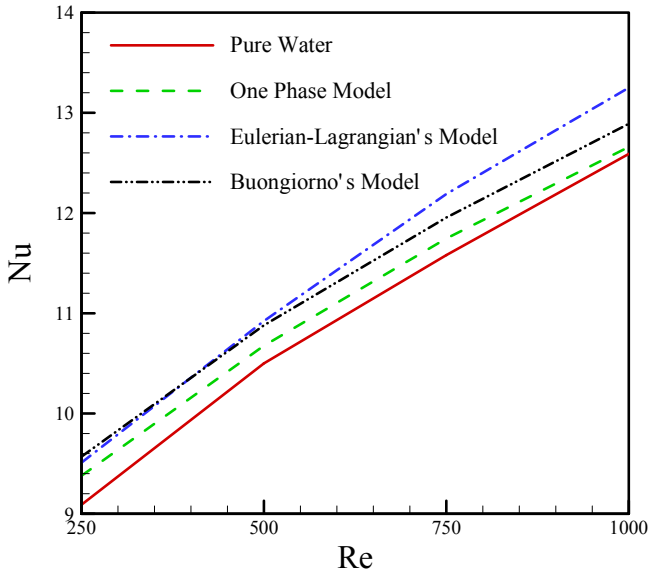


(الف)

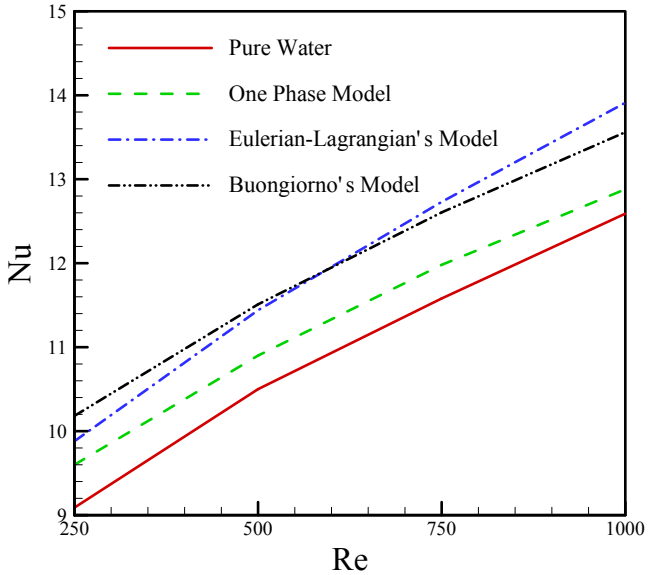


(ب)

شکل ۶-توزیع ناسلت محلی در رینولدز ۵۰۰ برای نانوسیال آب-اکسیدآلومینیوم با غلظت حجمی متوسط (الف) یک درصد (ب) دو درصد



(الف)

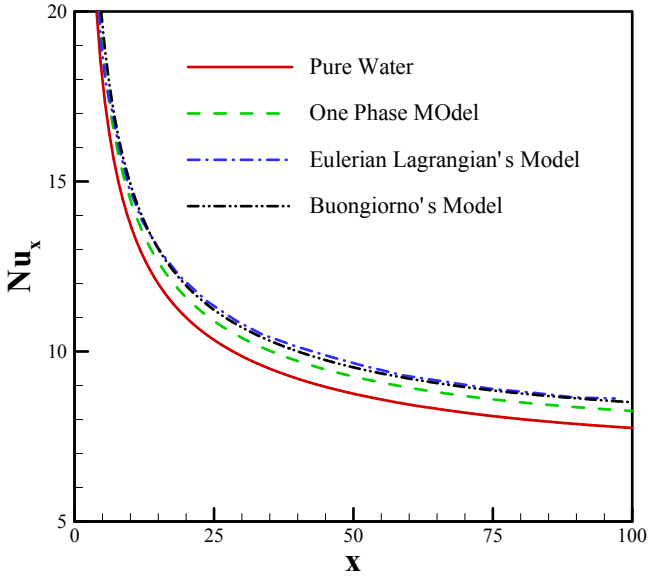


(ب)

