نشریه علمی – پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۲، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۲، ص. ۴۱-۱۹

مقاله پژوهشی

تحلیل ارتعاش آزاد ورق ساندویچی ضخیم با هسته متخلخل مدرج اشباع شده با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی شبه‌سه‌بعدی

علی زمانی[1] و محمد علی رهگذر[2*]

۱- گروه مهندسی عمران، دانشگاه شهید اشرفی اصفهانی، اصفهان

۲- گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۵ – دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۴/۵)

چکیده– در این پژوهش به بررسی ارتعاش آزاد ورق ساندویچی مستطیلی ضخیم متشکل از رویه‌های همگن و هسته ناهمگن از جنس مواد متخلخل اشباع شده مدرج تابعی پرداخته شده است. در این هسته متخلخل مدرج تابعی، ویژگی‌های مواد در راستای ضخامت بر اساس تئوری تنش بایوت و دیگر توابع داده شده تغییر می‌کنند. حل مساله بر اساس تئوری تغییر شکل برشی شبه‌سه‌بعدی بنا شده و معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. ورق مورد بررسی دارای شرایط تکیه‌گاهی گیردار– ساده–ساده–گیردار بوده و در مطالعات قبلی از روش ساده ناویر که ورق را در شرایط تکیه گاهی ساده بررسی می‌کند استفاده شده، در صورتی که در تحقیق حاضر از روش مربعات دیفرانسیلی جهت حل مساله و گسسته‌سازی تحلیل عددی استفاده شده است. از جمله مزایای این روش حل، سادگی روش، کاهش حجم محاسبات نسبت به سایر روش‌های عددی و قابلیت لحاظ شرایط مرزی مختلف است. در این پژوهش ابتدا هم‌گرایی و اعتبارسنجی تحلیل نسبت به نقاط شبکه بیان شده، سپس تأثیر مشخصات هسته ورق ساندویچی مانند ضریب تخلخل، ضخامت، ضریب اسکمپتون، و ضخامت کل ورق و شرایط تکیه‌گاهی مختلف روی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی بررسی شده است. به روز بودن تئوری استفاده شده در تحلیل ارتعاش آزاد ورق با هسته متخلخل مدرج تابعی از دیگر مزیت‌های اصلی این پژوهش نسبت به پژوهش‌های اخیر است.

واژه‌های کلیدی: ورق ساندویچی با هسته متخلخل مدرج تابعی اشباع شده، ارتعاش آزاد، تئوری بایوت، تئوری تغییر شکل برشی شبه‌سه‌بعدی، روش مربعات دیفرانسیلی.

Vibration Analysis of Thick Sandwich Plates with Saturated FG-Porous Core Using Quasi-3D Shear Deformation Theory

A. Zamani [1] and M. A. Rahgozar[2*]

1- Civil Engineering Department, Ashrafi Isfahani University, Isfahan
2- Department of Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering and Transportation, University of Isfahan, Isfahan

Abstract*: Free vibration analysis of a rectangular thick sandwich plate consisting of outer homogeneous layers with saturated nonhomogeneous Functionally Graded Porous (FGP) core has been conducted. Material property in this porous core could vary*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی:rahgozar@eng.ui.ac.ir

along the plate thickness according to Biot's stress theory and other related functions. Solution to this problem was based on Quasi-Three-Dimensional shear deformation theory, which results the governing differential equations and the boundary conditions of the plate model. The boundary conditions in the considered plate model were clamped-simple-simple-clamped supports, whereas in the previous studies generally Navier method is used in which simple supports is assumed for all sides of the plate. In the present study, in order to obtain our proposed numerical solution, the differential quadrature method is applied. Among advantages of this method are being simple and straightforward, having reduced computational effort compared to other numerical methods and being capable of accounting for plates with different boundary conditions. Convergence and validation of the results with respect to the grid points were first presented. The effect of different core properties such as porosity, thickness, Skempton's coefficient, total plate thickness, and different boundary conditions on FGP sandwich plate frequencies were investigated. Application of the latest theory for free vibration analysis of FGP sandwich plates is another main advantage of the presented method compared to other recent studies..

Keywords: ***Saturated functionally graded porous (FGP) sandwich plate, free vibration, Biot's theory, quasi-three-dimensional-shear deformation theory, differential quadrature method.***

فهرست علائم

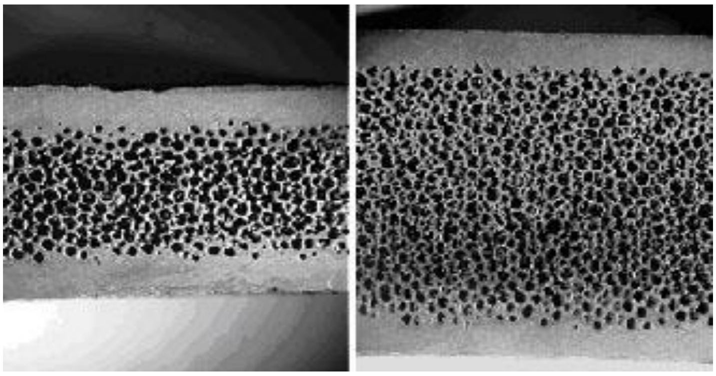
$[A^{(r)}]$	ماتریس ضرایب وزنی متناظر برای مشتق r ام
a	عرض ورق
B	ضریب اسکمپتون
b	طول ورق
$D_1 - D_{11}$	ضرایب سفتی ورق
E	مدول الاستیسیته
e_1	ضریب تخلخل
f	تابع تغییرات خواص مکانیکی در هسته‌ی متخلخل اشباع شده‌ی ورق
G	مدول برشی
h	ضخامت کل ورق
h_c	ضخامت هسته‌ی متخلخل اشباع شده‌ی ورق
h_f	ضخامت رویه‌های همگن همسانگرد ورق
$I_0 - I_5$	ضرایب لختی ورق
$[K]$	ماتریس سختی
M	تحت نام ضریب بایوت
M_{ij}	منتجه‌های تنش
$[M]$	ماتریس جرم
N_x و N_y	تعداد نقاط شبکه در راستاهای x و y در حل به روش مربعات دیفرانسیلی
n_x و n_y	مؤلفه‌های بردار یکه‌ی عمود بر لبه‌های ورق در راستاهای x و y
P_{zz}	منتجه‌ی تنش
p	فشار سیال داخل حفره‌ها
Q_{ij}	منتجه‌های تنش
q	نیروی خارجی عرضی وارد بر سطح ورق
S	سطح ورق
S_{ij}	منتجه‌های تنش
T	انرژی جنبشی ورق
U	انرژی پتانسیل کرنشی ورق

u_1، u_2 و u_3	جابجایی راستاهای x، y و z
u	جابجایی سطح میانی ورق در راستای x
$\{u\}$	بردار جابجایی کل
V	حجم ورق
v	جابجایی سطح میانی ورق در راستای y
W_{ext}	کار انجام شده توسط نیروهای خارجی
w	جابجایی سطح میانی ورق در راستای z
علائم یونانی	
α	ضریب تنش مؤثر بایوت
γ_{ij}	مولفه های برشی تانسور کرنش
δ	عملگر تغییرات دیفرانسیلی
ε_{ij}	مولفه‌های عمودی تانسور کرنش
ζ	تغییرات در محتویات حجم سیال داخل حفره‌ها
λ_u	ضریب لامه ماده‌ی متخلخل زهکشی نشده
ν	نسبت پواسون
ν_u	نسبت پواسون ماده‌ی متخلخل
ρ	چگالی
σ_{ij}	تانسور تنش
ψ_x، ψ_y و ψ_z	توابع میدان جابجایی
Ω	فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ورق
ω	فرکانس‌های طبیعی ورق
زیرنویس ها و بالانویس‌ها	
0	خواص مکانیکی ماده‌ی متخلخل در حالت بدون تخلخل
b	نقاط مرزی
c	خواص هسته
d	نقاط میانی
f	خواص رویه‌ها

۱-مقدمه

کاربرد وسیع ورق در صنعت و نیز هندسه جالب توجه آن، باعث شده تا تلاش‌های بسیاری برای حل مسائل استاتیک و دینامیک ورق صورت پذیرد. برای مثال در مهندسی عمران، در ساخت پانل‌های مسطح انواع سازه‌های فولادی و بتنی، در صنایع هوافضا، برای ساخت هواپیما و موشک، در کشتی‌سازی، برای ساخت انواع زیردریایی به‌کار برده می‌شود. در مهندسی مکانیک، ورق‌ها به عنوان دیسک‌های چرخان در دستگاه‌های ترمز و قسمت‌هایی از کلاچ مشاهده می‌شوند. همچنین، به‌عنوان پانل‌های مسطح در بدنه ماشین‌ها وجود دارند. در مهندسی الکترونیک، به‌عنوان محفظه در بسیاری از تجهیزات الکتریکی و الکترونیکی مورداستفاده قرار می‌گیرند. ورق‌ها دارای شکل‌های گوناگون مستطیلی، دایروی، لوزی، مثلثی و ذوزنقه‌ای هستند [۱]. بسیاری از نیازهایی که در صنایعی مانند هوافضا، ساختمان، نفت و گاز وجود دارند نمی‌توانند با استفاده از مواد معمولی و ورق‌های متداول، برآورده شوند. مواد مرکب[۱] گزینه مناسبی جهت رفع این نیازها به شمار می‌آیند این مواد دسته‌ای از مواد پیشرفته هستند که در آنها از ترکیب مواد ساده به منظور ایجاد مواد جدیدی که خواص مکانیکی و فیزیکی برتری دارند، استفاده شده است [۲ و۳]. سازه‌های ساندویچی[۲] یکی از انواع گوناگون مواد مرکب هستند [۲ و ۴]. دلیل استفاده از سازه‌های ساندویچی در صنایع مختلف در دهه‌های اخیر، وجود نسبت استحکام به وزن بالا و سختی[۳] خمشی بسیار بالای این مواد پیشرفته است [۵]. ساختار این نوع سازه‌ها حداقل شامل سه لایه است که روی هم قرارگرفته‌اند. لایه‌های بیرونی به‌طورمعمول از سختی و چگالی بیشتری نسبت به لایه میانی برخوردار هستند [۶]. مهم‌ترین برتری سازه ساندویچی، نسبت سختی خمشی به وزن بالا در آن است. همین ویژگی است که باعث شده سازه‌های ساندویچی مقاومت کمانشی بیشتر و فرکانس طبیعی بزرگ‌تری را نسبت به سایر سازه‌ها دارا باشند. باوجود این ویژگی‌ها وجود مواردی همچون نحوه اتصال لایه‌ها و کنترل کیفیت آنها از معدود معایب سازه‌های ساندویچی به شمار می‌آیند [۲ و ۴]. کاربرد گسترده ورق‌ها در سازه‌های مهندسی و نیز استفاده اجتناب‌ناپذیر از این سازه سبک تحت شرایط و بارگذاری‌های مختلف، محققین را بر آن داشت تا موادی با ساختارهای متناسب با شرایط کارکرد را جایگزین مواد سنتی کنند. یکی از راه‌های کاهش جرم سازه‌ها که در سال‌های اخیر توجه محققین بسیاری را به خود مشغول کرده است، استفاده از مواد متخلخل است که نمونه‌ای از آنها در شکل (۱) نشان داده شده است [۷]. ماده متخلخل به ماده‌ای گفته می‌شود که شامل یک شبکه به هم پیوسته از خلل و فرج باشد که توسط آب یا سیال دیگر پرشده است [۸]. کلمه پروس[۴] از یک واژه یونانی به معنی گذرگاه گرفته‌شده است که بیانگر نقش این منافذ در مبادله بین سطح داخلی و خارجی جامد است که می‌تواند ماده را به داخل یا خارج سطح منتقل کند [۹]. مکانیک مواد متخلخل از مکانیک خاک سرچشمه می‌گیرد. این مواد، ویژگی‌هایی نظیر سبک بودن، چگالی کمتر نسبت به مواد معمولی، انعطاف‌پذیری، عایق گرما و صوت، سطح ویژه بزرگ، جاذب انرژی، بازه دمایی بزرگ و نفوذپذیری خوب دارند. مواد متخلخل در هوافضا، الکترونیک، مخابرات، انرژی اتمی، داروسازی، ذوب فلزات، خودرو، پتروشیمی و جداکننده سیال کاربرد دارند به همین جهت مورد علاقه طراحان سازه واقع شده‌اند [۸].

