نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۲، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۲، ص. ۷۶-۶۳

مقاله پژوهشی

تحلیل پایداری دینامیکی تیرهای FGM بر اساس مدل غیرخطی تیموشنکو

کرامت ملک‌زاده فرد[۱] و علیرضا پورموید[۲*]

۱- استاد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء (ص)، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۰۸/۰۴)

چکیده– وقوع انواع ناپایداری دینامیکی در سیستم‌های مکانیکی از مهم‌ترین عوامل مختل‌کننده فعالیت در این سازه‌ها است. لذا، مطالعه دقیق ناپایداری دینامیکی در تیرها، به عنوان یکی از اساسی‌ترین ساختارهای مهندسی، از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله، مساله ناپایداری دینامیکی تیرهای ساخته شده از مواد مدرج یا هوشمند تابعی (FGM) مطالعه شده است. برای این منظور، تئوری تیر برشی مرتبه اول یا تیموشنکو با اثرات غیرخطی بودن هندسی لحاظ شده است. به این ترتیب، مدل پیشنهادی قابلیت تعیین رفتار مکانیکی تیرهای نازک و ضخیم را داراست. با در نظر گرفتن انواع توابع انرژی سیستم و پیاده‌سازی اصل همیلتون، معادلات حاکم بر مساله به همراه انواع شرایط مرزی متداول به دست آمده است. روش تربیع دیفرانسیلی (DQM) به عنوان یکی از شناخته‌شده‌ترین روش‌های حل عددی مساله به کار گرفته شده و معادلات غیرخطی دیفرانسیلی با مشتقات جزیی به صورت معادل به شکل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات معمولی نوشته می‌شوند. سپس با در نظر گرفتن پاسخ‌های هارمونیک برای سیستم، معادلات دیفرانسیلی به مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی جبری تبدیل شده‌اند. در انتها، به منظور مطالعه پارامترهای اساسی، مثال‌های عددی مختلفی ارائه شده است. نتایج عددی حاصل با مراجع مقایسه شده و به این ترتیب اعتبار فرمول‌بندی ارائه شده و روش حل موجود مشخص شده است. همچنین مطالعه مقایسه‌ای میان مدل‌های سینماتیک خطی و غیرخطی نشان می‌دهد که اهمیت غیرخطی بودن هندسی مدل کاملاً چشمگیر است.

واژه‌های کلیدی: ناپایداری دینامیکی، ماده مدرج تابعی، سینماتیک غیرخطی، تئوری تیر تیموشنکو، روش حل تربیع دیفرانسیلی.

Dynamic Stability Analysis of FGM Beams Based on the Nonlinear Timoshenko Model

K. MalekzadehFard[1] and A. R. Pourmoayed[2*]

1 –Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Khatamul-Anbiya Air Defense, Tehran, Iran.

Abstract*: Various types of dynamic instabilities in mechanical systems are one of the most important disruptive factors in such structures. Therefore, an accurate study of dynamic instability in beams, as one of the fundamental engineering structures, is of great importance. In this paper, dynamic instability problem of beams made of Functionally Graded Materials (FGM) is investigated. For this purpose, the first-order shear deformation (or the Timoshenko) beam theory with the effects of geometric nonlinearity is considered. Thus, the proposed model has the ability to determine mechanical behavior of thin and thick beams. By considering the energy functions of the system, and implementing the Hamilton's principle, the governing equations are*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: pourmoayed@mut.ac.ir

obtained along with different types of common boundary conditions. The Differential Quadrature Method (DQM), as one of the best-known numerical methods, is used. The nonlinear partial differential equations are written in the form of equivalent ordinary differential equations. Then, considering the harmonic responses for the system, the differential equations are converted to a set of nonlinear algebraic equations. Finally, in order to study the important parameters, various numerical examples are provided. The obtained numerical results are compared with the literature and thus, the validity of the presented formulation and solution methodology is revealed. Also, a comparative study between linear and nonlinear kinematic models shows that the importance of geometric nonlinearity of the model is quite significant.

Keywords: ***Dynamic instability, functionally graded material, nonlinear kinematics, Timoshenko beam theory, differential quadrature solution method.***

فهرست علائم

x	مختصه محور طولی تیر (m)	$\mathbf{q}$	بردار جابجایی کل (m)
y	مختصه محور عرضی تیر (m)	$\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$	اجزای ماتریس سختی (-)
z	مختصه محور قائم تیر (m)	$\mathbf{X}$	ماتریس قطری بردار $\mathbf{X}$ (-)
L	طول تیر (m)	$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$	ماتریس‌های ضرایب (-)
b	عرض سطح مقطع (m)	$\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_5$	ماتریس‌های عملگر مشتق‌گیر (-)
h	ارتفاع سطح مقطع (m)	P_0	نیروی استاتیکی (N)
t	زمان (s)	P_1	نیروی دینامیکی (N)
P(t)	نیروی خارجی محوری (N)	P_{cr}	بار بحرانی کمانش (N)
E	مدول الاستیسیته (N/m^2)	$\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2$	دامنه بردار جابجایی کلی (m)
V_f	مدول حجمی (-)	T	دوره تناوب (s)
k	اندیس ماده FGM (-)	**علائم یونانی**	
u_1	میدان جابجایی طولی (m)	ν	ضریب پوآسون (-)
u_2	میدان جابجایی عرضی (m)	ρ	چگالی (kg/m^3)
u_3	میدان جابجایی قائم (m)	Ψ	مؤلفه جابجایی چرخشی (-)
u	مؤلفه جابجایی طولی (m)	$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}$	مؤلفه‌های کرنش (-)
w	مؤلفه جابجایی عرضی (m)	σ_{11}, σ_{13}	مؤلفه‌های تنش (Pa)
k_s	ضریب تصحیح برشی (-)	λ, μ	ثابت‌های ماده (Pa)
M, N, Q	نیروها و گشتاورهای منتجه (N)، (N.m)، (N)	δ	نماد عملگر تغییرات
S	سطح مقطع تیر (m^2)	Π_S	انرژی کرنشی (J)
C_1, C_2, C_3, C_4	ثوابت الاستیک (kg)، ($kg.m^2$)، (kg.m)، (kg)	Π_T	انرژی جنبشی (J)
I_1, I_2, I_3	ضرایب اینرسی (kg.m)، (kg)، (kg/m)	Π_W	کار خارجی (J)
n	تعداد نقاط گسسته‌سازی (-)	$\mathbf{\Psi}$	بردار مؤلفه‌های چرخش (-)
x_i	نقاط گسسته‌سازی مکان (m)	Ω	فرکانس تحریک (rad/s)
$\mathbf{u}$	بردار مؤلفه‌های جابجایی طولی (m)	α, β	ضرایب استاتیکی و دینامیکی بار (-)
$\mathbf{w}$	بردار مؤلفه‌های جابجایی عرضی (m)	ω	فرکانس طبیعی (rad/s)
$\mathbf{D}^{(r)}$	عملگر مشتق‌گیر مرتبه r–ام (-)	**زیرنویس**	
$\circ$	ضرب درایه به درایه بردارها (-)	m	اندیس فلز
.	مشتق نسبت به زمان (-)	c	اندیس سرامیک
$\mathbf{M}$	ماتریس اینرسی (-)	max	مقدار بیشینه
$\mathbf{K}$	ماتریس سختی (-)	**بالانویس**	
$\mathbf{K}_g$	ماتریس سختی هندسی (-)	r	مرتبه مشتق

۱-مقدمه

پدیده ناپایداری دینامیکی منجر به بروز مشکلات اساسی در عملکرد سازه‌های مهندسی می‌شود. به عنوان مثال می‌توان به بال هواپیما اشاره کرد که از جمله متداول‌ترین قسمت‌هایی است که در انواع سوانح هوایی به عنوان عامل حادثه شناخته شده است. بال هواپیما به دلیل قرارگیری در شرایط کاری سخت که شامل تغییرات شدید فشار و دما می‌شود، دچار ناپایداری می‌شود. تحلیل نظری و تجربی عوامل مؤثر بر ناپایداری چنین سازه‌هایی موضوع پژوهش محققان بسیاری بوده است که در ادامه به مهم‌ترین و جدیدترین مراجع مرتبط در این زمینه اشاره می‌شود.