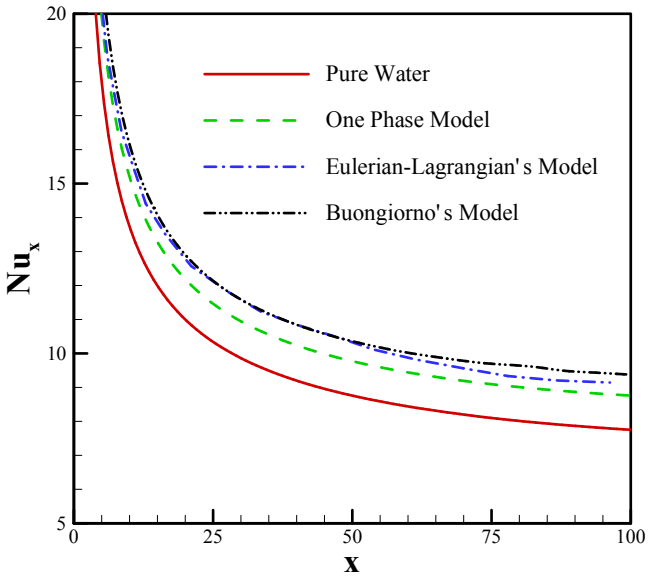
شکل ۷- ناسلت متوسط در رینولدزهای مختلف برای نانوسیال آب-اکسیدآلومینیوم با غلظت حجمی متوسط (الف) یک درصد (ب) دو درصد

در شکل (۷-ب) عدد ناسلت متوسط برای غلظت ۲٪ رسم شده است. درصد اختلاف بین نتایج در رینولدز ۲۵۰ با مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی برای مدل یک‌فازی برابر با ۲/۸۳ درصد و برای مدل بونجورنو ۳ درصد است. اختلاف بین نتایج در رینولدز ۱۰۰۰ با مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی برای مدل یکفازی برابر با ۷/۳۳ درصد و برای مدل بونجورنو ۲/۴۵ درصد است.

در شکل (۸) عدد ناسلت محلی برای سیال آب خالص و نانوسیال آب-مس با غلظت‌های مختلف در رینولدز ۵۰۰ به روش‌های مختلف یک‌فازی و دوفازی رسم شده است. در این شکل نیز ملاحظه می‌شود که روند تغییرات عدد ناسلت محلی در روش‌های مختلف یکسان است. اما نتایج مدل دوفازی بونجورنو نسبت به نتایج مدل یک‌فازی همگن به نتایج اویلری-لاگرانژی نزدیک‌تر است. در شکل (۸-الف) که برای غلظت ۱٪ رسم شده است نتایج تقریبا در تمامی طول کانال برای مدل‌های دوفازی برهم منطبق هستند و نتایج مدل یک-فازی کمتر از آن‌ها است. شکل (۸-ب) نیز برای غلظت متوسط



(الف)