نکته دیگر که ذکر آن ضروری به نظر می‌رسد آن است که در سال‌های اخیر برخی از محققین با در نظر گرفتن اثر سیال موجود در داخل حفره‌های ماده‌ی متخلخل، مبحثی را تحت عنوان مواد متخلخل اشباع شده ارائه کرده و به بررسی رفتار سازه‌ها در این حالت پرداخته‌اند. در این حالت در کنار مشخصات هندسی سازه و درصد و چگونگی توزیع حفره‌ها، میزان تراکم‌پذیری سیال داخل حفره‌ها نیز بر روی رفتار سازه مورد بررسی تأثیر خواهد گذاشت [۷]. ملک‌زاده و همکاران (۲۰۰۵)، تئوری تصحیح شده و بهبود یافته مرتبه بالای صفحات ساندویچی را با اصلاح تئوری مرتبه بالای صفحات ساندویچی فراستیگ پیشنهاد کردند که در این تئوری، سهم



شکل ۱- یک ساختار ساندویچی با هسته‌ی متخلخل [۷]

نیروهای صفحه‌ای رویه‌های بالایی و پایینی ورق‌های ساندویچی و عامل استهلاک معادل ورق ساندویچی محاسبه‌شده و همچنین میرایی مساله نیز برای تحلیل ارتعاش مورد بررسی قرار گرفت [۱۰]. ژونگ و همکاران (۲۰۰۷)، حل دقیقی به‌منظور بررسی رفتار کمانش ورق‌های مستطیلی با لایه‌های متقارن و با الیاف متعامد و شرایط تکیه‌گاهی مفصلی در معرض بارهای درون صفحه با تغییرات خطی و در یک راستا بر اساس تئوری برشی مرتبه یک ارائه کردند [۱۱]. خورشیدی و همکاران (۲۰۱۳)، به بررسی ارتعاش آزاد ورق کامپوزیت مستطیلی در تماس با سیال محدود پرداختند. در این تحقیق، از تئوری‌های کلاسیک مرتبه یک تغییر شکل برشی و مرتبه سه تغییر شکل برشی استفاده شده است. بسامدهای طبیعی و مودهای لزج سیالی با استفاده از روش رایلی-ریتز و بر اساس کوچک‌سازی شاخص رایلی محاسبه شده است همچنین نسبت منظری، نسبت ضخامت، جهت‌گیری الیاف و تأثیر ویژگی‌های ماده‌ای لایه‌ها و ابعاد مخزن بر روی بسامدهای طبیعی، اندازه‌گیری و جزئیات آن گزارش شده است [۱۲]. ملک‌زاده (۲۰۰۹)، به بررسی ارتعاش یک ورق مدرج تابعی بر بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و روش حل عددی مربعات دیفرانسیلی پرداخت. در این تحقیق، تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد صفحات بر اساس دو پارامتر الاستیک ارائه شده است و فرمول‌ها بر اساس نظریه کششی سه بعدی است. در این تحقیق همگرایی سریع و دقت بسیار بالا و قابلیت اطمینان نتایج گزارش شده است [۱۳]. امامی حسین‌آبادی و همکاران (۲۰۱۵)، در پژوهشی به بررسی ارتعاش آزاد یک ورق مدرج تابعی بر بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی پرداختند که استفاده از این روش، منتج به یک دستگاه معادلات می‌شود که با حل مساله مقدار ویژه، شکل مودهای ورق و فرکانس‌های طبیعی حاصل می‌شود [۱۴]. پور مؤید و همکاران (۲۰۱۷)، در پژوهشی به بررسی تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش پانل ساندویچی استوانه‌ای ضخیم با هسته انعطاف‌پذیر با شرایط مرزی ساده با استفاده از تئوری مرتبه بالای بهبودیافته پرداختند. سادگی، جامعیت روش، و دقت بالای حل تحلیلی از مزیت‌های اصلی این مقاله نسبت به روش‌های دیگر است [۱۵]. نگویان و همکاران (۲۰۱۷)، خیز ورق را شامل دو بخش ناشی از خمش و خیز ناشی از برش در نظر گرفته و میدان جابجایی جدیدی را فرض کردند و این تئوری را تئوری تغییر شکل برشی شبه سه بعدی اصلاح شده نامیدند [۱۶]. با ابداع تئوری تغییر شکل برشی شبه سه‌بعدی ورق‌ها و استفاده از مواد متخلخل به‌صورت هدفمند در ورق‌های ساندویچی پژوهش‌هایی نیز در این زمینه‌ها انجام شده است:

تای و همکاران (۲۰۱۳)، با استفاده از یک تئوری سینوسی شبه سه‌بعدی ساده به تحلیل خمش صفحات مدرج تابعی با شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداختند. در این پژوهش، با تقسیم جابجایی عرضی به جابجایی خمشی و جابجایی برشی، تعداد

متغیرها و معادلات کاهش می‌یابد. معادلات این تحقیق در شرایط مرزی، با استفاده از اصل جابجایی‌های مجازی حل می‌شوند [۱۷]. شهسواری و همکاران (۲۰۱۸)، با استفاده از یک تئوری هایپربولیک جدید شبه سه‌بعدی، به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های مدرج تابعی بر بستر وینکلر پاسترناک و کر پرداختند. آنها در این پژوهش، جابجایی‌های عرضی را به جابجایی در راستای ضخامت، خمشی و برشی تقسیم کردند و سه الگوی تخلخل را با استفاده از روش حل گالرکین مورد بررسی قرار دادند [۱۸]. کانگ گائو و همکاران (۲۰۱۸)، به بررسی تشدید غیرخطی اولیه پوسته‌های استوانه‌ای متخلخل مدرج تابعی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه[5] پرداختند. آنها در این پژوهش، سه دسته از مواد متخلخل مدرج تابعی شامل توزیع متقارن، توزیع نامتقارن (توزیع نرم) و توزیع یکنواخت را بررسی کردند [۱۹]. زنکور (۲۰۱۸)، به بررسی پاسخ‌های خمشی مواد متخلخل مدرج تابعی تک لایه و ورق‌های ساندویچی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی شبه سه بعدی به روش حل ناویر پرداخت. در این پژوهش، هر دو کرنش نرمال و برشی مورد بررسی قرارگرفته و نیازی به ضریب تصحیح برشی نیست. همچنین در این تحقیق، نتایج عددی با مواد غیر متخلخل، مقایسه شد [۲۰]. گومار و همکاران (۲۰۱۹)، با استفاده از تئوری شبه سه بعدی جدید مرتبه پنج به بررسی رفتار استاتیکی صفحات مدرج تابعی تحت بار دینامیکی پرداختند. در این تئوری، مودهای تغییر شکل‌ها جابجایی‌های عرضی و محوری شامل توابع مرتبه چهار و مرتبه پنج جهت تخمین کرنش‌های محوری و برشی هستند. نتایج آنها نشان می‌دهند که این تئوری، برای آنالیز دقیق سازه‌ها و مواد مدرج تابعی در مقایسه با مدل‌های دیگر بسیار مفید است [۲۱].

امروزه افزایش استحکام و کاهش وزن سازه‌ها یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های طراحان و مهندسان است. این مهم می‌تواند از راه‌های گوناگونی حاصل شود که یکی از این راه‌ها استفاده از مواد مدرج متخلخل است. با توجه به مزایای ساختارهای متخلخل و استفاده روزافزون از آنها لازم است که تأثیر آنها در رفتار دینامیکی سازه‌ها و مقادیر فرکانس‌های طبیعی سازه ساخته شده از این مواد بررسی شود. مروری بر تحقیقات گذشته نشان می‌دهد که تاکنون تحلیل ارتعاش آزاد ورق ساندویچی با هسته متخلخل مدرج اشباع‌شده با مدل‌سازی به کمک تئوری شبه سه بعدی و استفاده از روش حل مربعات دیفرانسیلی، ارائه نشده است. با توجه به موارد ذکرشده در تحقیق حاضر به منظور حل مسئله و رسیدن به پاسخ، فرضیه‌های زیر در نظر گرفته می‌شوند:

۱-دامنه ارتعاش در مقایسه باضخامت ورق کوچک است (تحلیل ارتعاش خطی).

۲-بین لایه‌های ورق ساندویچی لغزشی رخ نمی‌دهد.

۳-تکیه‌گاه‌های ورق به شکل گیردار یا مفصلی خواهند بود.

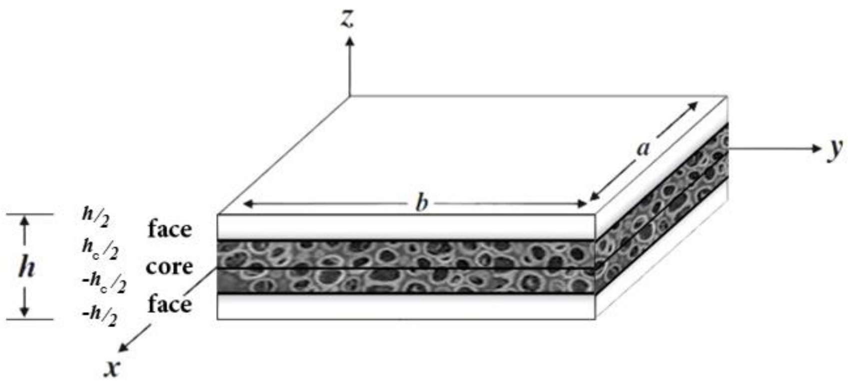
۲- استخراج معادلات حاکم

همان‌گونه که در شکل (۲) نشان داده‌شده است، هندسه مورد بررسی در این پژوهش یک ورق ساندویچی با هسته متخلخل و دو رویه است. ورق موردنظر شامل یک هسته ساخته شده از مواد متخلخل اشباع شده با ضخامت h_c و دولایه‌ی بیرونی همگن با ضخامت یکسان $h_f = 0.5(h - h_c)$ است.

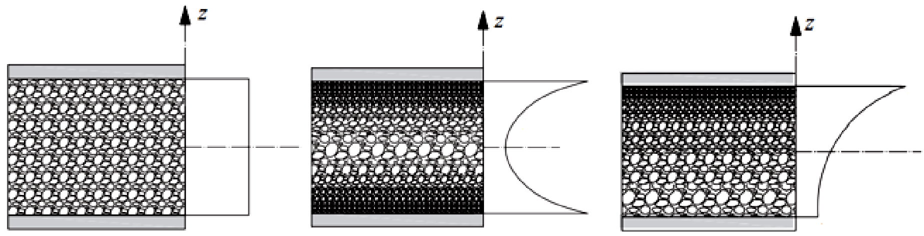
مواد متخلخل مدرج مورد استفاده در هسته ورق ساندویچی در تحقیق پیش‌رو دسته‌ای از مواد ناهمگن هستند که به دلیل وجود حفره در خود، استفاده از آنها منجر به کاهش چشم‌گیر وزن سازه می‌شود. توزیع حفره‌ها در این مواد می‌تواند بر اساس الگوهای مختلفی باشد. اما همان‌گونه که در شکل (۳) نیز نشان داده‌شده است، سه الگویی که بیشتر موردتوجه محققین قرارگرفته‌اند عبارتند از توزیع یکنواخت[6]، توزیع متقارن[7] و توزیع نامتقارن[8] [۲۲].

برای هسته متخلخل ناهمگن خواص مکانیکی ماده شامل مدول الاستیسیته (E)، مدول برشی (G) و چگالی (ρ) را می‌توان در سه توزیع مورد بررسی به شکل زیر بیان کرد و روابط مورد نظر به شکل کلی زیر بیان می‌شوند [۲۲]:

$$\frac{E(z)}{E_0} = \frac{G(z)}{G_0} = \frac{\rho(z)}{\rho_0} = f(z) \qquad (۱)$$



شکل ۲- ورق ساندویچی مورد بررسی با هسته‌ی متخلخل



شکل ۳- الگوهای مورد بررسی برای توزیع حفره‌های ماده‌ی متخلخل هسته‌ی ورق ساندویچی [۲۲]

که در این رابطه تابع بدون بعد f با توجه به نوع توزیع حفره‌ها به شکل زیر تعریف‌شده است:

$$f = 1 - e_1 \qquad \text{توزیع یکنواخت}$$

$$f = 1 - e_1 \cos\left(\frac{\pi z}{h_c}\right) \qquad \text{توزیع متقارن} \qquad (۲)$$

$$f = 1 - e_1 \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{h_c} + \frac{1}{2}\right)\right] \qquad \text{توزیع نامتقارن}$$

روابط فوق مربوط به لایه‌ای به مختصات z از مرکز ورق هستند. لازم به ذکر است این ورق مستطیلی در هر سه حالت توزیع‌های یکنواخت، متقارن و نامتقارن مورد بررسی قرار می‌گیرد که در این روابط زیرنویس صفر بیانگر مقدار خاصیت موردنظر در حالت بدون حفره $(e_1 = 0)$ است و ضریب بدون بعد e_1 تحت عنوان ضریب تخلخل[۹] شناخته می‌شود. همچنین معمولاً در مواد متخلخل نسبت پواسون (ν) ثابت در نظر گرفته می‌شود. و با توجه به همسانگرد بودن این دسته از مواد رابطه $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ در این دسته از مواد نیز برقرار است.

تحقیقاتی در مورد ارتباط تنش و کرنش در مواد متخلخل توسط بایوت انجام گرفت [۲۳]؛ او در تئوری خود دو فرض اساسی را در نظر گرفت [۲۴]:

۱) افزایش فشار درون حفره‌ای منجر به انبساط می‌شود.