فو و همکاران [۱] به تحلیل غیرخطی کمانش، ارتعاشات آزاد و پایداری دینامیکی تیرهای ساخته شده از مواد مدرج یا هوشمند تابعی[۱] پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از تئوری تیر اویلر – برنولی[۲]، تأثیر محیط دمایی در ناحیه ناپایداری را مورد بحث قرار دادند. شرایط مرزی تیر به صورت گیردار بوده و عملگرهای پیزوالکتریک در محدوده سطحی لحاظ شده‌اند. از روش‌هایی مانند گالرکین[۳] و تعادل هارمونیک برای حل مساله استفاده شده است. چن و همکاران [۲] به مدل‌سازی و تحلیل ناپایداری دینامیکی تیرهای نازک کامپوزیت چندلایه در حضور میدان پیزوالکتریک پرداختند. با در نظر گرفتن یک مدار حلقه بسته و شرایط مرزی دو سر گیردار، آنها پاسخ‌ها دینامیکی سیستم را نیز کنترل نمودند. لایه پیزوالکتریک بالا به عنوان عملگر و لایه پیزوالکتریک پایین به عنوان حسگر مدل شده است و به این ترتیب، اثرات بازخورد کنترلی بر ناپایداری دینامیکی مشخص شده است. یانگ و همکاران [۳] نیز با پیشنهاد مدل اجزاء محدود، پاسخ‌های ارتعاشی و پایداری دینامیکی تیرهای در حال حرکت را تجزیه و تحلیل نمودند. آن‌ها اثرات سفتی و ضخامت لایه میرایی ویسکوالاستیک بر فرکانس طبیعی و نیروهای دینامیکی را گزارش کرده‌اند و به این نتیجه رسیدند که وجود لایه میرایی موجب پایداری تیر متحرک می‌شود. لی [۴] به بررسی مساله ناپایداری دینامیکی تیر یکسر گیرداری پرداخته است که دارای سطح مقطع با مساحت‌های متفاوت بوده و بر روی بستر الاستیک قرار گرفته است. در این مقاله، نیرو به صورت دنبال شونده در انتهای آزاد تیر وارد می‌شود. برای تحلیل مساله، از تئوری اویلر-برنولی و روش مود فرضی[۴] استفاده شده است. وجود اثرات میرایی داخلی و همین‌طور مطالعه پدیده فلاتر[۵] از مهم‌ترین جنبه‌های این تحقیق است. ناپایداری دینامیکی سازه ورق در حضور میدان مغناطیسی موضوع پژوهش ژنگ و همکاران [۵] بوده است. ورق یکسر گیردار بوده و تنها مؤلفه‌های داخل صفحه‌ای نیروی الکترومغناطیس در معادلات وارد شده است. به این ترتیب نشان داده شده است که به ازای مقادیر معینی از میدان مغناطیسی اعمال شده در جهت جانبی، سازه دچار ناپایداری می‌شود. شاه محمدی و همکاران [۶]، ناپایداری دینامیکی پوسته‌ها تحت فشارهای دوره‌ای درون صفحه و فشار خارجی در محیط حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند. آن ها در این تحقیق برای انجام مطالعات پارامتری، اثرات خواص هندسی و مکانیکی مختلف، شرایط مرزی و دما را مورد بررسی قرار دادند. پولوسکی و سکرنیس [۷] از مدل تیموشنکو به منظور بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی تیر کامپوزیتی تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای کمانشی استفاده کرده‌اند. آنها به کمک روش اجزاء محدود مساله را گسسته‌سازی نموده و برای تبدیل معادلات دیفرانسیلی به جبری، روش تعادل هارمونیک بولتین[۶] را به کار گرفتند. نتایج حاصل محدوده پایداری سیستم میرا و نامیرا را مشخص می‌کند. با توسعه مدل دو بعدی مناسبی برای تیر و ستون، داریو [۸] فرکانس‌های طبیعی، بار بحرانی کمانش، شکل مودهای ارتعاشات و کمانش و نیز محدوده پایداری تیر را مطالعه کرده است. بار به صورت گسترده و یکنواخت در طول سازه وارد می‌شود. همچنین، قیدهای مختلفی برای دو انتهای تیر یا ستون در نظر گرفته شده است. مدل پیشنهادی شامل اثرات تغییرشکل‌های برشی، انتقالی و چرخشی است. صالحی پور و همکاران، بررسی پایداری دینامیکی پوسته‌های دو انحنایی که بر روی بستر الاستیک قرار

دارند و از کامپوزیت‌های چند لایه تقویت‌شده توسط الیاف کربن، نانولوله‌های کربنی[۷] و نانوورق‌های گرافنی[۸] ساخته شده‌اند، را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق همچنین ارزیابی پایداری دینامیکی برای چهار نوع پانل شامل پانل تخت (ورق)، پانل استوانه‌ای، پانل منحنی دوگانه با شعاع مثبت و همچنین پانل منحنی دوتایی با شعاع منفی و مثبت بررسی شده است [۹]. از سوی دیگر، ملک‌زاده و همکاران [۱۰] رفتار دینامیکی ورق‌های نازک و ضخیم تقویت شده با هسته نرم را بررسی کرده‌اند. برای این منظور، از تئوری برشی مرتبه اول برای لایه‌ها و از تئوری الاستیسیته سه بعدی برای هسته استفاده شده است. همچنین، برای تحلیل هرچه بهتر مساله، رابطه‌ای غیرخطی برای توزیع شتاب در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، می‌توان به مقالات [۱۱-۱۷] مراجعه نمود.

از رایج‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی در خصوص ناپایداری دینامیکی سازه‌های مهندسی، بررسی چنین پدیده‌ای در سازه‌های کم ابعاد است. سهمانی و همکاران [۱۸] با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده[۹] و نیز تئوری مرتبه بالای برشی[۱۰] به مطالعه پایداری دینامیکی میکرو-پوسته‌های FGM پرداختند. خواص ماده توسط روش موری-تاناکا[۱۱] مدل شده و شرایط مرزی ساده برای دو انتهای تیر لحاظ شده است. با استفاده از روش تعادل هارمونیک بولتین، معادلات مورد تحلیل قرار گرفته و اثرات طول مشخصه ماده[۱۲] و سایر پارامترهای مهم بررسی شده است. در نظر گرفتن طول مشخصه که می‌توان آن را به صورت فاصله میانگین مولکولی ماده تعبیر کرد، این امکان را می‌دهد که اثرات اندازه در مقیاس میکرو و نانو تعیین شود. شاه محمدی و همکاران [۱۹]، یک حل تحلیلی برای تحلیل‌های ارتعاش آزاد و پایداری پوسته‌های حلقوی هیبرید-کامپوزیت ارائه کردند. در این تحقیق معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی عرضی مرتبه اول گسترش یافته و با استفاده از تقریب سری فوریه و روش گالرکین حل شده است. آن‌ها همچنین در تحقیقی دیگر، ناپایداری دینامیکی پوسته حلقوی تقویت‌شده با الیاف/نانوکامپوزیت هیبریدی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در این تحقیق روشی برای ارزیابی دقیق پایداری دینامیکی پوسته بدون هزینه‌های محاسباتی در مقایسه با روش‌های عددی، پیشنهادی نمودند [۲۰]. انصاری و غلامی [۲۱] بر مبنای تئوری تیر اویلر-برنولی و تئوری وابسته به اندازه غیرمحلی[۱۳]، به تحلیل پایداری دینامیکی نانولوله کربنی پرداختند. تیر در محیط دمایی قرار گرفته و همزمان نیروهای استاتیکی و دینامیکی بر آن وارد می‌شوند. معادلات حاصل به فرم معادلات متیو-هیل[۱۴] کاهش‌یافته و سپس توسط تئوری فلوگه-لیاپانوف[۱۵] حل شده‌اند. علاوه بر آن، انصاری و همکاران [۲۲] به کمک تئوری غیرمحلی ارینگن و مدل تیر تیموشنکو، ناپایداری دینامیکی نانولوله‌های کربنی چند جداره را بررسی کرده‌اند. به این ترتیب، تأثیر مؤلفه‌های مهم از جمله پارامتر غیرمحلی بر ناحیه ناپایداری تیر بررسی شده است. با بهره‌گیری از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری سینوسی تیر، کلاهچی و بیدگلی [۲۳] مساله ناپایداری دینامیکی نانولوله کربنی تک جداره قرار گرفته بر روی بستر الاستیک را مطالعه کرده‌اند. تیر مورد نظر توسط روش عددی تحلیل شده و به این ترتیب ناحیه پایداری آن محاسبه شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش طول مشخصه، ناحیه ناپایداری به سمت راست منتقل می‌شود؛ یعنی ناحیه دوشاخگی[۱۶] در فرکانس‌های تحریک بالاتری اتفاق می‌افتد.