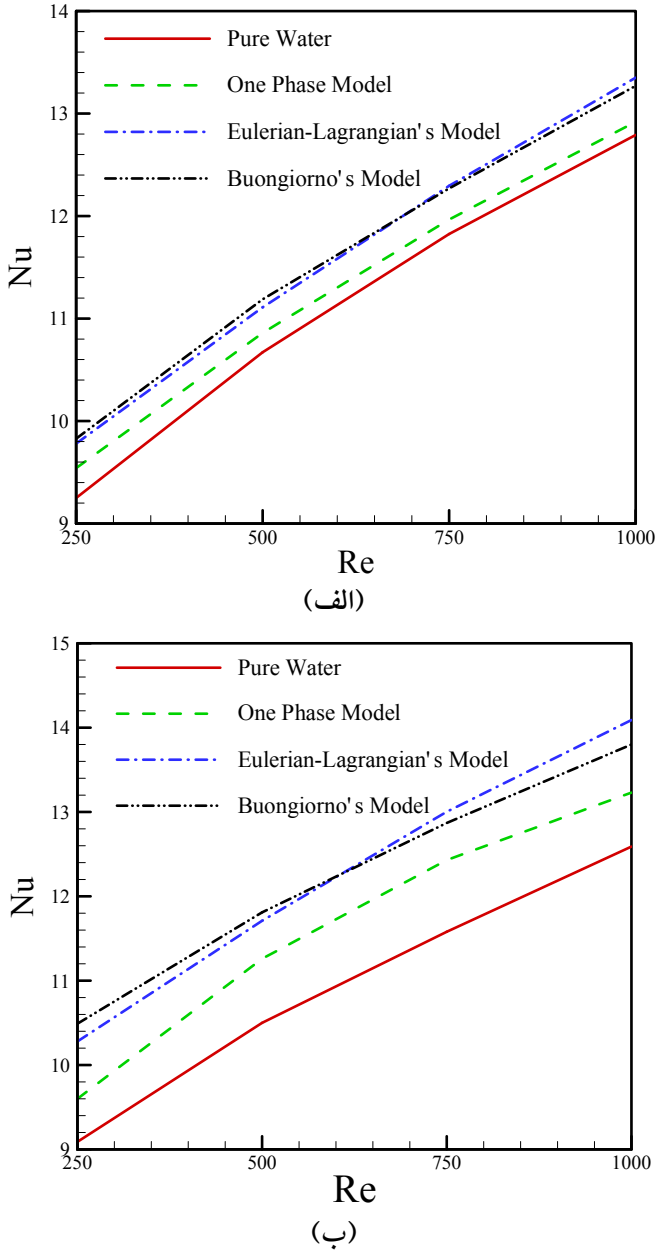


(ب)

شکل۸- توزیع ناسلت محلی در رینولدز ۵۰۰ برای نانوسیال آب-مس با غلظت حجمی متوسط (الف) یک درصد (ب) دو درصد

۲٪ رسم شده است. در این شکل نیز نتایج روش بونجورنو به نتایج اویلری-لاگرانژی نزدیک‌تر است. اما از میانه کانال به بعد مقداری از هم فاصله می‌گیرند. درحالی‌که نتایج روش همگن در کل طول کانال از نتایج دو روش دیگر فاصله دارد.

عدد ناسلت متوسط در شکل (۹) برای سیال آب خالص و نانوسیال آب-مس با غلظت‌های مختلف در رینولدز مختلف رسم شده است. ملاحظه می‌شود که در غلظت متوسط ۱٪ نتایج دو مدل دوفازی در رینولدزهای مختلف تقریبا بر همدیگر منطبق هستند. اما نتایج مدل یک‌فازی در تمام رینولدزها از نتایج این دو روش فاصله دارد. در شکل (۹-ب) عدد ناسلت متوسط برای غلظت ۲٪ رسم شده است. درصد اختلاف بین نتایج در رینولدز ۲۵۰ با مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی برای مدل یکفازی برابر با ۶/۶ درصد و برای مدل بونجورنو ۲/۰۵ درصد است. درصد اختلاف بین نتایج در رینولدز ۱۰۰۰ با مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی برای مدل یکفازی برابر با ۶/۱۴ درصد و برای مدل بونجورنو ۲/۰۹ درصد است.



شکل ۹- ناسلت متوسط در رینولدزهای مختلف برای نانوسیال آب-مس با غلظت حجمی متوسط (الف) یک درصد (ب) دو درصد

به این ترتیب بیش‌ترین خطای روش یک‌فازی با روش اویلری-لاگرانژی برای نانوسیال آب-مس کمتر از ۷/۵ درصد و برای روش بونجورنو کمتر از ۳ درصد است.