۲) اعمال بار فشاری بر حفره‌ها منجر به افزایش فشار داخل آنها می‌شود.

بایوت بر اساس فرضیه‌های بالا نشان داد که در مواد متخلخل اشباع‌شده با سیال، قانون هوک به شکل زیر اصلاح می‌شود [۲۴ - ۲۶]:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda_u \varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \quad i,j = 1,2,3 \qquad (۳)$$

که در این رابطه p فشار سیال داخل حفره‌هاست، α تحت عنوان ضریب تنش مؤثر بایوت شناخته می‌شود و λ_u ضریب

لامه را برای ماده متخلخل زهکشی نشده[10] نشان می‌دهد. این ضریب‌ها از فرمول‌های رابطه (۴) محاسبه می‌شوند [۲۲]:

$$\lambda_u = \frac{2\nu_u}{1-2\nu_u} G \quad \text{(۴-الف)}$$

$$p = M\left(\xi - \alpha\varepsilon_{kk}\right) \quad \text{(۴-ب)}$$

$$\alpha = 1 - \frac{G}{G_0} = 1 - f \quad \text{(۴-پ)}$$

$$0 \le \alpha \le 1 \quad \text{(۴-ت)}$$

و در این رابطه ξ تغییرات در محتویات حجم سیال است. این ضریب وابسته به حجم سیال موجود در حفره بوده و برای حالتی که حفره‌ها کاملاً با سیال پرشده باشند (مواد متخلخل اشباع‌شده) مقدار آن برابر با صفر خواهد بود. همچنین ν_u نسبت پواسون برای ماده متخلخل بوده و M تحت نام ضریب بایوت شناخته می‌شود که از فرمول‌های رابطه (۵) محاسبه می‌شوند [۲۳]:

$$\begin{gathered} \nu_u = \frac{3\nu + \alpha B(1-2\nu)}{3-\alpha B(1-2\nu)} \\ M = \frac{2(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)} G \\ \nu £ \nu_u < 0.5 \end{gathered} \quad (۵)$$

که در این رابطه متغیر بدون بعد B به‌عنوان ضریب اسکمپتون[11] شناخته می‌شود. این ضریب میزان تراکم‌پذیری سیال موجود در داخل حفره‌ها را نشان می‌دهد به‌گونه‌ای که $B = 0$ بیان‌گر سیال کاملاً تراکم‌پذیر بوده و $B = 1$ نشان‌دهنده سیال تراکم‌ناپذیر است. با یک بررسی مختصر در رابطه‌های (۴) و (۵) می‌توان نشان داد که در حالت $B = 0$ به ترتیب روابط $\nu_u = \nu$، $\lambda_u = \lambda$، $M = 0$ و $P = 0$ حاصل‌شده و درنتیجه قانون بایوت بیان‌شده در رابطه (۳) برای مواد جامد حاوی سیال به رابطه مواد جامدکه درواقع همان قانون هوک است، ساده می‌شود.

همان‌گونه که اشاره شد برای مواد متخلخل اشباع‌شده رابطه $\xi = 0$ برقرار است و درنتیجه به کمک رابطه (۵) می‌توان فشار داخل حفره‌ها را به این شکل محاسبه کرد:

$$\begin{gathered} p = -M\alpha\varepsilon_{kk} \\ 0 < B < 1 \end{gathered} \quad (۶)$$

لازم به ذکر است کمیت‌هایی که برای هسته متخلخل محاسبه می‌شوند بایستی برای رویه‌های همگن بدون تخلخل ($e_1 = 0 , B = 0$) نیز نشان داده شود:

$$\nu_u = \nu \quad M = 0 \quad \lambda_u = \frac{2\nu_f}{1-2\nu_f} G_f \quad (۷)$$

درنتیجه:

$$\lambda_u + M\alpha^2 = \frac{2\nu_f}{1-2\nu_f} G_f \quad (۸)$$

زیرنویس f مربوط به پارامترهای رویه‌های بیرونی ورق است. در این پژوهش با استفاده از مدل تغییر شکل برشی شبه سه‌بعدی و با صرف نظر کردن از جابجایی‌های داخل صفحه‌ای u و v در مقایسه با جابجایی‌های عرضی، میدان‌های جابجایی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند [۲۰]:

$$\begin{gathered} u_1(x,y,z) = -z\frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\psi_x(x,y) \\ u_2(x,y,z) = -z\frac{\partial w}{\partial y} + f(z)\psi_y(x,y) \\ u_3(x,y,z) = w(x,y) + g(z)\psi_z(x,y) \end{gathered} \quad (۹)$$

که در این رابطه u_1، u_2 و u_3 به ترتیب جابجایی راستاهای x، y و z را در نقاط اصلی بیان می‌کند. u، v و w جابجایی در صفحه میانی هستند. ψ_x و ψ_y به ترتیب بیان‌گر چرخش حول محورهای x و y هستند u، v، w، ψ_x، ψ_y و ψ_z همگی توابعی از x و y هستند. در این پژوهش با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی شبه سه‌بعدی جدید، تقریب جدیدی از $f(z)$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. وجود مشتق تابع $f(z)$ به‌صورت ضریب ψ_z در معادله سوم نشان‌دهنده متفاوت بودن پاسخ در جهت Z است. $\psi_z \neq 0$ نیز به‌عنوان متغیر ناشناخته وابسته، در مقایسه با تئوری‌های دیگر در نظر گرفته می‌شود. $g(z) = \frac{df(z)}{dz}$ نیز نشان‌دهنده مشتق تابع $f(z)$ نسبت به متغیر Z است [۲۰]:

$$f(z) = \frac{zh^2}{5h^2 + 4z^2} - \frac{4z^3}{27h^2} \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (۱۰)$$

روابط کرنش بر اساس مؤلفه‌های میدان جابجایی، با جای‌گذاری میدان جابجایی (رابطه ۹) در رابطه کرنش میدان جابجایی و با مشتق‌گیری و ساده‌سازی نتیجه می‌شود، که شامل شش مؤلفه غیر صفر از کرنش است و به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_1}{\partial x}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \tag{۱۱}$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_2}{\partial y}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+f\frac{\partial \psi_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_3}{\partial z}=\frac{dg}{dz}\psi_z$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-z\frac{\partial w}{\partial x}+f\psi_x\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-z\frac{\partial w}{\partial y}+f\psi_y\right)$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial u_3}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(-z\frac{\partial w}{\partial x}+f\psi_x\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(w+g\psi_z\right)$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial u_3}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(-z\frac{\partial w}{\partial y}+f\psi_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(w+g\psi_z\right)$$

در ادامه حل مسئله با جای‌گذاری رابطه فشار داخل حفره‌ای (رابطه ۶) در رابطه تنش بایوت (رابطه ۳) معادله‌ای به شکل زیر حاصل خواهد شد:

$$\sigma_{ij}=2G\varepsilon_{ij}+\left(\lambda_u+M\alpha^2\right)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{۱۲}$$

که روابط تنش با گسترش رابطه (۱۲) به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=2G\varepsilon_{xx}+\left(\lambda_u+M\alpha^2\right)\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right)\\
\sigma_{yy}&=2G\varepsilon_{yy}+\left(\lambda_u+M\alpha^2\right)\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right)\\
\sigma_{zz}&=2G\varepsilon_{zz}+\left(\lambda_u+M\alpha^2\right)\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right)\\
\sigma_{xy}&=2G\varepsilon_{xy}\\
\sigma_{xz}&=2G\varepsilon_{xz}\\
\sigma_{yz}&=2G\varepsilon_{yz}
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

با جای‌گذاری مؤلفه‌های کرنش (رابطه ۱۱) در رابطه تنش (رابطه ۱۳)، رابطه زیر حاصل می‌شود که نشان‌دهنده مؤلفه‌های تنش در راستاهای متفاوت است:

$$\sigma_{xx}=2G\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right)+ \tag{۱۴}$$
$$\left(\lambda_u+M\alpha^2\right)\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+f\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+f\frac{\partial \psi_y}{\partial y}+\frac{dg}{dz}\psi_z\right)$$

ادامه (۱۴)

$$\sigma_{yy}=2G\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+f\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right)+$$
$$\left(\lambda_u+M\alpha^2\right)\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+f\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+f\frac{\partial \psi_y}{\partial y}+\frac{dg}{dz}\psi_z\right)$$

$$\sigma_{zz}=2G\frac{dg}{dz}\psi_z+$$
$$\left(\lambda_u+M\alpha^2\right)\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+f\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+f\frac{\partial \psi_y}{\partial y}+\frac{dg}{dz}\psi_z\right)$$

$$\sigma_{xy}=G\left[f\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right)-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]$$

$$\sigma_{xz}=Gg\left(\psi_x+\frac{\partial \psi_z}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yz}=Gg\left(\psi_y+\frac{\partial \psi_z}{\partial y}\right)$$

برای استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی بر ارتعاش آزاد ورق از اصل همیلتون[۱۲] که حالت جامع اصل حداقل انرژی پتانسیل[۱۳] است، به شکل زیر استفاده خواهد شد:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T-\delta U+\delta W_{ext}\right)dt=0 \tag{۱۵}$$

که در رابطه فوق δ عملگر تغییرات دیفرانسیلی بوده، U انرژی پتانسیل کرنشی کل، T انرژی جنبشی، W_{ext} کار انجام شده توسط نیروی خارجی بر واحد سطح (q) هستند و t_1 و t_2 نیز دو زمان کاملاً دلخواه هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$U=\frac{1}{2}\iiint_V\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}+\sigma_{xy}\gamma_{xy}+\sigma_{xz}\gamma_{xz}+\sigma_{yz}\gamma_{yz}\right)dV \tag{۱۶}$$

$$T=\frac{1}{2}\iiint_V\rho\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right]dV \tag{۱۷}$$

$$W_{ext}=\iint_S qwdS \tag{۱۸}$$

که در این رابطه‌ها S نشان‌دهنده سطح ورق و V نمایانگر حجم آن هستند. با توجه به بررسی ارتعاش آزاد ورق در این مقاله و عدم وجود نیروی خارجی، کار نیروهای خارجی برابر صفر است.

رابطه همیلتون با استفاده از رابطه (۱۹) به شکل زیر که انتگرال

را از حالت حجمی به حالت سطح تبدیل می‌کند، نیز قابل‌بیان است:

$$\iiint_V (\ )dV = \iint_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\ )dzdS \tag{۱۹-الف}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\ )dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h_c}{2}} (\ )dz + \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (\ )dz + \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h}{2}} (\ )dz \tag{۱۹-ب}$$

که در این رابطه h، نشان‌دهنده ضخامت کل ورق و h_c، نمایان‌گر ضخامت هسته متخلخل است.

با جای‌گذاری مؤلفه‌های تنش (رابطه ۱۴) در رابطه تغییر حالت انتگرال (رابطه ۱۹) و نیز در رابطه (۱۶)، رابطه (۲۰) به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\delta U = \iint_S \left\{ \begin{aligned} &-M_{xx}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + S_{xx}\frac{\partial \delta\psi_x}{\partial x} - M_{yy}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \\ &S_{yy}\frac{\partial \delta\psi_y}{\partial y} + P_{zz}\delta\psi_z + S_{xy}\frac{\partial \delta\psi_x}{\partial y} + \\ &S_{xy}\frac{\partial \delta\psi_y}{\partial x} - 2M_{xy}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + Q_{xz}\delta\psi_x + \\ &Q_{xz}\frac{\partial \delta\psi_z}{\partial x} + Q_{yz}\delta\psi_y + Q_{yz}\frac{\partial \delta\psi_z}{\partial y} \end{aligned} \right\} dS \tag{۲۰}$$

با استخراج از رابطه (۲۰) منتجه‌های تنش Q_{ij}، P_{zz}، S_{ij} و M_{ij} به به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z dz, \qquad i,j = x,y \\ S_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} f(z) dz \qquad i,j = x,y \\ Q_{iz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{iz} g(z) dz \qquad i,j = x,y \\ P_{zz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zz} \frac{dg(z)}{dz} dz \qquad i,j = x,y \end{aligned} \tag{۲۱}$$

با جایگذاری مؤلفه‌های تنش (رابطه ۱۴)، در رابطه منتجه‌های تنش (رابطه ۲۱) و با گسترش روابط، معادلات زیر که شامل منتجه‌های Q_{ij}، P_{zz} و M_{ij} بر اساس ضرایب D هستند به این شکل بیان می‌شوند:

در این معادله‌ها M_{ij} لنگر خمشی بر واحد طول ورق و Q_{ij} نیروی برشی بر واحد طول ورق هستند. لازم به ذکر است متغیرهای P_{zz} و S_{ij} تعبیر فیزیکی خاصی ندارند.