با توجه به مرور صورت گرفته مشاهده می‌شود که مطالعات محدودی در زمینه ناپایداری دینامیکی تیر با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی بودن هندسی موجود است. در مقاله حاضر هدف آن است که چنین مساله‌ای با ارائه یک مدل دقیق مورد تحلیل قرار گیرد. برای این منظور، تئوری تیر تیموشنکو که علاوه بر تیرهای نازک قابلیت مدل‌سازی تیرهای ضخیم را نیز دارد، مورد استفاده قرار گرفته است. با در نظر گرفتن مدل غیرخطی فن-کارمن[۱۷]، سینماتیک غیرخطی در محاسبات لحاظ شده است. در ادامه به کمک روش انرژی، معادلات حاکم بر

ناپایداری تیر و انواع شرایط مرزی متداول به دست می‌آید. روش تربیع دیفرانسیلی[18] نیز به منظور گسسته‌سازی دامنه طولی تیر به کار گرفته شده و با استفاده از عملگرهای مشتق‌گیر مربوطه، معادلات با مشتقات جزیی به دسته معادلات جبری غیرخطی تبدیل شده‌اند. نتایج حاصل از محدوده ناپایداری تیر، نشان‌دهنده صحت محاسبات صورت گرفته است.

۲-خواص مواد FGM

مطابق شکل (۱)، تیری ساخته شده از مواد FGM با مشخصات سطح مقطع شامل عرض b، ضخامت h و نیز طول L در نظر گرفته می‌شود که تحت بارگذاری دینامیکی در راستای محوری قرار دارد. در این قسمت نحوه توزیع خواص ماده در راستای ضخامت ارائه می‌شود. این تیر از ترکیبی از مواد فلزی و سرامیکی ساخته شده است که به صورت ماده تماماً فلزی در سطح زیرین $(z=-h/2)$ و ماده تماماً سرامیک $(z=h/2)$ در سطح فوقانی تعریف شده است. در نتیجه، خواص مؤثر ماده شامل مدول الاستیسیته E، نسبت پوآسون v و چگالی ρ عبارت‌اند از

$$E(z)=(E_c-E_m)V_f(z)+E_m \tag{۱}$$

$$\nu(z)=(\nu_c-\nu_m)V_f(z)+\nu_m \tag{۲}$$

$$\rho(z)=(\rho_c-\rho_m)V_f(z)+\rho_m \tag{۳}$$

که در آن m و c به ترتیب نشان‌دهنده خواص فلز و سرامیک بوده و

$$V_f(z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^k \tag{۴}$$

که k اندیس ماده است.

۳- معادلات حاکم و شرایط مرزی

بر اساس تئوری تیر تیموشنکو، میدان جابجایی تیر برابر است با

$$\begin{aligned}&u(x,z,t)=u_0(x,t)+z\psi(x,t),\quad v(x,z,t)=0\\&w(x,z,t)=w_0(x,t)\end{aligned} \tag{۵}$$

با در نظر گرفتن فرضیات غیرخطی فن-کارمن، روابط کرنش – جابجایی به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_0}{\partial x}+z\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\\&\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\psi\right)\end{aligned} \tag{۶}$$

که در نتیجه آن، تنش‌های به وجود آمده به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}=(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+z\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)\\&\sigma_{xz}=k_s\mu\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\psi\right)\end{aligned} \tag{۷}$$

در این روابط k_s ضریب تصحیح برشی بوده و ثوابت ماده عبارت‌اند از:

$$\lambda=\frac{Ev}{(1+v)(1-2v)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+v)} \tag{۸}$$

به این ترتیب، انرژی کرنشی سازه به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}&\Pi_S=\frac{1}{2}\int_0^L\int_S\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dSdx=\\&\frac{1}{2}\int_0^L\left\{N\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)+M\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+Q\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\psi\right)\right\}dx\end{aligned} \tag{۹}$$

نیروها و گشتاورهای متنجه در رابطه (۹) مطابق پیوست ۱ می باشد.

همچنین، انرژی جنبشی تیر به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود.

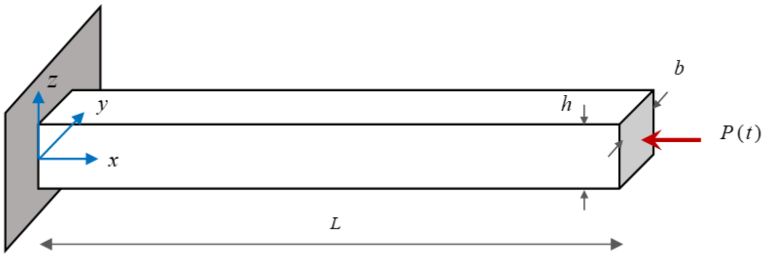
$$\begin{aligned}&\Pi_T=\frac{1}{2}\int_0^L\int_S\rho\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right)dSdx=\\&\frac{1}{2}\int_0^L\int_S\rho\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}+z\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right)dSdx=\\&\frac{1}{2}\int_0^L\left(I_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)+2I_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+I_3\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+I_1\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right)dx\end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در رابطه (۱۰) ضرایب اینرسی به صورت ذیل است.

$$\{I_1,I_2,I_3\}=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(z)\{1,z,z^2\}dz \tag{۱۱}$$

علاوه بر آن، کار حاصل از نیروی محوری P عبارت است از

$$\Pi_W=\frac{1}{2}\int_0^L P\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2dx \tag{۱۲}$$



شکل ۱- نمای شماتیک از تیر در معرض ناپایداری دینامیکی

اکنون می‌توان با جایگذاری انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و کار خارجی سازه در اصل همیلتون

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\left(\Pi_T - \Pi_S + \Pi_W\right) dt = 0 \qquad (۱۳)$$

و تعیین تغییرات[19] نسبت به پارامترهای میدان جابجایی u، w و ψ، معادلات حاکم را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (۱۴)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(N \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) - P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \qquad (۱۵)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \qquad (۱۶)$$

و سپس شرایط مرزی در دو انتهای تیر به صورت

$$N = 0 \quad \text{or} \quad \delta u = 0\,, \quad @\, x = 0, L \qquad (۱۷)$$

$$N \frac{\partial w}{\partial x} + Q = 0 \quad \text{or} \quad \delta w = 0\,, \quad @\, x = 0, L \qquad (۱۸)$$

$$M = 0 \quad \text{or} \quad \delta \psi = 0\,, \quad @\, x = 0, L \qquad (۱۹)$$

تعیین می‌شوند.