قبل از نتیجه‌گیری، مدل‌های دوفازی اویلری-لاگرانژی و بونجورنو با هم مقایسه می‌شوند. ابتدا این‌که، در روش اویلری-لاگرانژی برای تک‌تک ذرات باید معادلات ممنتوم و انرژی را حل کرد. در نتیجه زمان محاسبات به تعداد ذرات و آن هم به قطر و غلظت ذرات بستگی دارد. به‌طوری‌که برای غلظت‌های بالای ۲٪ و قطرهای کمتر از ۱۰۰ نانومتر و در مسائل سه‌بعدی و یا کانال‌های با ابعاد ماکرو که تعداد ذرات در آن‌ها زیاد می‌شود روش اویلری لاگرانژی روش مناسب و معقولی نیست. به‌طوری که تعداد ۳۲ میلیون ذره برای نانوذرات با قطر ۱۰۰ نانومتر و غلظت ۲٪ در یک میکروکانال سه‌بعدی با ابعاد حدود ۱۰۰ میکرون توسط رستمی [۱۱] گزارش شده است. اما در

روش بونجورنو قطر و غلظت ذرات فقط دو عدد در برنامه کامپیوتری هستند و تغییر آنها تأثیری بر زمان محاسبات ندارد. مورد دوم این که در روش اویلری-لاگرانژی به علت طولانی شدن زمان حل به امکانات ابر کامپیوتر و در استفاده از ابر کامپیوتر به برنامه‌نویسی به روش پردازش موازی نیاز است.

به این ترتیب با این که مدل یکفازی همگن ساده‌ترین روش در مطالعه نانوسیالات است و نانوسیال تهیه شده قبل از استفاده همگن است اما در حین حرکت در کانال به علت اختلاف چگالی سیال پایه و نانوذرات، توزیع همگن نانوسیال تغییر می‌کند و به علت وجود مولفه عمودی سرعت در طول ورودی کانال، ذرات به سمت دور از دیواره توزیع می‌شوند. در مدل‌های دوفازی بررسی شده در این مقاله این موضوع در نظر گرفته شده است و توزیع ذرات ناهمگن می‌باشد. از طرفی در مدل بونجورنو با همان سادگی مدل یک‌فازی می‌توان با حداکثر ۳٪ خطا به نتایج روش دقیق اویلری-لاگرانژی دست یافت بدون آن‌که به برنامه‌نویسی به روش پردازش موازی و امکاناتی مانند ابرکامپیوتر وصرف زمان زیاد نیاز باشد. به طور خلاصه مدل بونجورنو به طور همزمان هم سادگی مدل یک‌فازی را دارد و هم دقت مدل دوفازی.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله نتایج روش‌های عددی مختلف در حل مسائل انتقال حرارت نانوسیالات به روش‌های یک‌فازی همگن و دوفازی به روش بونجورنو با نتایج مدل دوفازی اویلری-لاگرانژی به عنوان یک روش دقیق، مقایسه شده‌اند. سیال پایه آب و نانوذرات از دو جنس اکسید آلومینیوم و مس با غلظت حجمی تا ۲٪ و قطر ۱۰۰ نانومتر و محدوده عدد رینولدز از ۲۵۰ تا ۱۰۰۰ است. معادلات حاکم شامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی به روش حجم کنترل (سیمپل) حل شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که حداکثر اختلاف نتایج، با نتایج مدل اویلری-لاگرانژی در مدل یکفازی همگن برابر با ۷/۳۳ درصد برای مدل بونجورنو ۳ درصد است. به این ترتیب با مدل بونجورنو می‌توان با حداکثر ۳٪ خطا به نتایج روش دقیق اویلری-لاگرانژی دست یافت بدون آن‌که به برنامه‌نویسی به روش پردازش موازی و امکاناتی مانند ابرکامپیوتر نیاز باشد.