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -(D_1+D_3)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_2+D_4)\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - D_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_4\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_5\psi_z \\ M_{yy} &= -(D_1+D_3)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (D_2+D_4)\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_4\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_5\psi_z \\ M_{xy} &= 0.5D_2\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) - D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ S_{xx} &= -(D_2+D_4)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_6+D_7)\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - D_4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_7\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_8\psi_z \\ S_{yy} &= -(D_2+D_4)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (D_6+D_7)\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - D_4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_7\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_8\psi_z \\ S_{xy} &= 0.5D_6\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) - D_2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ P_{zz} &= (D_9+D_{10})\psi_z - D_5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_5\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_8\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_8\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ Q_{xz} &= D_{11}\left(\psi_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial x}\right) \\ Q_{yz} &= D_{11}\left(\psi_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{۲۲}$$

که در این رابطه، ضرایب جدید D با زیرنویس‌های مختلف حاصل می‌شوند که تعریف آن‌ها ذیل رابطه (۲۳) آمده است.

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Gz^2 dz \\
D_2 &= 2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Gzf dz \\
D_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda_u + M\alpha^2) z^2 dz \\
D_4 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda_u + M\alpha^2) zf dz \\
D_5 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[(\lambda_u + M\alpha^2) z \frac{dg}{dz} \right] dz \\
D_6 &= 2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Gf^2 dz \\
D_7 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda_u + M\alpha^2) f^2 dz \\
D_8 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda_u + M\alpha^2) f \frac{dg}{dz} dz \\
D_9 &= 2\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G\left(\frac{dg}{dz}\right)^2 dz \\
D_{10} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\lambda_u + M\alpha^2)\left(\frac{dg}{dz}\right)^2 dz \\
D_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Gg^2 dz
\end{aligned}
\qquad (۲۳)
$$

همان‌طور که گفته شد ضریب‌های D از بسط منتجه‌های تنش حاصل می‌شوند که ضریب D_1 درواقع مشابه ضریب D در رابطه ورق کرشهف است و تعداد ضرایب مذکور ۱۱ عدد است. شاخص بعدی در به دست آوردن معادله حاکم بر ورق، انرژی جنبشی است که به منظور محاسبه آن و جای‌گذاری در رابطه همیلتون، رابطه میدان جابجایی تئوری شبه سه‌بعدی (رابطه ۹) را در رابطه کلی انرژی جنبشی (رابطه ۲۷) جایگذاری، سپس مولفه‌های لختی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم که مولفه I_0 جرم در واحد سطح (با فرض همگن بودن ρh)، و I_2 لختی دورانی بر واحد سطح هستند. البته مولفه‌های لختی I_1، I_3، I_4 و I_5 تعبیر فیزیکی ندارند:

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz & \qquad I_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho f^2 dz \\
I_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz & \qquad I_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho zf dz \\
I_4 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho g^2 dz & \qquad I_5 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho g dz
\end{aligned}
\qquad (۲۴)
$$

و رابطه انرژی جنبشی بر حسب مولفه‌های لختی به منظور جای‌گذاری در رابطه هامیلتون به شکل زیر بیان می‌شود:

$$
\delta T = \iint_S \left[
\begin{aligned}
& I_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial t \partial x} + I_1 \frac{\partial \psi_x}{\partial t}\frac{\partial \delta\psi_x}{\partial t} - I_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\frac{\partial \delta\psi_x}{\partial t} - \\
& I_3 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial t \partial x}\frac{\partial \psi_x}{\partial t} + I_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial t \partial y} + I_1 \frac{\partial \psi_y}{\partial t}\frac{\partial \delta\psi_y}{\partial t} - \\
& I_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y}\frac{\partial \delta\psi_y}{\partial t} - I_3 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial t \partial y}\frac{\partial \psi_y}{\partial t} + I_0 \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t} + \\
& I_4 \frac{\partial \psi_z}{\partial t}\frac{\partial \delta\psi_z}{\partial t} + I_5 \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta\psi_z}{\partial t} + I_5 \frac{\partial \delta w}{\partial t}\frac{\partial \psi_z}{\partial t}
\end{aligned}
\right] dS \qquad (۲۵)
$$

با جای‌گذاری رابطه تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی (۲۰) و رابطه تغییرات انرژی جنبشی (۲۵) در رابطه همیلتون (۱۵)، معادلات حاکم به شکل رابطه (۲۶) بیان می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}-\\
&I_2\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2}+I_3\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial t^2\partial x}-I_2\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial y^2}\\
&+I_3\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial t^2\partial y}+I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_5\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}-q=0\\
&\frac{\partial S_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial y}-Q_{xz}-I_1\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}+I_3\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}=0\\
&\frac{\partial S_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}-Q_{yz}-I_1\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}+I_3\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial y}=0\\
&P_{zz}-\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x}-\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y}+I_4\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}+I_5\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0
\end{aligned}
\qquad (۲۶)
$$

همچنین با جای‌گذاری رابطه تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی (۲۰) و رابطه تغییرات انرژی جنبشی (۲۵) در رابطه همیلتون (۱۵)، معادلات شرایط مرزی در حالت کلی، به شکل رابطه (۲۷) بیان می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}
\left(-I_2\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}+I_3\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}-\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)n_x+\\
\left(-I_2\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial y}+I_3\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}-\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)n_y
\end{bmatrix}\delta w=0\\
&\left(M_{xx}n_x+M_{xy}n_y\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0\\
&\left(M_{yy}n_y+M_{xy}n_x\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0\\
&\left(S_{xx}n_x+S_{xy}n_y\right)\delta\psi_x=0\\
&\left(S_{yy}n_y+S_{xy}n_x\right)\delta\psi_y=0\\
&\left(Q_{xz}n_x+Q_{yz}n_y\right)\delta\psi_z=0
\end{aligned}
\qquad (۲۷)
$$

که در این رابطه n_x و n_y مؤلفه‌های بردار یکه‌ی عمود بر سطح در راستاهای x و y می‌باشند.

به‌منظور حل مساله با استفاده از روش جداسازی متغیرها، رابطه بردار جابجایی برای مساله ارتعاش (۲۷) را به شکل زیر در نظر می‌گیریم که در این رابطه ω فرکانس طبیعی نوسانات ورق موردنظر بوده و $i=\sqrt{-1}$ است [۲۷ و ۲۸].

$$
\begin{Bmatrix} w(x,y,t)\\ \psi_x(x,y,t)\\ \psi_y(x,y,t)\\ \psi_z(x,y,t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} W(x,y)\\ X(x,y)\\ Y(x,y)\\ Z(x,y)\end{Bmatrix}e^{i\omega t}
\qquad (۲۸)
$$

و در ادامه به منظور حل مساله ارتعاش، با جای‌گذاری رابطه معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر ورق (۲۶) در رابطه (۲۸)، معادله‌های نهایی ورق (هسته متخلخل و رویه‌ها)، پس از ویرایش نهایی و مرتب‌سازی به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&-\left(D_2+D_4\right)\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}-\left(D_2+D_4\right)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}+\left(D_6+D_7\right)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\\
&0.5D_6\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}-D_{11}X+\left(0.5D_6+D_7\right)\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}+\left(D_8-D_{11}\right)\frac{\partial Z}{\partial x}\\
&=\omega^2\left(I_3\frac{\partial W}{\partial x}-I_1X\right)\\
&-\left(D_2+D_4\right)\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}-\left(D_2+D_4\right)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}+\left(0.5D_6+D_7\right)\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}+\\
&0.5D_6\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\left(D_6+D_7\right)\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}-D_{11}Y+\left(D_8-D_{11}\right)\frac{\partial Z}{\partial y}\\
&=\omega^2\left(I_3\frac{\partial W}{\partial y}-I_1Y\right)\\
&-D_5\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-D_5\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\left(D_8-D_{11}\right)\frac{\partial X}{\partial x}+\\
&\left(D_8-D_{11}\right)\frac{\partial Y}{\partial y}-D_{11}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}-D_{11}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\\
&+\left(D_9+D_{10}\right)Z=\omega^2\left(I_5W+I_4Z\right)
\end{aligned}
\qquad (۲۹)
$$

و به روش مشابه، شرایط مرزی مورد بحث مساله نیز، به شکل زیر قابل بیان هستند:

در لبه‌های $x=0$ و $x=a$

تکیه‌گاه گیردار[۱۴] (C):

$$
W=0\quad \frac{\partial W}{\partial x}=0\quad X=0\quad Y=0\quad Z=0 \qquad (۳۰)
$$

تکیه‌گاه ساده غلتکی[۱۵] (S):

$$
W=0\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0\quad \frac{\partial X}{\partial x}=0\quad Y=0\quad Z=0 \qquad (۳۱)
$$

در لبه‌های $\begin{matrix} y=0 \\ y=b \end{matrix}$

تکیه‌گاه گیردار (C):

$$W=0 \quad \frac{\partial W}{\partial y}=0 \quad X=0 \quad Y=0 \quad Z=0 \tag{۳۲}$$

تکیه‌گاه ساده غلتکی (S):

$$W=0 \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0 \quad X=0 \quad \frac{\partial Y}{\partial y}=0 \quad Z=0 \tag{۳۳}$$

۳-حل عددی معادلات حاکم به روش مربعات دیفرانسیلی [۲۷]

روش مربعات دیفرانسیلی برای اولین بار توسط بلمن و همکارانش (۱۹۷۱ و ۱۹۷۲) معرفی شد و پس‌ازآن توسط سایر محققین به‌ویژه مهندسین مکانیک گسترش یافت و برای حل مسائل گوناگون استفاده شد [۲۷، ۲۹ و ۳۰].

روش مربعات دیفرانسیلی هرچند در مقابل روش‌هایی همچون اجزای محدود، ریتز و گالرکین ضعیف‌تر است اما برای هندسه‌های ساده که هم به این روش و هم روش‌های دیگر قابل حل هستند روش مربعات دیفرانسیلی حجم محاسبات کم‌تری دارد [۳۱] و به همین دلیل در این مقاله از این روش استفاده می‌شود.

چنانچه مقادیر تابع دوبعدی $F=F(x,y)$ در یک ناحیه مستطیلی متشکل از $N_x \times N_y$ نقطه به شکل ماتریسی زیر در نظر گرفته شود؛

$$F_{ij}=f\left(x_i,y_j\right) \quad i=1,2,\ldots,N_x \quad j=1,2,\ldots,N_y \tag{۳۴}$$

آنگاه مشتقات تابع در این شبکه از نقاط به شکل زیر تخمین زده می‌شود [۳۲]:

لازم به ذکر است که معمولاً تعداد نقاط در هر دو راستا با یکدیگر برابر در نظر گرفته می‌شوند $(N_x=N_y)$ اما در حالت کلی می‌توانند با یکدیگر برابر نباشند.

$$\left[\frac{\partial^r F}{\partial x^r}\right]=\left[A^{(r)}\right]\left[F\right] \tag{۳۵}$$
$$\left[\frac{\partial^s F}{\partial y^s}\right]=\left[F\right]\left[A^{(s)}\right]^T$$
$$\left[\frac{\partial^{r+s} F}{\partial x^r \partial y^s}\right]=\left[A^{(r)}\right]\left[F\right]\left[A^{(s)}\right]^T$$

مشتق اول تابع در این نقاط را می‌توان به شکل زیر تخمین زد:

$$\left\{\frac{df}{dx}\right\}_{N\times1}=\left[A^{(1)}\right]_{N\times N}\left\{f\right\}_{N\times1} \tag{۳۶}$$

که در این رابطه $[A^{(1)}]$ ماتریس ضرایب وزنی متناظر برای مشتق اول است که به شکل زیر تعریف‌شده است [۳۱]:

$$A_{ij}^{(1)}=\begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{N}\left(x_i-x_k\right)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\left(x_j-x_k\right)} & i,j=1,2,3,\ldots,N; i\neq j \\ \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\dfrac{1}{x_i-x_k} & i=j=1,2,3,\ldots,N \end{cases} \tag{۳۷}$$

برای تخمین و محاسبه مشتق rام (مرتبه بالاتر) می‌توان رابطه کلی زیر را در نظر گرفت:

$$\left\{\frac{d^r f}{dx^r}\right\}=\left[A^{(r)}\right]\left\{f\right\} \quad r=1,2,\ldots,N-1 \tag{۳۸}$$

که در این رابطه

$$\left[A^{(r)}\right]=\left[A^{(1)}\right]\left[A^{(r-1)}\right] \qquad r=2,3,\ldots,N-1 \tag{۳۹}$$

پس از معرفی روش مربعات دیفرانسیلی در دو حالت یک‌بعدی و دوبعدی در بخش‌های قبلی، در این قسمت معادلات حاکم برای شرایط مرزی مختلف حل خواهند شد. بر اساس توضیحات مربوط به ماتریس‌های $[K]$ و $[M]$ در پیوست ۱ و با استفاده از روش بیان شده، می‌توان رابطه حاکم (۲۹) را به شکل ماتریسی زیر که یک مساله مقدار ویژه است بیان کرد:

$$[K]\{u\}=\omega^2[M]\{u\} \tag{۴۰}$$

همچنین در این رابطه $[K]$ و $[M]$ ماتریس‌های متقارنی هستند که به ترتیب تحت عنوان ماتریس سختی و ماتریس جرم شناخته می شوند.