با جایگذاری کمیت‌های منتجه، فرم نهایی معادلات حاکم به دست می‌آید.

$$C_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + C_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (۲۰)$$

$$\begin{aligned} &C_4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + C_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ &+ C_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\right) - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

$$\begin{aligned} &C_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + C_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - C_4\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi\right) \\ &= I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

همچنین، شرایط مرزی مختلف برای تکیه‌گاه گیردار، تکیه‌گاه ساده و انتهای آزاد به صورت پیوست ۲ می باشد.

۴- فرآیند حل مساله

در این بخش، با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی، معادلات به دست آمده به شکل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات معمولی تبدیل خواهد شد. با استفاده از عملگرهای مشتق‌گیر تعریف شده در این روش، معادلات در دامنه تیر گسسته‌سازی می‌شوند. برای این منظور، از فرم زیر برای توزیع نقاط استفاده می‌شود.

$$x_i = \frac{L}{2}\left(1 - \cos\frac{i-1}{n-1}\pi\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۲۳)$$

به این طریق بردارهای سینماتیکی تیر تعریف شده

$$\begin{aligned} u &= \left[u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n\right]^T, \\ w &= \left[w_1 \quad w_2 \quad \ldots \quad w_n\right]^T, \\ \Psi &= \left[\psi_1 \quad \psi_2 \quad \ldots \quad \psi_n\right]^T \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

و معادلات گسسته‌سازی شده حاکم بر سیستم استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned} &C_1\left(\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{u} + \left(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{w}\right)\circ\left(\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{w}\right)\right) \\ &+ C_2 \mathbf{D}^{(2)}\boldsymbol{\Psi} = I_1 \ddot{\mathbf{u}} + I_2 \ddot{\boldsymbol{\Psi}} \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

$$C_4\left(\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{w} + \mathbf{D}^{(1)}\boldsymbol{\Psi}\right) + \qquad (۲۶)$$

ادامه (۲۶)

$$C_1\left(\begin{array}{l}\left(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{u}\right)\circ\left(\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{w}\right)+\left(\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{u}\right)\circ\left(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{w}\right)+\\ \frac{3}{2}\left(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{w}\right)\circ\left(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{w}\right)\circ\left(\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{w}\right)\end{array}\right)+$$
$$C_2\left(\left(\mathbf{D}^{(1)}\boldsymbol{\Psi}\right)\circ\left(\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{w}\right)+\left(\mathbf{D}^{(2)}\boldsymbol{\Psi}\right)\circ\left(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{w}\right)\right)-$$
$$P\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{w}=I_1\ddot{\mathbf{w}}$$

$$C_2\left(\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{u}+\left(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{w}\right)\circ\left(\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{w}\right)\right)+$$
$$C_3\mathbf{D}^{(2)}\boldsymbol{\Psi}-C_4\left(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{w}+\boldsymbol{\Psi}\right)=I_3\ddot{\boldsymbol{\Psi}}+I_2\ddot{\mathbf{u}} \quad (۲۷)$$

در این روابط، مشتق مکانی مرتبه r–ام میدان مجهولات به صورت زیر محاسبه شده است.

$$\frac{\partial^r\mathbf{u}}{\partial x^r}=\mathbf{D}^{(r)}\mathbf{u} \quad (۲۸)$$

که در آن، مؤلفه‌های عملگرهای مشتق‌گیر عبارت‌اند از:

$$D_{ij}^{(1)}=\frac{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\left(x_i-x_k\right)}{\left(x_i-x_j\right)\prod_{k=1,k\neq j}^{n}\left(x_j-x_k\right)}, \quad (۲۹)$$

$$i,j=1,\ldots,n,\quad i\neq j$$

$$D_{ij}^{(r)}=r\left(D_{ii}^{(r-1)}D_{ij}^{(1)}-\frac{D_{ij}^{(r-1)}}{\left(\xi_i-\xi_j\right)}\right), \quad (۳۰)$$

$$i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j,\ r=2,\ldots,n-1$$

لذا می‌توان معادلات نهایی مساله را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\left(\mathbf{K}-P\mathbf{K}_g\right)\mathbf{q}=0 \quad (۳۱)$$

که در این رابطه، بردار جابجایی کلی $\mathbf{q}$، ماتریس اینرسی $\mathbf{M}$ و ماتریس سختی هندسی $\mathbf{K}_g$ برابر هستند با:

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{w}\\ \boldsymbol{\Psi}\end{bmatrix}, \quad (۳۲\text{–الف})$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}I_1\mathbf{D}^{(0)} & 0 & I_2\mathbf{D}^{(0)}\\ 0 & I_1\mathbf{D}^{(0)} & 0\\ I_2\mathbf{D}^{(0)} & 0 & I_3\mathbf{D}^{(0)}\end{bmatrix}, \quad (۳۲\text{–ب})$$

$$\mathbf{K}_g=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{D}^{(2)} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (۳۲\text{–پ})$$

همچنین ماتریس سختی تیر که شامل جملات خطی ($\mathbf{K}_l$) و غیرخطی ($\mathbf{K}_{n1}$ و $\mathbf{K}_{n2}$) است، در پیوست ۳ قابل مشاهده است.

۵- تحلیل پایداری دینامیکی

به منظور بررسی ناپایداری دینامیکی تیر، بار محوری وارده ترکیبی از بار استاتیکی P_0 و بار هارمونیک دینامیکی P_1 خواهد بود.

$$P=P_0+P_1\cos\left(\Omega t\right) \quad (۳۳)$$

که در رابطه (۲۳)، Ω فرکانس تحریک است. این نیرو بر حسب بار بحرانی کمانش استاتیکی P_{cr} و توسط ضرایب α و β بازنویسی می‌شود.

$$P=\left(\alpha+\beta\cos\left(\Omega t\right)\right)P_{cr} \quad (۳۴)$$

لازم به ذکر است که نیروی بحرانی کمانش با صرف‌نظر کردن از جمله اینرسی ($\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}$) و جملات غیرخطی سفتی ($\mathbf{K}_{n1}$ و $\mathbf{K}_{n2}$) و به تبع آن، حل معادله مقدار ویژه[20] زیر به دست می‌آید.

$$\left(\mathbf{K}_l-P_{cr}\mathbf{K}_g\right)\mathbf{q}=\mathbf{0} \quad (۳۵)$$

همچنین فرکانس طبیعی در ارتعاشات آزاد تیر (ω) با اعمال پاسخ حالت پایدار $\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}e^{i\omega t}$ در مدل خطی و صرف‌نظر کردن از نیروی محوری تعیین می‌شود.

$$\left(\mathbf{K}_l-\omega^2\mathbf{M}\right)\bar{\mathbf{q}}=\mathbf{0} \quad (۳۶)$$

نتایج آزمون‌های تجربی و نتایج موجود در مقالات مانند مرجع [۷] نشان می‌دهد که وقتی یک ستون به صورت هارمونیک طولی با پریود T تحریک می‌شود معمولا پاسخ غالب ناپایداری عرضی در 2T غالب است و برای ضرایب بالاتر، فرکانس‌های غالب خیلی تغییر نمی‌کند و فقط ابعاد ماتریس و دترمینان حل بالا می‌رود. بدیهی است از نظر ریاضی با توجه به نیروی اعمالی، پیش‌بینی می‌شود که پاسخ زمانی مساله دارای دوره تناوب mT باشد که در آن $T=2\pi/\Omega$ دوره تناوب تحریک بوده و m یک عدد صحیح است. بالا بردن ضریب m فقط ابعاد