واژه‌نامه

1- base fluid
2- code validity
3- continuity
4- distibution
5- grid independency
6- microchannel
7- momentum
8- nanoparticle
9- numerical solution
10- super computer
11- volume fraction

مراجع

1. Rostami, J., "Convective Heat Transfer in a Wavy Channel Utilizing Nanofluids", *Journal of Enhanced Heat Transfer*, Vol. 14, No. 4, pp. 333-352, (2007).
2. Behzadmehr, A., Saffar-Avval, and M., Galanis, N., "Prediction of Turbulent Forced Convection of a Nanofluid in a Tube with Uniform Heat Flux Using a Two Phase Approach", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, pp. 211-219, (2007).
3. Akbari, M., Galanis, N., and Behzadmehr, A., "Comparative Analysis of Single and Two-Phase Models for CFD Studies of Nanofluid Heat Transfer", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50, pp. 1343-1354, (2011).
4. Haghshenas Fard, M., Nasr Esfashany, M., and Talaie, M., R., "Numerical Study of Convective Heat Transfer of Nanofluids in a Circular Tube Two-Phase Model versus Single-Phase", *International Communication in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 91-97, (2010).
5. He, Y., Men, Y., Zhao, Y., Lu, H., and Ding, Y., "Numerical Investigation into the Convective Heat Transfer of TiO_2 Nanofluids Flowing through a Straight Tube Under the Laminar Flow Conditions", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 29, 1965-1972, (2009).
6. Rostami, J., and Abbassi, A., "Conjugate Heat