شرایط مرزی (۳۰) تا (۳۳) را نیز می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$[T]\{u\}=\{0\} \tag{۴۱}$$

به‌منظور محاسبه فرکانس‌های طبیعی ورق و شکل مودهای

متناظر لازم است معادلات جبری (۴۰) و (۴۱) که به ترتیب بیان‌گر معادلات حاکم و شرایط مرزی هستند به شکل هم‌زمان حل شوند. حل هم‌زمان این معادلات جبری منجر به ازدیاد تعداد معادلات نسبت به تعداد مجهولات می‌شود. به‌منظور حل این مشکل می‌توان از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته استفاده کرد [۳۳]. در این روش ابتدا نقاط حل مساله به دو دسته‌ی نقاط مرزی[16] (با زیرنویس b) و نقاط میانی[17] (با زیرنویس d) تقسیم‌بندی می‌شوند به‌طوری‌که تعداد نقاط مرزی در هر یک از مرزها با تعداد شرایط مرزی بر روی آن لبه برابر است. با صرف‌نظر کردن از ارضای معادلات در نقاط مرزی و جایگزین کردن آن معادلات با معادلات شرایط مرزی تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر خواهد شد. لازم به ذکر است که به دلیل آنکه در توزیع چبیشف-گاوس-لوباتو تراکم نقاط در مرزها بسیار بالا است، صرف‌نظر کردن از ارضای معادلات حاکم در برخی از نقاط مرزی خطای چندانی ایجاد نمی‌کند [۲۷].

با توجه به تعداد شرایط مرزی بر روی هر لبه از ورق (روابط (۳۰) تا (۳۳) مشاهده شود)، لازم است از هر سمت برای هر یک از متغیرهای X، Y و Z یک لبه و برای متغیر W دو لبه به‌عنوان نقاط مرزی انتخاب شود [۲۷]. با حذف معادله حاکم در نقاط مرزی می‌توان رابطه (۴۰) را به شکل زیر بیان کرد:

$$\left[\bar{K}\right]\{u\}=\omega^2\left[\bar{M}\right]\{u\} \tag{۴۲}$$

با تفکیک ستون‌هایی متناظر با نقاط مرزی (با زیرنویس b) و میانی (با زیرنویس d) در روابط (۴۲) و (۴۱) می‌توان این روابط را به شکل زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}&\left[\bar{K}\right]_b\{u\}_b+\left[\bar{K}\right]_d\{u\}_d=\\&\omega^2\left(\left[\bar{M}\right]_b\{u\}_b+\left[\bar{M}\right]_d\{u\}_d\right)\end{aligned} \tag{۴۳-الف}$$

$$\left[T\right]_b\{u\}_b+\left[T\right]_d\{u\}_d=\{0\} \tag{۴۳-ب}$$

با استفاده از رابطه (۴۳-ب) می‌توان رابطه زیر را بین جابجایی در نقاط مرزی و میانی بیان کرد:

$$\{u\}_b=[p]\{u\}_d \tag{۴۴}$$

که در این رابطه

$$[p]=-\left[T\right]_b^{-1}\left[T\right]_d \tag{۴۵}$$

با جای‌گذاری رابطه (۴۴) در رابطه (۴۳-الف) می‌توان رابطه زیر را بیان کرد:

$$\left[K^*\right]\{u\}_d=\omega^2\left[M^*\right]\{u\}_d \tag{۴۶}$$

که در این رابطه

$$\begin{aligned}&\left[K^*\right]=\left[\bar{K}\right]_d+\left[\bar{K}\right]_b[p]\\&\left[M^*\right]=\left[\bar{M}\right]_d+\left[\bar{M}\right]_b[p]\end{aligned} \tag{۴۷}$$

با حل مساله مقدار ویژه (۴۶) فرکانس‌های طبیعی به‌عنوان مقادیر ویژه و شکل مودهای متناظر به‌عنوان بردارهای ویژه به‌دست می‌آیند. لازم به ذکر است که بردارهای ویژه‌ی به‌دست‌آمده از رابطه (۴۶) جابجایی در هر شکل مودها را تنها در نقاط میانی نشان می‌دهند و با استفاده از رابطه (۴۴) مقادیر متناظر جابجایی در نقاط مرزی نیز به‌دست می‌آیند و از این طریق شکل مودها تکمیل می‌شوند. همچنین متذکر می‌شود با توجه به حجم بالای محاسبات ریاضی معادلات فوق با کدنویسی در نرم‌افزار متلب حل شده‌اند.

۴- بحث و بررسی نتایج عددی

در ارائه نتایج عددی به عنوان مثالی از ورق‌های ساندویچی، یک ورق شامل هسته متخلخل مدرج اشباع‌شده از جنس مرمر تنسی[18] و رویه‌ها از جنس فولاد انتخاب شده است که خواص مکانیکی موردنیاز این مواد در جدول ۱ ارائه شده‌اند. شرایط مرزی به شکل گیردار بر روی لبه‌های $x=0$، $y=b$ و ساده بر روی لبه‌های $x=a$، $y=0$ در نظر گرفته شده‌اند که به شکل clamped (CSSC) نشان داده می‌شود. مشخصات ورق موردنظر نیز به شکل زیر است:

$$h/a=0/1,\ h_c/h=0/6, e_1=0/5,\ b/a=2,$$

$$B=0/5$$

جهت مقایسه نتایج تحلیل ورق مورد نظر با نتایج مقالات مشابه اخیر و به‌منظور بررسی پارامتری و همگرایی جواب‌ها، فرکانس‌های طبیعی ورق در حالت بدون بعد به شکل زیر بیان می‌شوند:

جدول ۱- خواص مکانیکی مواد [۲۵].

جنس ماده	E(GPa)	ν	$\rho\left(kg/m^3\right)$
مرمر تنسی	۶۰	۰/۲۵	۲۷۰۰
فولاد	۲۰۰	۰/۳۳	۷۸۵۰

$$\Omega = \omega a\sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \qquad (۴۸)$$

ابتدا هم‌گرایی تحلیل عددی ارائه‌شده بررسی خواهد شد و پس از آن از طریق مقایسه نتایج با نتایج گزارش‌شده در سایر مراجع صحت تحلیل ارائه‌شده نیز نشان داده خواهد شد. درنهایت به مطالعه و بررسی تأثیر مشخصات ورق بر فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی آن پرداخته خواهد شد.

در هر تحلیل عددی لازم است هم‌گرایی روند حل مساله بررسی گردد. همان‌گونه که پیش‌تر نیز گفته شد درروش مربعات دیفرانسیلی دامنه حل مسئله به N نقطه تقسیم‌بندی می‌شود، به‌طوری‌که با افزایش مقدار N دقت تحلیل افزایش خواهد یافت. به‌منظور بررسی این مسئله ابتدا یک ورق با مشخصات مذکور در نظر گرفته می‌شود.

به‌منظور تحلیل همگرایی، تأثیر تعداد نقاط مش‌بندی مدل بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق موردبررسی قرار گرفت. روند حل به این صورت است که تعداد این نقاط (N_x و N_y)، از عدد ۷ شروع، و به ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹ و ۲۱ افزایش داده شد سپس فرکانس اول تا چهارم برای هر سه توزیع یکنواخت، متقارن و نامتقارن به‌دست آمد، و ملاحظه شد که با افزایش تعداد نقاط، از یک تعداد به بعد، پاسخ‌ها دارای تغییرات زیادی نیستند و درواقع به یک هم‌گرایی قابل قبول میل می‌کنند. بنابراین در تحقیق حاضر و براساس معیار خطای (همگرائی) یک درصد و توزیع مش‌بندی کسینوسی موسوم به چبیشف-گوس-لوباتو، تعداد نقاط مش بندی $N_x = N_y = ۱۵$ در نظر گرفته شد. در جدول (۲) تأثیر تعداد نقاط بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق، مورد بررسی قرار داده شده است. همچنین شکل (۴) نتایج تحلیل هم‌گرایی برای چهار مود اول ورق تحت شرایط مرزی CSSC را در توزیع متقارن حفره‌ها ارائه می‌دهد.

نتایج جدول (۲) و نمودارهای شکل ۴ نشان می‌دهند که در حالت متقارن تحلیل عددی ارائه شده همگرا بوده و از نرخ هم‌گرایی بالایی برخوردار است. برقراری شرایط مرزی در این شکل مودهای توزیع متقارن نیز گواهی بر هم‌گرایی و دقت تحلیل عددی ارائه شده هستند. برای حالات یکنواخت و غیرمتقارن هم‌شکل مودها تقریباً به همین صورت است. لازم به ذکر است سیستم ورق مورد تحلیل در این پژوهش یک سیستم پیوسته و دارای بی‌نهایت درجه آزادی و فرکانس است، که در شکل (۴)، چهار فرکانس اول گزارش شده‌اند.

به‌منظور بررسی صحت نتایج به‌دست آمده (اعتبارسنجی)، یک ورق مربعی (b=a) تک لایه همگن (بدون تخلخل) با تکیه‌گاه‌های ساده (SSSS) با مشخصات $(\nu = ۰/۳)$ و $(h/a) = ۰/۱$ در نظر گرفته شده است. با تعریف فرکانس بدون بعد مطابق رابطه (۴۹):

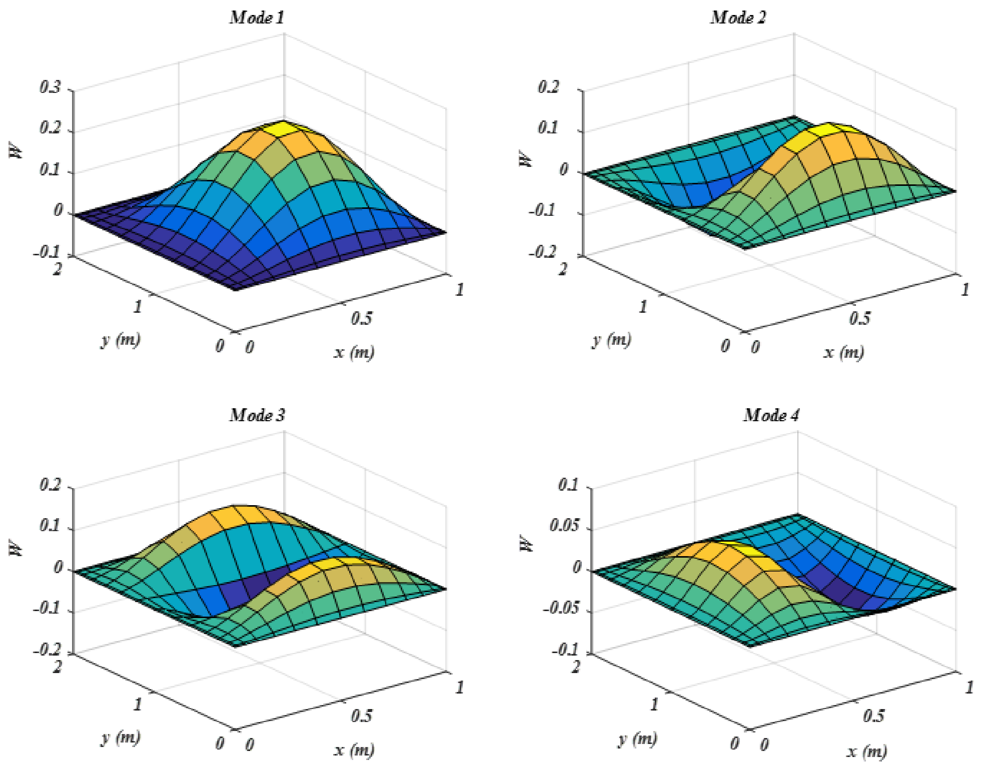
$$\omega^* = \omega h\sqrt{\frac{\rho_0}{G_0}} \qquad (۴۹)$$

مقادیر فرکانس‌های طبیعی مطابق جدول (۳) در کنار مقادیر ارائه شده توسط هبالی و همکاران (۲۰۱۴) [۳۴] و ردی و فان (۱۹۸۵) [۳۵]. ارائه شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود نتایج از تطابق بسیار خوبی برخوردار هستند که بیان‌گر صحت و دقت بالای تحلیل انجام‌شده است. البته خطا در مودهای بالاتر بیشتر است که دلیل این مساله آن است که همواره در مودهای بالاتر تعداد نقاط گره و پادگره در شکل مود بیشتر است و شکل مود متناظر دارای تغییرات ناگهانی بیشتری است و از آنجا که تحلیل همه مودها م با تعداد نقطه مشخصی انجام می‌شود، طبعا در مودهای بالاتر که پستی و بلندی‌ها بیشتر است دقت هم کمی کاهش پیدا می‌کند.