دترمینان را بزرگ و درجه معادله مقدار ویژه را زیاد می‌کند و نتایج نشان می‌دهد که فرکانس‌های ناپایداری پایه یا اول خیلی تغییر نمی‌کند. این موضوع توسط بولوتین در کتاب خود با نام ناپایداری دینامیکی سازه‌ها نشان داده شده است. این کتاب در اکثر مقالات مرجع این مقاله مورد اشاره قرار گرفته و در مرجع [۷] هم به آن اشاره شده است. موضوع از نظر ریاضی کاملاً بدیهی است. مثلا اگر یک سیستم پیوسته با مدل جرم و فنر دو درجه آزادی مدل شود و یک بار هم با سه درجه آزادی، آنگاه ملاحظه می‌شود که فرکانس پایه محاسبه شده تغییر زیادی ندارد و فقط با افزایش درجات آزادی حجم محاسبات بالا می‌رود، با اینکه دقت محاسبه مودهای بالاتر بیشتر می‌شود و دسترسی به مودهای بالاتر میسر می‌شود اما افزایش ابعاد دترمینان مقدار ویژه تاثیر بسیار اندکی روی مودهای غالب پایه بنیادی[۲۱] دارد. لذا میدان جابجایی مساله عبارت است از:

$$\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}_1\cos\left(\Omega t/2\right)+\bar{\mathbf{q}}_2\sin\left(\Omega t/2\right) \qquad (۳۷)$$

با جایگذاری رابطه (۳۷) در معادلات، می‌توان نوشت:

$$[-\frac{\Omega^2}{4}\begin{bmatrix}\mathbf{M} & 0\\ 0 & \mathbf{M}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K} & 0\\ 0 & \mathbf{K}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)P_{cr}\mathbf{K}_g & 0\\ 0 & \left(\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)P_{cr}\mathbf{K}_g\end{bmatrix}]\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{q}}_1\\ \bar{\mathbf{q}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۳۸)$$

ملاحظه می‌شود که رابطه (۳۸) بیانگر دو معادله غیرکوپل[۲۲] است. بنابراین می‌توان معادلات جبری غیرخطی نهایی را به صورت ساده چنین بازنویسی کرد.

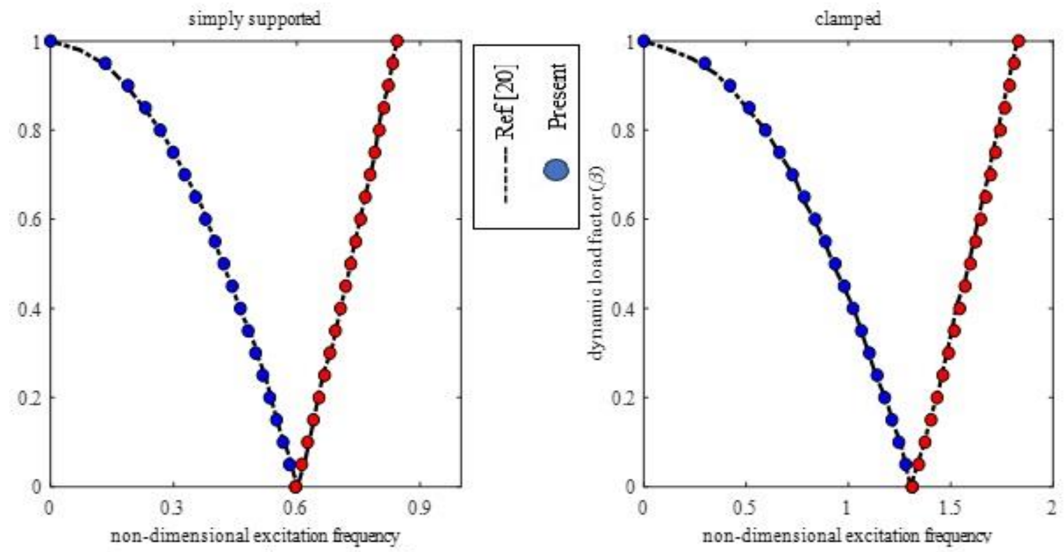
$$-\frac{\Omega^2}{4}\mathbf{M}+\mathbf{K}-\left(\left(\alpha\pm\frac{1}{2}\beta\right)P_{cr}\mathbf{K}_g\right)\bar{\mathbf{q}}=\mathbf{0} \qquad (۳۹)$$

با حل این معادله به طور جداگانه برای علامت‌های منفی و مثبت، دو شاخه مربوط به محدوده پایداری تیر در نمودار Ω برحسب β تشخیص داده می‌شود. همان طور که در متن قبل از رابطه (۳۷) توضیح داده شد برای محاسبه مرزهای ناپایداری دینامیکی از روش مودهای غالب 2T استفاده شده است. رابطه (۳۸) یک سیستم مقدار ویژه است که دو معادله از هم واجفت هستند و به سادگی معادله جبری غیر خطی (۳۹) بدست می‌آید که مبین مرزها است و به سادگی رسم می‌شود. مثلا در این رابطه بین Ω و α یک رابطه درجه دو سهموی است و قابل رسم است و مبین مرزها می‌شود. در اکثر نمودارها با استفاده از روش پیشنهادی دو سهمی شاخه‌ای با علامت مثبت معادله (۳۹) و شاخه دیگر با علامت منفی معادله (۳۹) رسم شده و به نمودارهای هفتی در مقالات معروف هستند. اگر معادله (۳۹) خطی فرض می‌شد دو منحنی موجود در نمودار هفتی به جای منحنی سهموی، دو خط می‌شد.

۶- تحلیل نتایج

در این قسمت به بررسی ویژگی‌های ناپایداری دینامیکی تیرهای FGM در قالب مثال‌های عددی مختلف پرداخته می‌شود. ابتدا به منظور حصول اطمینان از صحت معادلات به دست آمده و روش حل به کار گرفته شده، نتایج تحقیق حاضر با مراجع مرتبط مقایسه شده است. سپس، تأثیرات غیرخطی بودن هندسی مواد، شرایط مرزی دو انتهای تیر، مؤلفه استاتیکی بار، اندیس ماده FGM و نسبت طول به ضخامت تیر بر ناحیه پایداری در قالب چند مورد مطالعاتی بررسی می‌شود.

شکل (۲) نشان‌دهنده اعتبارسنجی صورت گرفته میان خروجی مطالعه حاضر و نتایج گزارش شده در مرجع [۲۴] است. برای این منظور، مدل سینماتیکی کاهش یافته‌ای از این پژوهش(کاهش به تئوری کلاسیک) که تنها شامل روابط غیرخطی کرنش – جابجایی باشد لحاظ شده است. همچنین، با توجه به تحلیل انجام شده بر اساس تئوری‌های مرتبه بالای الاستیسیته در مرجع [۲۴]، نتایج کلاسیک این مقاله به منظور مقایسه مدنظر می‌باشد. چنانچه مشاهده می‌شود در هر دو شرایط مرزی با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار در دو انتهای تیر، تطابق کاملی میان نتایج وجود دارد که بیانگر صحت مطالعه صورت گرفته است. لازم به ذکر است که ناحیه میان دو شاخه مربوط به وضعیت ناپایداری دینامیکی بوده و محدوده خارج از



شکل ۲- مقایسه نتایج حاصل از محدوده ناپایداری دینامیکی تیر بر اساس پژوهش حاضر و مرجع [۲۴]

آن نشان دهنده حالت پایدار است.