Transfer in A Wavy Microchannel Using Nanofluid by Two-Phase Eulerian–Lagrangian Method", *Advanced Powder Technology*, Vol. 27, 9-18, (2016).
7. Mirzaei, M., Saffar-Avval, M., and Naderan, H., "Heat Transfer Investigation of Laminar Developing Flow of Nanofluids in a Microchannel Based on Eulerian-Lagrangian Approach", *Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 92, pp. 1139-1149, (2014).
8. Rostami, J., Abbassi, A., and Harting, J., "Heat Transfer by Nanofluids in Wavy Microchannel", *Advanced Powder Technology*, Vol. 29, pp. 925-933, (2018).
9. Rostami, J., Abbassi, A., and Saffar-Avval, M., "The Reasons of Differences Between One Phase and Two Phase Models of Nanofluids Heat Transfer Characteristics: Case Study Flow in A Wavy Microchannel", *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 3, No. 18, pp. 228-336 (2017), (in persian).
10. Mirzaei, M., "Numerical Investigation of Nanofluid Heat Transfer in Laminar Two-Phase Model by Parallel Processing", M.Sc Thesis, Amirkabir University of Technology, (2010), (In persian).
11. Rostami, J., "Numerical Solution of Conjugate Nanofluid Heat Transfer in A Wavy Channel Using Two-Phase Eulerian-Lagrangian and One Phase Dispersion Models", Ph.D Thesis, Amirkabir University of Technology, (2015), (In persian).
12. Rostami, J., Abbassi, A., and Saffar-Avval, M., "Nemerical Heat Transfer by Nanofluids in Wavy Walls Microchannel Using Dispesion Method", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 51, No. 4, pp. 121-130, (2019), (in persian).
13. Mokameli, A., and Saffar-Avval, M., "Prediction of Nanofluid Convective Heat Treansfer Using the Dispersion Model", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 49, pp. 471-478, (2010).
14. Kalteh, M., Abbassi, A., Saffar-avval, M., and Harting, J., "Eulerian- Eulerian Two-Phase Numerical Simulation of Nanofluid Laminar Forced Convection in a Microchannel", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 32, pp. 107-116, (2011).
15. Mirmasoumi, S., and Behzadmehr, A., "Effect of Nanoparticles Mean Diameter on Mixed Convection Heat Transfer of a Nanofluid in a Horizontal Tube", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 29, pp. 557-566, (2008).
16. Mirmasoumi, S., and Behzadmehr, A.," Numerical Study of Laminar Mixed Convection of a Nanofluid in a Horizontal Tube Using Two-Phase Mixture Model", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 28, pp. 717-727, (2008).
17. Wen, D., Zhang, L., and He, Y., "Flow and Migration of Nanoparticle in a Single Channel", *Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 1061-1067, (2009).
18. Buongiorno, J., "Convective Transport in Nanofluids", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 128, pp. 240-250, (2006).
19. Turkyilmazoglu, M., "Buongiorno Model in A Nanofluid Filled Asymmetric Channel Fulfilling Zero Net Particle Flux at the Walls", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 126, pp. 974-979, (2018).
20. Sheikholeslami, M., Ganji, D. D., and Rashidi, M. M., "Magnetic Field Effect on Unsteady Nanofluid Flow and Heat Transferusing Buongiorno Model", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 416, pp. 164-173, (2016).
21. Hashim, I., Alsabery, A. I., Sheremet, M. A., and Chamkha, A. J., "Numerical Investigation of Natural Convection of Al2O3-Water Nanofluid in A Wavy Cavity with Conductive Inner Block Using Buongiorno's Two-Phase Model", *Advanced Powder Technology*, Vol. 30, pp. 399-414, (2019).
22. Motlagh, S. Y., and Soltanipour, H., "Natural Convection of Al2O3-Water Nanofluid in an Inclined Cavityusing Buongiorno's Two-Phase Model", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 11, pp. 310-320, (2017).
23. Izadi, M., Sinaei, S., Mehryan, S. A. M., and Oztop, H. F., "Natural Convection of A Nanofluid Between Two Eccentric Cylinders Saturated by Porous Material: Buongiorno's Two Phase Model", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 127, pp. 67-75, (2018).
24. Garoosi, F., Jahanshaloo, L., and Garoosi, S., "Natural Convection of a Nanofluid Between Two Eccentric Cylinders Saturated by Porous Material: Buongiorno's Two Phase Model", *Powder Technology*, Vol. 269, pp. 296-311, (2015).
25. Mousavi, S. H., Ahmadpour, A., and Saffar-Avval, M., "Numerical Simulation of Convective Heat Transfer of Non-Newtonian Carbon-Based Nanofuids in U-Bend Tubes Using Buongiorno's Model", *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, DOI: 10.1007/s10973-020-10365-y, (2020)
26. Maiga, S. E. B., Nguyen, C. T., Galanis, N., Roy, G., Mare, T., and Coqueux, M., "Heat Transfer Enhancement in Turbulent Tube Flow Using Al_2O_3 Nanoparticle Suspension", *International Journal of Numerical Method for Heat and Fluid Flow*, Vol. 16, No. 3, pp. 275-292, (2006).
27. Brinkman, H. C., "The Viscosity of Concentrated Suspension and Solution", *The Journal of Chemical Physics,* Vol. 20, pp. 571-581, (1952).
28. Patel, H., Sundararajan, T., Pradeep, T., Dasgupta, A., Dasgupta, N. and Das, S. K., "A Micro-Convection Model for Thermal Conductivity of Nanofluids", *Journal of Physics*, Vol. 65, No. 5, pp. 863-869, (2005).
29. Patankar, S. V., and Spalding, D. B., "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer

in Three-Dimensional Parabolic Flows", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787-1806, (1972).

30. Spalding, D. B., "A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives", *Journal of Numerical Methods for Engineering*, Vol. 4, pp. 551-559, (1972).
31. Rhie, C. M., and Chow, W. L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trading Edge Separation", *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 11, pp. 1525-1535, (1983).
32. Ebadian, M. A., and Dong, Z. F., "Forced Convection, Internal Flow in Ducts", in. W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Cho, Y. I. Eds., Handbook of Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1998.
33. Rostami, J., "Convective Heat Transfer by Micro-Encapsulated PCM in A Mini-Duct", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 161, 106737, (2021).