در بخش بعدی به بررسی تأثیر مشخصات ورق شامل

جدول ۲- تحلیل همگرایی (بررسی و قیاس فرکانس بدون بعد ($\Omega = \omega a\sqrt{\frac{\rho_{\circ}}{E_{\circ}}}$) با لحاظ افزایش تعداد نقاط ورق ساندویچی با هسته‌ی متخلخل با مشخصات $b/a=۲$ ، $B=۰/۵$ ، $e_۱=۰/۵$ ، $h_c/h=۰/۶$ ، $h/a=۰/۱$

	N_x=N_y	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
$\Omega_۱$	توزیع یکنواخت	۰/۶۳۴۲	۰/۶۵۰۶	۰/۶۶۰۱	۰/۶۶۴۲	۰/۶۶۵۶	۰/۶۶۵۸
	توزیع متقارن	۰/۶۲۷۹	۰/۶۴۳۹	۰/۶۵۲۹	۰/۶۵۶۷	۰/۶۵۷۹	۰/۶۵۷۹
	توزیع نامتقارن	۰/۶۲۸۱	۰/۶۴۴۲	۰/۶۵۳۳	۰/۶۵۷۰	۰/۶۵۸۰	۰/۶۵۸۰
$\Omega_۲$	توزیع یکنواخت	۰/۹۱۷۳	۰/۹۲۴۰	۰/۹۲۵۵	۰/۹۲۴۰	۰/۹۲۱۸	۰/۹۲۰۰
	توزیع متقارن	۰/۹۰۸۴	۰/۹۱۵۳	۰/۹۱۶۶	۰/۹۱۵۰	۰/۹۱۲۸	۰/۹۱۰۹
	توزیع نامتقارن	۰/۹۰۹۱	۰/۹۱۶۲	۰/۹۱۷۵	۰/۹۱۵۸	۰/۹۱۳۴	۰/۹۱۱۶
$\Omega_۳$	توزیع یکنواخت	۱/۲۹۲۳	۱/۳۱۱۵	۱/۳۲۱۴	۱/۳۲۷۴	۱/۳۳۰۳	۱/۳۳۱۳
	توزیع متقارن	۱/۲۸۵۲	۱/۳۰۳۹	۱/۳۱۳۶	۱/۳۱۹۴	۱/۳۲۲۲	۱/۳۲۳۱
	توزیع نامتقارن	۱/۲۸۷۷	۱/۳۰۶۵	۱/۳۱۶۳	۱/۳۲۲۴	۱/۳۲۴۸	۱/۳۲۵۷
$\Omega_۴$	توزیع یکنواخت	۱/۷۶۶۱	۱/۷۴۰۱	۱/۷۲۷۴	۱/۷۲۲۵	۱/۷۲۱۱	۱/۷۲۱۴
	توزیع متقارن	۱/۷۶۳۸	۱/۷۳۷۹	۱/۷۲۵۳	۱/۷۲۰۵	۱/۷۱۹۲	۱/۷۱۹۵
	توزیع نامتقارن	۱/۷۷۰۳	۱/۷۴۴۱	۱/۷۳۱۴	۱/۷۲۶۶	۱/۷۲۵۳	۱/۷۲۵۵

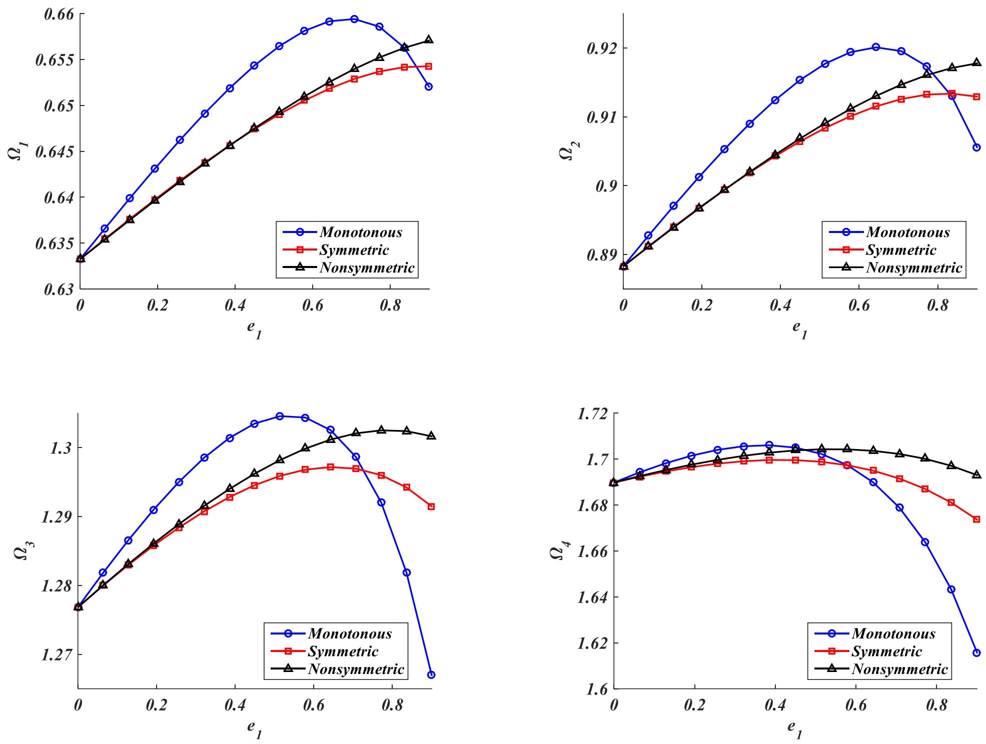


شکل ۴- شکل مودهای چهار فرکانس اول برای توزیع متقارن حفره‌ها به ازای $N_x = N_y = ۱۵$

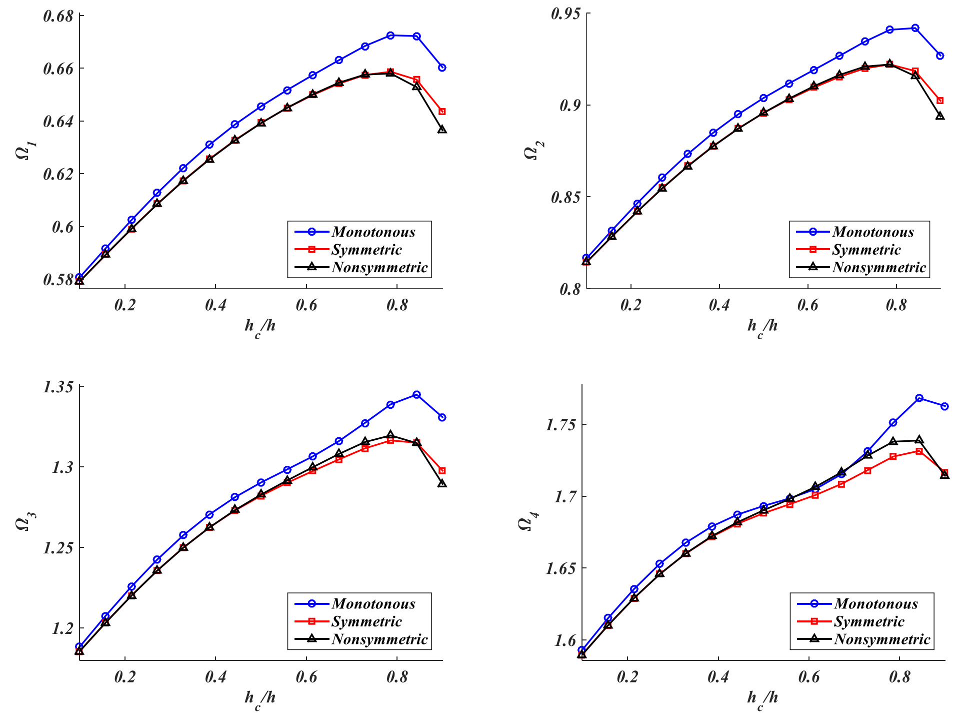
ضریب تخلخل، ضخامت هسته متخلخل، ضریب اسکمپتون و ضخامت کل ورق بر روی فرکانس‌های طبیعی آن پرداخته خواهد شد. در تمامی نتیجه‌های عددی به جز مواردی که صراحتا ذکر شود تمامی نتایج برای هر سه الگوی بیان‌شده برای توزیع حفره‌ها و شرط مرزی مذکور (Clamped-Simple- Simple-Clamped) ارائه خواهند شد. در پایان نیز به تأثیر شرایط مرزی بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق در هر سه الگوی توزیع حفره‌ها پرداخته خواهد شد.

با هدف بررسی تأثیر تخلخل بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق، یک ورق با مشخصات، $h/a=0/1$، $h_c/h=0/6$ و $B=0/5$ در نظر گرفته شده است. در شکل (۵) چگونگی تغییرات فرکانس‌های طبیعی در چهار مود اول برحسب ضریب تخلخل برای شرط مرزی CSSC و هر سه نوع الگوی توزیع حفره‌ها ترسیم شده است. هر چه ضریب e_1 بیشتر شود مثل این است که حفره‌ها بزرگ‌تر شوند هرچه حفره‌ها بزرگ‌تر شوند مدول الاستیسیته و مدول برشی ورق کم‌تر خواهد شد یعنی سختی ورق کم می‌شود از طرفی چگالی ورق نیز کم می‌شود بنابراین جرم آن نیز کم می‌شود؛ بنابراین به قطعیت در مورد فرکانس‌های طبیعی ورق نمی‌توان اظهار نظر کرد. همان‌گونه که گفته شد با افزایش تخلخل جرم و سختی ورق هر دو کاهش می‌یابند و ملاحظه می‌شود که با افزایش e_1، در قسمت‌هایی از نمودار، فرکانس افزایش می‌یابد یعنی جرم نسبت به‌سختی، بیشتر کاهش یافته است و در بعضی قسمت‌ها فرکانس کاهش می‌یابد یعنی سختی نسبت به جرم بیشتر کاسته شده است. برای هریک از توزیع‌ها در هرکدام از مودها یک مقداری از e_1 را می‌توان یافت که در آن مقدار بیش‌ترین فرکانس طبیعی به‌دست می‌آید. حال اگر هدف افزایش فرکانس طبیعی سیستم باشد یک مقدار بهینه برای e_1 وجود دارد. برای مثال برای فرکانس اول و فرکانس دوم در توزیع یکنواخت تقریباً در عدد $e_1=0/6$ بیش‌ترین فرکانس حاصل می‌شود ولی برای فرکانس سوم در توزیع یکنواخت تقریباً در مقدار $e_1=0/5$ بیش‌ترین فرکانس طبیعی به دست می‌آید. نتیجه دیگری که از نمودارهای شکل ۵ می‌توان گرفت این است که با قطعیت نمی‌توان گفت بیش‌ترین فرکانس متعلق به چه توزیعی از حفره‌ها است چون همان‌طور که بیان شد، بسته به این‌که مقدار e_1 چه مقدار باشد بیش‌ترین فرکانس طبیعی ممکن است متعلق به توزیع یکنواخت، متقارن و یا نامتقارن باشد. این که بیش‌ترین فرکانس با چه توزیعی به دست می‌آید بستگی به توزیع حفره‌ها دارد. ولی می‌توان به یک نتیجه کلی به این صورت دست یافت که برای مقدارهای کوچک‌تر از ۰/۸ برای e_1 بیش‌ترین فرکانس متعلق به توزیع یکنواخت است ولی وقتی e_1 از ۰/۸ بیش‌تر شود بیشینه فرکانس، در توزیع نامتقارن حفره‌ها اتفاق می‌افتد.

همان‌گونه که در ابتدای فصل بیان شد ورقی با مشخصات $b/a=2$، $h/a=0/1$، $e_1=0/5$ و $B=0/5$ با هدف بررسی تأثیر ضخامت هسته متخلخل بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق، در نظر گرفته شده است. در شکل (۶) چگونگی تغییرات فرکانس‌های متناظر در چهار مود اول برای شرط مرزی CSSC و هر سه الگوی توزیع حفره نشان داده شده است. نمودارهای این شکل‌ها نشان می‌دهند که با افزایش ضخامت هسته متخلخل در مقایسه با ضخامت لایه‌های همگن مقدار فرکانس‌های طبیعی در تمامی حالت‌های توزیع حفره‌ها، ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته‌اند که دلیل این مساله آن است که افزایش ضخامت هسته متخلخل منجر به کاهش سختی و جرم ورق می‌شود که اولی متناظر با کاهش فرکانس و دومی متناظر با افزایش فرکانس طبیعی است که نمایانگر تقابل کاهش جرم و کاهش سختی هستند. درنتیجه چنان‌چه هدف افزایش فرکانس‌های طبیعی یک سازه باشد می‌توان برای اندازه ضخامت هسته متخلخل یک مقدار بهینه را به‌دست آورد. کمی دقت در نمودارهای شکل (۶) نشان می‌دهد که مقدار ضخامت بهینه برای هسته ورق متخلخل تقریباً مستقل از مود ارتعاشی است اما با تغییر الگوی توزیع حفره‌ها تغییر خواهد نمود. در شکل (۶) تقریباً در همه حالت‌ها نمودار توزیع یکنواخت بالاتر بوده و بیش‌ترین فرکانس، به‌غیراز مود چهارم که نمودار توزیع



شکل ۵- تأثیر ضریب تخلخل بر فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ($\Omega = \omega a\sqrt{\frac{\rho_{\circ}}{E_{\circ}}}$) ورق ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی CSSC



شکل ۶- تأثیر ضخامت هسته‌ی متخلخل بر فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ($\Omega = \omega a\sqrt{\frac{\rho_{\circ}}{E_{\circ}}}$) بدون بعد ورق ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی CSSC

نامتقارن آن به‌صورت جزئی در بازه‌ای کوچک بالاتر است، متعلق به حالت متقارن بوده که دارای تأثیر کمی است. همچنین این نمودارها بیان‌گر این هستند که برخلاف ضریب تخلخل (e_1) که مقدار آن بر روی بیش‌ترین فرکانس مربوط به هر توزیع مؤثر بوده است، ضخامت هسته متخلخل تأثیری بر این موضوع ندارد.