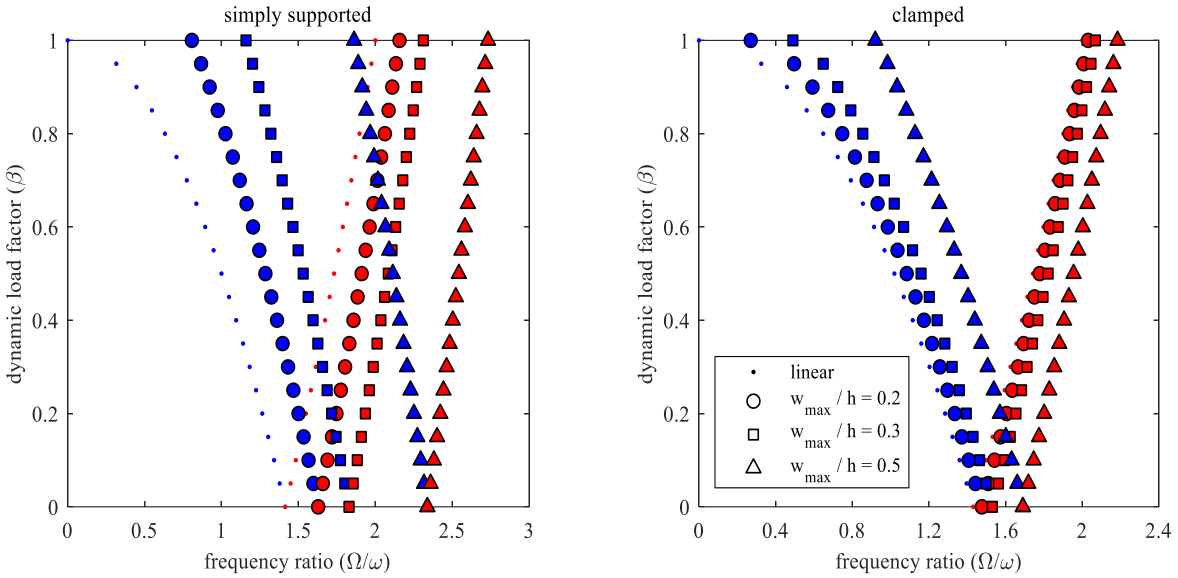
در ادامه، مثال‌های عددی مختلف برای تیری با سطح مقطع مربعی و ضریب تصحیح k_S=5/6 در نظر گرفته می‌شود. همچنین، فرض می‌شود که تیر FGM مورد نظر به ترتیب از ترکیب مواد SUS304 و Si_3N_4 با مشخصات مادی E_m=201.04GPa، v_m=0.32، ρ_m=8166kg/m^3 و E_c=384.43GPa، v_c=0.24، ρ_c=2370kg/m^3 [۲۵] ساخته شده است. در تمامی موارد، شرایط مرزی ساده و گیردار در نظر گرفته شده است.

در شکل (۳) محدوده ناپایداری تیرهای FGM بر اساس مدل خطی و انواع مدل‌های غیرخطی هندسی به نمایش در آمده است. تحلیل غیرخطی مساله متناظر با تغییرشکل‌های بزرگ در تیر بوده است؛ به این معنا که در هر مورد مقدار بیشینه‌ای برای جابجایی عرضی در نظر گرفته شده و به ازای مقادیری از α و β، فرکانس غیرخطی از فرآیند تکرارشونده نیوتن – رافسون تعیین می‌شود. مشاهده می‌شود که چنانچه جابجایی تیر بزرگ باشد، نتایج مدل غیرخطی به شکل قابل ملاحظه‌ای متفاوت با نتایج حاصل از فرضیات سینماتیک خطی است که این امر بیانگر وجود خطا در به کار گیری مدل خطی است.

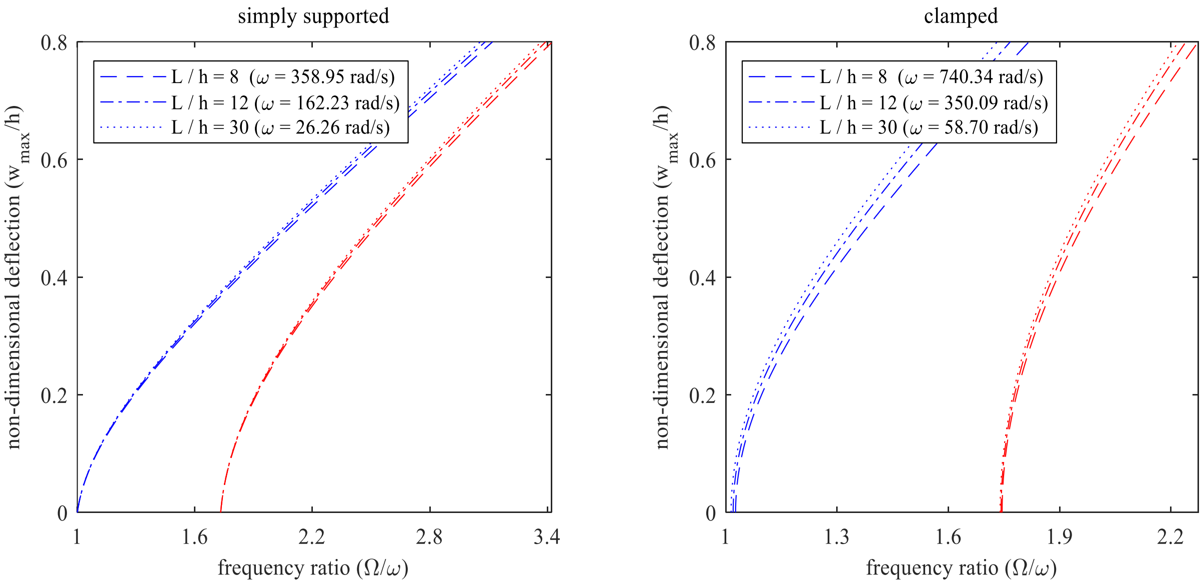
نتایج ارائه شده در شکل (۴) که به پاسخ‌های فرکانسی موسوم‌اند، به منظور تأکیدی بر اهمیت غیرخطی بودن مدل مورد بررسی به تصویر کشیده شده‌اند. چنانچه ملاحظه می‌شود، فرکانس تحریک تیر به شدت وابسته به میزان تغییر شکل‌های ایجاد شده در سازه است. بنابراین، در صورت جابجایی‌های بزرگ در تیر، لازم است تا مدل سینماتیکی غیرخطی در محاسبات اعمال گردد. نمودارهای رسم شده، اثرات نسبت طول به ضخامت تیر در مدل تیر تیموشنکو را نشان می‌دهند.

در شکل (۵) اثرات ضریب بار استاتیکی بر محدوده پایداری دینامیکی تیر مورد تحقیق قرار گرفته است. در هر دو نوع شرایط مرزی با افزایش مقادیر بار استاتیکی، فرکانس‌های متناظر با دو شاخه ناحیه ناپایداری کاهش خواهند یافت. همچنین به ازای α=0.75، مشاهده می‌شود شاخه سمت چپ (که از علامت مثبت در رابطه نهایی تحلیل پایداری دینامیکی ناشی می‌شود) تنها به ازای مقادیر $0 < \beta < 0.5$ منجر به تعیین مقادیری حقیقی از فرکانس‌های تحریک خواهد شد.

در آخرین مورد مطالعاتی، شکل (۶) به منظور بررسی تأثیر اندیس ماده در پایداری تیرهای FGM ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که با عبور از ماده سرامیکی به فلزی، محدوده ناپایداری دینامیکی کاهش قابل‌ملاحظه‌ای پیدا می‌کند. همچنین لازم به ذکر است، از آنجا که فرکانس طبیعی سازه به ازای k دچار



شکل ۳- محدود ناپایداری دینامیکی بر اساس مدل‌های خطی و غیرخطی $\alpha = 0.5\ ,\ k = 1\ ,\ L/h = 12\ ,\ (\omega = 162.23\,rad/s)$

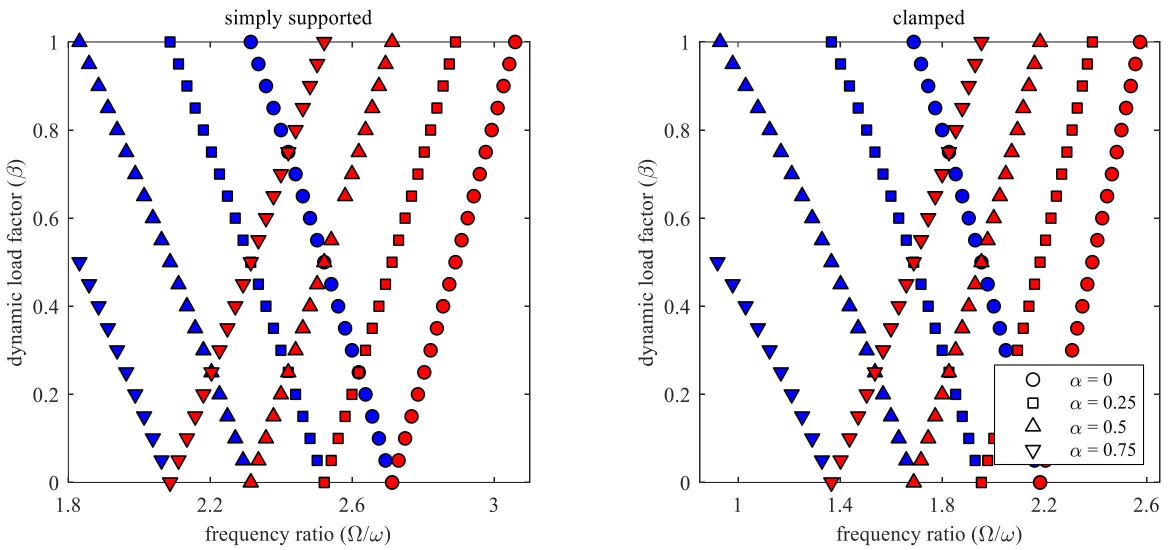


شکل ۴- پاسخ‌های فرکانسی به ازای مقادیر مختلف L/h , $K = 1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$

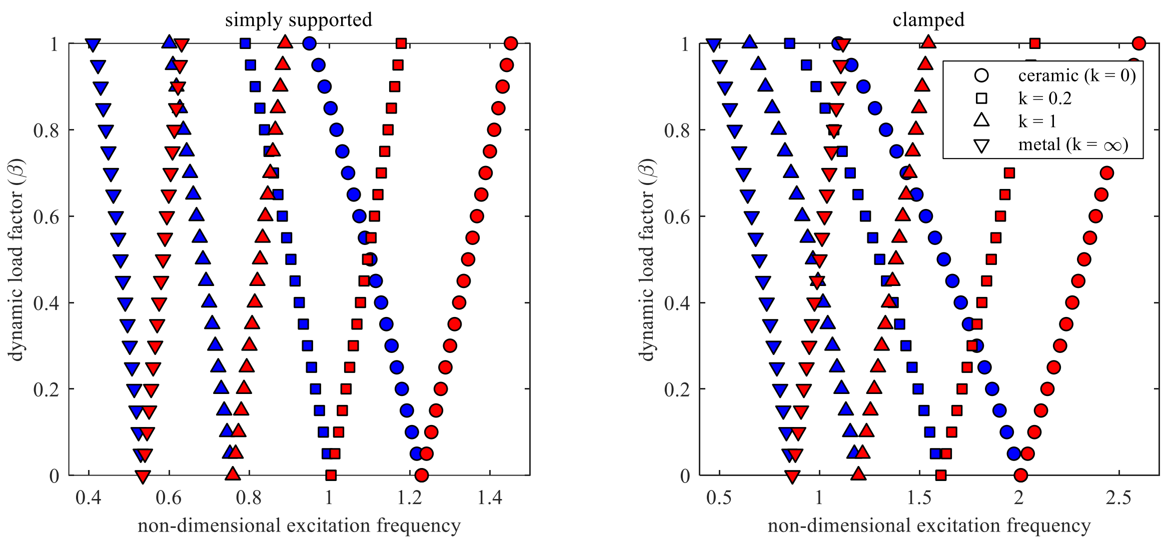
تغییر می‌شود، محور افقی نمودارها به صورت فرکانس بدون بعد $\Omega L\sqrt{\rho_m/(\lambda_m + 2\mu_m)}$ تعریف شده است.

۷- نتیجه گیری

آنچه در این مقاله مورد ارزیابی قرار گرفت، تعیین مشخصه‌های مکانیکی مربوط به ناپایداری دینامیکی تیرهای FGM بر اساس مدل سینماتیکی غیرخطی بوده است. تیر مورد نظر با استفاده از تئوری تیموشنکو مدل شده و از فرضیات فن-کارمن برای تعیین غیرخطی بودن هندسی ماده استفاده شده است. با به کارگیری اصل همیلتون، معادلات دیفرانسیلی و شرایط مرزی تیر استخراج شده‌اند و در ادامه نیز، روش عددی تربیع دیفرانسیلی برای حل مساله اتخاذ شده است. با ارائه مطالعه



شکل ۵- تأثیرات ضریب بار استاتیکی بر محدوده پایداری $w_{max}/h=0.5$, $k=1$, $L/h=12$, $(\omega=162.23\,\mathbf{rad}/s)$



شکل ۶- تأثیرات اندیس ماده FGM بر محدوده پایداری $w_{max}/h=0.5$, $\alpha=0.5$, $L/h=12$

پارامتری برحسب شرایط مرزی مختلف و انواع مدل‌های سینماتیکی خطی و غیرخطی، محدوده پایداری تیرهای FGM با در نظر گرفتن تغییرات پارامترهای مختلف به نمایش در آمده است. از نتایج عددی به دست آمده، نتیجه می‌شود که با در نظر گرفتن مدل غیرخطی، کاهش ضریب بار استاتیکی و در مواد از جنس سرامیک، ناپایداری به ازای فرکانس‌های تحریک بالاتری اتفاق می‌افتد. نکته حائز اهمیت آن است که اثرات غیرخطی بودن هندسی بسیار چشمگیر بوده و لذا در شرایط کارکرد واقعی تیر در سازه‌های مهندسی، باید از مدل‌های سینماتیکی غیرخطی در تعیین محدوده پایداری دینامیکی استفاده نمود.

واژه‌نامه

1. functionally graded material (FGM)
2. euler-bernoulli beam theory
3. galerkin method
4. assumed mode method
5. flutter
6. bolotin's harmonic balance method
7. carbon nanotubes (Cnt)
8. graphene nanoplatelets (Gpls)
9. modified couple stress theory
10. high-order shear deformation theory
11. mori–tanaka scheme
12. material length-scale parameter
13. nonlocal theory
14. mathieu-hill equation
15. Floquet-lyapunov theory
16. branching
17. Von-karman nonlinearity
18. differential quadrature method
19. variation
20. eigenvalue equation
21. fundamental
22. uncoupled
23. Newton-Raphson method

مراجع

1. Fu, Y., Wang, J., and Mao, Y., "Nonlinear Analysis of Buckling, Free Vibration and Dynamic Stability for the Piezoelectric Functionally Graded Beams in Thermal Environment", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 9, pp. 4324-4340, 2012.
2. Chen, L. W., Lin, C. Y., and Wang, C. C., "Dynamic Stability Analysis and Control of a Composite Beam with Piezoelectric Layers", *Composite Structures*, Vol . 56, No. 1, pp. 97-109, 2002.
3. Yang, W. P., Chen, L. W., and Wang, C. C., "Vibration and Dynamic Stability of a Traveling Sandwich Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 285, No. 3, pp. 597-614, 2005.
4. Lee, H., "Dynamic Stability of a Tapered Cantilever Beam on an Elastic Foundation Subjected to a Follower Force", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, No. 10, pp. 1409-1424, 1996.
5. Zheng, X., Zhang, J., and Zhou, Y., "Dynamic Stability of a Cantilever Conductive Plate in Transverse Impulsive Magnetic Field", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, No. 8, pp. 2417-2430, 2005.
6. Shahmohammadi, M. A., Azhari, M., Saadatpour, M. M., Salehipour, H., and Civalek, Ö., "Dynamic Instability Analysis of General Shells Reinforced with Polymeric Matrix and Carbon Fibers Using a Coupled IG-SFSM Formulation", *Composite Structure*s, Vol. 263, pp.113720, 2021.
7. Pölöskei, T., and Szekrényes, A., "Dynamic Stability of a Structurally Damped Delaminated Beam Using Higher Order Theory", *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2018, pp. 1-15, 2018.

[8] Dario Aristizabal-Ochoa, J., "Static and Dynamic Stability of Uniform Shear Beam-Columns under Generalized Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 307, No. 1-2, pp. 69-88, 2007.