به‌منظور بررسی چگونگی تأثیر ضریب اسکمپتون (تراکم‌پذیری سیال) داخل حفره‌ها بر فرکانس‌های طبیعی ورق، یک ورق با مشخصات $b/a=۲$ و $h/a=۰/۱$، $h_c/h=۰/۶$، $e_1=۰/۵$ در نظر می‌گیریم. برای هر سه الگوی توزیع حفره‌ها و شرط مرزی CSSC، در شکل (۷) تأثیر ضریب اسکمپتون بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق در چهار مود اول نشان داده شده‌اند.

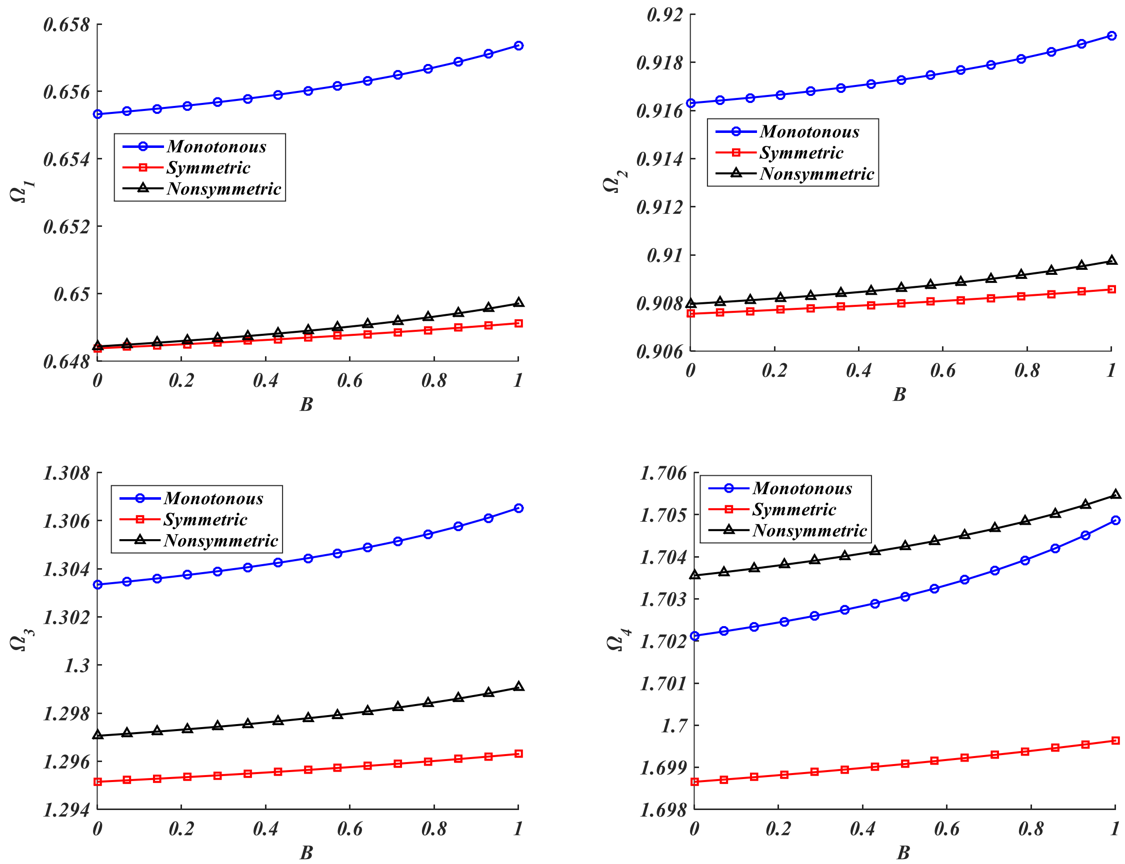
ضریب اسکمپتون به جنس سیال داخل حفره‌ها بستگی دارد هرچه ضریب اسکمپتون افزایش یابد تراکم‌پذیری سیال داخل حفره‌ها کاهش می‌یابد همان‌گونه که در شکل (۷) نشان داده شده است با افزایش ضریب اسکمپتون و درنتیجه کاهش تراکم‌پذیری سیال که منجر به افزایش سختی سیال داخل حفره‌ها می‌شود، فرکانس‌های طبیعی ورق افزایش خواهد یافت. البته میزان این تأثیر بسیار کوچک و ناچیز بوده به‌گونه‌ای که تغییرات اعداد روی محور عمودی نمودار بیان‌گر آن است. هم‌چنین نمودارهای شکل (۷) نشان می‌دهند که میزان تأثیر ضریب اسکمپتون بر روی فرکانس‌های طبیعی در توزیع یکنواخت حفره‌ها بیش از دو الگوی دیگر است اما میزان این تأثیر تا حدود زیادی مستقل از مود ارتعاشی است. شکل (۷) نشان می‌دهد که لزوما بیش‌ترین فرکانس همواره متعلق به الگوی توزیع یکنواخت نیست بلکه مثلا در مود چهارم ملاحظه می‌شود که بیشترین فرکانس متعلق به الگوی توزیع نامتقارن است که دلیل این مساله آن است که الگوی توزیع حفره‌ها به شکل هم‌زمان سختی و لختی (جرم) ورق را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

در بررسی تأثیر شرایط مرزی بر مقدارهای فرکانس‌های طبیعی سیستم، مقایسه نتایج ارائه شده در جدول (۴) نشان می‌دهند که شرایط مرزی را می‌توان بر اساس بزرگی مقدارهای فرکانس‌های طبیعی به ترتیب SSSS، SSSC، SSCC، SCCC و CCCC مرتب‌سازی کرد؛ به عبارت دیگر با مقیدتر شدن شرایط در مرزها و افزایش سختی سازه و با توجه به ثابت بودن جرم، افزایش فرکانس‌های طبیعی در تمامی مودها مشاهده می‌شود.

۵- جمع بندی نتایج

در این پژوهش با استفاده از تئوری شبه سه‌بعدی ورق زنکور و تئوری تنش بایوت، معادلات حاکم و شرایط مرزی برای ارتعاش ورق ساندویچی با هسته متخلخل اشباع شده و لایه‌های همگن استخراج شدند. معادلات حاکم به کمک روش عددی مربعات دیفرانسیلی برای تحلیل ارتعاش آزاد و در شرط مرزی CSSC و با کدنویسی در نرم‌افزار متلب حل شدند. نتایج به‌دست‌آمده از این پژوهش را به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد:

- از مزایای مدل پیشنهادی در این تحقیق نسبت به مدل‌های پیشین بررسی ارتعاش آزاد ورق ساندویچی ضخیم با هسته متخلخل مدرج اشباع با استفاده از تئوری شبه سه بعدی به روز به روش مربعات دیفرانسیلی است. در صورتی که در تحقیق قبلی (مرجع [۲۰]) که از این تئوری میدان جابجایی استفاده شده بود تنها مساله خمش و به روش حل ساده ناویر بررسی شده بوده است.
- روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، شیوه‌ای قدرتمند جهت حل معادلات دیفرانسیل است که حجم محاسبات را در مقایسه با دیگر روش‌های عددی به شکل چشم‌گیری کاهش می‌دهد و دقت بالای آن در مقایسه با روش‌های عددی پیشین به اثبات رسید [۳۱].
- در روش پیشنهادی در تحقیق حاضر حجم محاسبات کاهش قابل ملاحظه‌ای یافته است.
- اگرچه در این تحقیق فقط نتایج مدل با شرایط مرزی CSSC ارائه شده است، ولی روش تحلیل ارائه شده در



شکل ۷- تأثیر ضریب اسکمپتون (تراکم‌پذیری سیال داخل حفره‌ها) بر فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ($\Omega = \omega a\sqrt{\frac{\rho_\circ}{E_\circ}}$) ورق ساندویچی با شرایط تکیه‌گاهی CSSC

جدول ۳- اعتبارسنجی ورق مربعی $(b=a)$ تک لایه‌ی فولادی همگن (بدون تخلخل) با تکیه‌گاه‌های ساده (SSSS) با مشخصات $(\nu = ۰/۳)$ و $(h/a) = ۰/۱$.

شماره مود	تحلیل حاضر	هبالی و همکاران (۲۰۱۴)		ردی و فان (۱۹۸۵)	
	تئوری پیشنهادی شبه سه‌بعدی	تئوری شبه سه‌بعدی هایپربولیک	درصد اختلاف با مدل پیشنهادی	تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم	درصد اختلاف با مدل پیشنهادی
۱	۰/۰۹۳۳	۰/۰۹۳۳	۰	۰/۰۹۳۱	۱/۳۹۶۳
۲	۰/۲۲۲۹	۰/۲۲۲۸	۰/۰۴۴۹	۰/۲۲۲۲	۰/۳۱۵۰
۳	۰/۳۴۲۶	۰/۳۴۲۲	۰/۱۱۶۹	۰/۳۴۱۱	۰/۴۳۹۸
۴	۰/۴۱۷۸	۰/۴۱۷۳	۰/۱۱۹۸	۰/۴۱۵۸	۰/۴۸۱۰

جدول ۴- تأثیر شرایط مرزی (افزایش گیرداری در لبه‌های ورق) بر فرکانس بدون بعد ($\Omega = \omega a\sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$) ورق ساندویچی با لایه‌های فولادی و هسته‌ی مرمر تنسی با مشخصات $b/a=2$، $h/a=0.1$، $h_c/h=0.6$، $\nu=0.3$ و $e_1=0.5$ در توزیع‌های مختلف حفره‌های هسته‌ی متخلخل.

	شرایط مرزی	SSSS	SSSC	SSCC	SCCC	CCCC
Ω_1	توزیع یکنواخت	۰/۴۸۹۶	۰/۵۰۵۷	۰/۶۶۰۱	۰/۶۸۰۳	۰/۸۶۳۳
	توزیع متقارن	۰/۴۸۰۸	۰/۴۹۷۰	۰/۶۵۲۹	۰/۶۷۳۱	۰/۸۵۸۵
	توزیع نامتقارن	۰/۴۷۹۸	۰/۴۹۶۲	۰/۶۵۳۳	۰/۶۷۳۶	۰/۸۶۰۴
Ω_2	توزیع یکنواخت	۰/۷۶۱۷	۰/۸۲۲۵	۰/۹۲۵۵	۰/۹۷۳۴	۱/۰۹۷۴
	توزیع متقارن	۰/۷۵۰۲	۰/۸۱۱۵	۰/۹۱۶۶	۰/۹۶۵۶	۱/۰۹۲۴
	توزیع نامتقارن	۰/۷۴۹۴	۰/۸۱۱۳	۰/۹۱۷۵	۰/۹۶۶۹	۱/۰۹۵۲
Ω_3	توزیع یکنواخت	۱/۱۸۵۶	۱/۲۵۳۹	۱/۳۲۱۴	۱/۴۰۷۵	۱/۴۸۵۵
	توزیع متقارن	۱/۱۷۲۸	۱/۲۴۳۹	۱/۳۱۳۶	۱/۴۰۲۲	۱/۴۸۳۰
	توزیع نامتقارن	۱/۱۷۳۳	۱/۲۴۵۶	۱/۳۱۳۶	۱/۴۰۶۲	۱/۴۸۸۱
Ω_4	توزیع یکنواخت	۱/۵۰۲۳	۱/۵۰۸۱	۱/۷۲۷۴	۱/۷۳۴۴	۱/۹۴۸۸
	توزیع متقارن	۱/۴۹۰۵	۱/۴۹۶۶	۱/۷۲۵۳	۱/۷۳۲۵	۱/۹۵۸۲
	توزیع نامتقارن	۱/۴۹۲۶	۱/۴۹۸۸	۱/۷۳۱۴	۱/۷۳۸۶	۱/۹۶۹۱

تحقیق حاضر قابلیت لحاظ کردن ورق با ترکیب انواع شرایط مرزی مختلف در وجوه مختلف ورق را دارد.

- با افزایش ضریب تخلخل برای هریک از توزیع حفره‌ها در هرکدام از مودها یک مقداری از تخلخل را می‌توان یافت که در آن بیش‌ترین فرکانس طبیعی به‌دست می‌آید.
- با افزایش ضخامت هسته متخلخل در مقایسه با ضخامت رویه‌های همگن بیرونی مقدار فرکانس‌های طبیعی در تمامی الگوهای توزیع حفره‌های هسته، ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابند.
- با کاهش تراکم‌پذیری سیال داخل حفره‌ها (افزایش ضریب اسکمپتون)، تاثیر ناچیز در فرکانس‌های طبیعی ورق ایجاد می‌شود.
- در بررسی تاثیر ضریب اسکمپتون بر فرکانس‌های طبیعی ورق ملاحظه می‌شود که بیش‌ترین فرکانس بسته به مود ارتعاشی ممکن است متعلق به الگوی توزیع یکنواخت یا نامتقارن باشد.
- با کاهش تراکم‌پذیری سیال، تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق در توزیع یکنواخت حفره‌ها بیش‌تر از دو الگوی دیگر است اما میزان این تأثیر تا حدود زیادی مستقل از مود ارتعاشی است.
- به ازای یک مقدار خاص (بهینه) از ضخامت هسته متخلخل بیش‌ترین افزایش در فرکانس‌های طبیعی ورق مشاهده می‌شود.
- افزایش سختی قیدهای تکیه‌گاهی منجر به افزایش سختی ورق و افزایش فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود.

واژه‌نامه

1. composites
2. sandwich structures
3. stiffness
4. porous
5. method of multiple scales
6. monotonous distribution
7. symmetric distribution
8. non- symmetric distribution
9. porous coefficient
10. undrained
11. skempton coefficient
12. homilton principle
13. minimum potential energy principle
14. clamped support
15. simply support
16. boundary points
17. domain points
18. tennessee marb

مراجع

1. Khorshidi, K., Fallah, A., and Siahpush, A., "Free Vibrations Analaysis of Functionally Graded Composite Rectangular Nanoplate Based on Nonlocal Exponential Shear Deformation Theory in Thermal Environment", *Scientific and Technology of Composite*, Vol. 4(1), pp. 109-120, 2017. (In Persian).
2. Haji monfared nejad, A., "Application of Differential Quadrature Method on Free Vibration of Clamped Sandwich Composite Plates Resting on Elastic Foundation", M.Sc. Thesis, Shahid Chamran University, Faculty of Engineering, 2017. (In Persian)
3. Sorush, M., "Investigation of Castellated Sandwich Structures", M.Sc. Thesis, Azad University in South Branch of Tehran, Faculty of Engineering, 2009. (In Persian).
4. Mahmudkhani, S., "Vibration Analysis of Viscoelastic Sandwich Plates under the Effects of Nonlinearities and Random Excitations", Ph.D. Thesis, Sharif University of Technology, Aerospace Engineering Faculty, 2013. (In Persian).
5. Botshekanan dehkordi, M., Rajabi, I., and Nurbakhsh, H., "Low Velocity Impact Analysis of Sandwich Plate with Composite Faces and Temperature Dependent Flexible Core Considering Thermal Effects", *Journal of Mechanic Engineering*, Vol. 48. pp. 35-44, 2018. (In Persian).
6. Malekzade, K., Payegane, Gh., and Kardan, M., "Dynamic Response of Sandwich Panels with Flexible Cores and Elastic Foundation Subjected to Low-Velocity Impact", *Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)*, Vol. 45(2), pp. 27-42, 2013. (In Persian).
7. Abotorabi, M., "Free and Forced Vibration Analysis of Thick Straight and Curved Sandwich Beams with a Core Made of Saturated Porous Materials", M.Sc. Thesis, Sahid Ashrafi Esfahani University, Faculty of Engineering, 2019. (In Persian).
8. Sadeghi Goghari, M., "Buckling Analysis of Porous Sector Plates with Piezoelectric Layers", M.Sc. Thesis, Shahid Bahonar University of Kerman, Faculty of Engineering, 2016. (In Persian)
9. Khoddami Maraghi, Z., "Vibration and Instability of Sandwich Plates with Nano-Fiber Reinforced Composite and Magnetostrictive Face Sheets", Ph.D. Thesis, Kashan University, Mechanical Engineering Faculty, 2015. (In Persian).
10. Malekzadeh, K., Khalili, M. R., and Mittal, R. K., "Local and Global Damped Vibrations of Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-order Approach", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol.7, pp.431–456, 2005.
11. Zhong, H., and Gu, C., "Buckling of Symmetrical Cross-ply Composite Rectangular Plates under A Linearly Varying In-Plane Load", *Composite Structures*, Vol. 80, pp. 42-48, 2007.
12. Khorshidi, K., and Farhadi, S., "Free Vibration Analysis of a Laminated Composite Rectangular Plate in Contact with a Bounded Fluid", *Composite Structures*, Vol. 104(45), pp. 176-186, 2013.
13. Malekzadeh, P., "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations", *Composite Structures,* Vol. 89, pp. 367-373, 2009.
14. Emami Hoseinabadi, A., Dehghan Tarzjani, H., Rastegari, R., and Khedmati Bazkiaie, A, H., "Analysis of Free Vibrations of a Functional Graded Plate on Pasternak Elastic Substrate with Three Types of Asymmetric Boundary Conditions Using Differential Quadrature Element Method", *Journal of Applied Science Studies in Engineering*, Vol. 1(1), pp. 47-55, 2015. (In Persian).
15. Pormoayed, A., Malekzade Fard, K., and Shahravi, M., "Buckling and Vibration Analysis of a Thick Cylindrical Sandwich Panel with Flexible Core Using an Improved Higher-Order Theory", *Journal of Mechanical Engineering,* Vol. 3(17), pp. 227-238, 2017. (In Persian).
16. Nguyan, H. X., Nguyan, T. N., Abdel-wahab, M., Bordas, S., Nguyan-xuan, H., and Vo, T. P., "A Refined Quasi-3D Isogeometric Analysis for Functionally Graded Microplates Based on the Modified Couple Stress Theory", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 313, pp. 904-940, 2017.
17. Thai, H. T., and Kim, S. E., "A Simple Quasi-3D Sinusoidal Shear Deformation Theory for Functionally Graded Plates", *Composite Structures,* Vol. 99, pp. 172-180, 2013.

18. Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., and Karami, B., “A Novel Quasi-3D Hyperbolic Theory For Free Vibration of FG Plates with Resting on Winkler/Pasternak/Kerr Foundation”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 72, pp. 134-139, 2018.
19. Gao, K., Gao, W., Wu, B., and Song, C., “Nonlinear Primary Resonance of Functionally Graded Porous Cylindrical Shells Using the Method of Multiple Scales”, *Thin Walled Structures*, Vol. 125, pp. 281-293, 2018.
20. Zenkour, A. M., “A Quasi-3D Refined Theory for Functionally Graded Single-Layered and Sandwich Plates with Porosities”, *Composite Structures*, Vol. 201, pp. 38-48, 2018.
21. Ghumare, S. M., and Sayyad, A. S., “A New Quasi-3D Model for Functionally Graded Plates”, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, Vol. 5(2), pp. 367-380, 2019.
22. Chen, D., Yang J., and Kitipornchai, S., “Free and Forced Vibrations of Shear Deformable Functionally Graded Porous Beams”, *Int. J. Mech. Sci,* Vol. 108, pp. 14–22, 2016.
23. Biot, M. A., “General Theory of Three-Dimensional Consolidation”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 12(2), pp. 155-164, 1941.
24. Biot M. A., “Theory of Buckling of a Porous Slab and its Thermoelastic Analogy”, *J. Appl. Mech*, Vol. 31(2), pp. 194–198, 1964.
25. Detournay, E., and Cheng, A., *Fundamentals of Poroelasticity*, Pergamon Press, 1993.
26. Arshid, E., and Khorshidvand, A. R., “Free Vibration Analysis of Saturated Porous FG Circular Plates Integrated with Piezoelectric Actuators Via Differential Quadrature Method”, *Journal of Thin-Walled Structures*, Vol. 125, pp. 220-233, 2018.
27. Afshari, H., “Differential Quadrature Method in Mechanical Engineering Problems”, *Poyesh Andishe Publication, Isfahan*, 2019. (In Persian).
28. Rao S. S., *Mechanical Vibrations*, Prentice Hall, 2010.
29. Bellman, R., and Casti, J., “Differential Quadrature and Long-Term Integration”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, pp. 235-238, 1971.
30. Bellman, R., Kashef, B., and Casti, J., “Differential Quadrature A Technique for The Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, pp. 40-52, 1972.
31. Afshari, H., and Irani Rahaghi, M., “Whirling Analysis of Multi-Span Multi-Stepped Rotating Shafts”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering,* Vol. 40, 424, 2017.
32. Bert, C. W., and Malik, M., “Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review”, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49(1), pp. 1-28, 1996.
33. Du, H., M. Lim., and R. Lin., “Application of Generalized Differential Quadrature Method to Structural Problems”, *International Journal for Numerical Methods in* Engineering, Vol. 37(11), pp. 1881-1896, 1994.
34. Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M. S. M., Bessaim, M., and Bedia, E. A .A., “New Quasi-3D Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates”, *J. Eng. Mech*, Vol. 140, pp. 374-383, 2014.
35. Reddy, J. N., and Phan, N. D, “Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to A Higher-Order Shear Deformation Theory”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 98(2), pp. 157-170, 1985.

پیوست

در رابطه (۴۰)، $[K]$ و $[M]$ ماتریس‌های متقارنی هستند که به ترتیب تحت عنوان‌های، ماتریس سختی و ماتریس جرم شناخته می‌شوند:

$$\{u\}=\begin{Bmatrix}\{W\}\\\{X\}\\\{Y\}\\\{Z\}\end{Bmatrix}\quad [K]=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}&k_{14}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}&k_{24}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}&k_{34}\\k_{41}&k_{42}&k_{43}&k_{44}\end{bmatrix}\quad [K]=\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&m_{13}&m_{14}\\m_{21}&m_{22}&[0]&[0]\\m_{31}&[0]&m_{33}&[0]\\m_{41}&[0]&[0]&m_{44}\end{bmatrix} \tag{پ-۱}$$

و در این رابطه [0] بیان‌گر ماتریس صفر از مرتبه‌ی $N_xN_y \times N_xN_y$ می‌باشد و $k_{ij}=k_{ji}$ ،$m_{ij}=m_{ji}$ به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$
\begin{aligned}
&k_{11}=\left(D_1+D_3\right)\left(I^y\otimes D^x\right)+\left(D_1+D_3\right)\left(D^y\otimes I^x\right)+2\left(D_1+D_3\right)\left(B^y\otimes B^x\right)\\
&k_{12}=-\left(D_2+D_4\right)\left(I^y\otimes C^x\right)-\left(D_2+D_4\right)\left(B^y\otimes A^x\right)\\
&k_{13}=-\left(D_2+D_4\right)\left(C^y\otimes I^x\right)-\left(D_2+D_4\right)\left(A^y\otimes B^x\right)\\
&k_{14}=-D_5\left(I^y\otimes B^x\right)-D_5\left(B^y\otimes I^x\right)\\
&m_{11}=-I_2\left(I^y\otimes B^x\right)-I_2\left(B^y\otimes I^x\right)+I_0\left(I^y\otimes I^x\right)\\
&m_{12}=I_3\left(I^y\otimes A^x\right)\\
&m_{13}=I_3\left(A^y\otimes I^x\right)\\
&m_{14}=I_5\left(I^y\otimes I^x\right)\\
&k_{22}=\left(D_6+D_7\right)\left(I^y\otimes B^x\right)+0.5D_6\left(B^y\otimes I^x\right)-D_{11}\left(I^y\otimes I^x\right)\\
&k_{23}=\left(0.5D_6+D_7\right)\left(A^y\otimes A^x\right)\\
&k_{24}=\left(D_8-D_{11}\right)\left(I^y\otimes A^x\right)\\
&m_{22}=-I_1\left(I^y\otimes I^x\right)\\
&k_{33}=0.5D_6\left(I^y\otimes B^x\right)+\left(D_6+D_7\right)\left(B^y\otimes I^x\right)-D_{11}\left(I^y\otimes I^x\right)\\
&k_{34}=\left(D_8-D_{11}\right)\left(A^y\otimes I^x\right)\\
&m_{33}=-I_1\left(I^y\otimes I^x\right)\\
&k_{44}=-D_{11}\left(I^y\otimes B^x\right)-D_{11}\left(B^y\otimes I^x\right)+\left(D_9+D_{10}\right)\left(I^y\otimes I^x\right)\\
&m_{44}=I_4\left(I^y\otimes I^x\right)
\end{aligned}
\tag{پ-۲}
$$