9. Salehipour, H., Emadi, S., Tayebikhorami, S., and Shahmohammadi, M.A., "A Semi-Analytical Solution for Dynamic Stability Analysis of Nanocomposite/Fibre-Reinforced Doubly-Curved Panels Resting on the Elastic Foundation in Thermal Environment", *The European Physical Journal Plu*s, Vol. 137, No. 1, pp.1-36, 2022.
10. Malekzadeh, K., Khalili, M., and Mittal, R., "Local and Global Damped Vibrations of Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-Order Approach", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, Vol. 7, No. 5, pp. 431-456, 2005.
11. Banerjee ,J., Cheung, C., Morishima, R., Perera, M., and Njuguna, J., "Free Vibration of a Three-Layered Sandwich Beam Using the Dynamic Stiffness Method and Experiment", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 22-23, pp. 7543-7563, 2007.
12. Karaagac, C., ÖZTÜRK, H., Sabuncu, M., "Lateral Dynamic Stability Analysis of a Cantilever Laminated Composite Beam with an Elastic Support", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 7, No. 3, pp. 377-402, 2007.
13. Pradhan, M., Dash, P., and Pradhan, P., "Static and Dynamic Stability Analysis of an Asymmetric Sandwich Beam Resting on a Variable Pasternak Foundation Subjected to Thermal Gradient", *Meccanica*, Vol. 51, No. 3, pp. 725-739, 2016.
14. Wang, J., Shen, H., Zhang, B., and Liu, J., "Studies on the Dynamic Stability of an Axially Moving Nanobeam Based on the Nonlocal Strain Gradient Theory", *Modern Physics Letters B*, Vol. 32, No. 16, pp. 1850167, 2018.
15. Frostig,Y., Baruch, M., Vilnay, O., and Sheinman, I., "High-Order Theory for Sandwich-Beam Behavior with Transversely Flexible Core", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 5, pp. 1026-1043, 1992.
16. Yeh, J. Y., Chen, L. W., and Wang, C. C., "Dynamic Stability of a Sandwich Beam with a Constrained Layer and Electrorheological Fluid Core", *Composite Structures*, Vol. 64, No. 1, pp. 47-54, 2004.
17. Bozhevolnaya, E., and Frostig, Y., "Free Vibrations of Curved Sandwich Beams with a Transversely Flexible Core", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, Vol. 3, No. 4, pp. 311-342, 2001.
18. Sahmani, S., Ansari, R., Gholami R., and Darvizeh, A., "Dynamic Stability Analysis of Functionally Graded Higher-order Shear Deformable Microshells Based on the Modified Couple Stress Elasticity

Theory", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 51, pp. 44-53, 2013.
19. Shahmohammadi, M. A., Mirfatah, S. M., Salehipour, H., Azhari, M., and Civalek, Ö., "Free Vibration and Stability of Hybrid Nanocomposite-Reinforced Shallow Toroidal Shells Using an Extended Closed-Form Formula Based on the Galerkin Method", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 29, No. 26, pp. 5284-5300.
20. Shahmohammadi, M.A., Mirfatah, S.M., Salehipour, H., Azhari, F. and Civalek, Ö., "Dynamic Stability of Hybrid Fiber/Nanocomposite-Reinforced Toroidal Shells Subjected to the Periodic Axial and Pressure Loadings", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 30, No. 8, pp.1547-1590, 2023.
21. Ansari, R., and Gholami, R., "Dynamic Stability of Embedded Single Walled Carbon Nanotubes Including Thermal Effects", *Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 39, pp. 153-161, 2015.
22. Ansari, R., Gholami, R., Sahmani, S., Norouzzadeh, A., and Bazdid-Vahdati, M., "Dynamic Stability Analysis of Embedded Multi-Walled Carbon Nanotubes in Thermal Environment", *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 28, No. 6, pp. 659-667, 2015.
23. Kolahchi, R., and Bidgoli, A. M., "Size-Dependent Sinusoidal Beam Model for Dynamic Instability of Single-Walled Carbon Nanotubes", *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 37, No. 2, pp. 265-274, 2016.
24. Ke, L. L., and Wang, Y. S., "Size Effect on Dynamic Stability of Functionally Graded Microbeams Based on a Modified Couple Stress Theory", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 342-350, 2011.
25. Reddy, J., and Chin, C., "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 21, No. 6, pp. 593-626, 1998.

پیوست ۱

$$N=\int_S \sigma_{xx}dS=C_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)+C_2\frac{\partial\psi}{\partial x}$$ (پ-۱)

$$M=\int_S \sigma_{xx}z\,dS=C_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)+C_3\frac{\partial\psi}{\partial x}$$ (پ-۲)

$$Q=\int_S \sigma_{xz}dS=C_4\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\psi\right)$$ (پ-۳)

که در آن

$$\{C_1,C_2,C_3\}=b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\lambda(z)+2\mu(z)\right)\{1,z,z^2\}dz,\qquad C_4=k_s b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mu(z)dz$$ (پ-۴)

پیوست ۲

تکیه‌گاه گیردار:

$$u=w=\psi=0$$ (پ-۵)

تکیه‌گاه ساده

$$u=w=C_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+C_3\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$ (پ-۶)

انتهای آزاد:

$$
\begin{aligned}
&C_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+C_2\frac{\partial \psi}{\partial x}=\\
&C_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right)+C_2\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+C_4\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)=\\
&C_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+C_3\frac{\partial \psi}{\partial x}=0
\end{aligned}
\tag{پ-۷}
$$

پیوست ۳

$$\mathbf{K}=\mathbf{K}_l+\frac{1}{2}\mathbf{K}_{n1}+\frac{1}{3}\mathbf{K}_{n2} \tag{پ-۸}$$

$$\mathbf{K}_l=\begin{bmatrix} C_1\mathbf{D}^{(2)} & 0 & C_2\mathbf{D}^{(2)} \\ 0 & C_4\mathbf{D}^{(2)} & C_4\mathbf{D}^{(1)} \\ C_2\mathbf{D}^{(2)} & -C_4\mathbf{D}^{(1)} & C_3\mathbf{D}^{(2)}-C_4\mathbf{D}^{(0)} \end{bmatrix} \tag{پ-۹}$$

$$\mathbf{K}_{n1}=\mathbf{P}_1\left(\langle\mathbf{Q}_1\mathbf{q}\rangle\mathbf{Q}_2+\langle\mathbf{Q}_2\mathbf{q}\rangle\mathbf{Q}_1\right) \tag{پ-۱۰}$$

$$\mathbf{K}_{n2}=\mathbf{P}_2\left(\langle\mathbf{Q}_3\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{Q}_4\mathbf{q}\rangle\mathbf{Q}_5+\langle\mathbf{Q}_5\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{Q}_3\mathbf{q}\rangle\mathbf{Q}_4+\langle\mathbf{Q}_4\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{Q}_5\mathbf{q}\rangle\mathbf{Q}_3\right) \tag{پ-۱۱}$$

که در آن، $\langle\mathbf{X}\rangle$ بیانگر ماتریس قطری متناظر با بردار $\mathbf{X}$ بوده و

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} C_1\mathbf{D}^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1\mathbf{D}^{(0)} & C_1\mathbf{D}^{(0)} & C_2\mathbf{D}^{(0)} & C_2\mathbf{D}^{(0)} \\ C_2\mathbf{D}^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}C_1\mathbf{D}^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{پ-۱۲}$$

$$\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^{(1)} & 0 \\ \mathbf{D}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}^{(1)} \\ 0 & \mathbf{D}^{(1)} & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^{(2)} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{(2)} & 0 \\ \mathbf{D}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{پ-۱۳}$$

$$\mathbf{Q}_3=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^{(1)} & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_4=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^{(1)} & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_5=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \tag{پ-۱۴}$$

لازم به ذکر است که به کمک فرم ماتریسی - برداری ارائه شده در فوق برای معادلات غیرخطی، می‌توان به شکل مستقیم از روش‌های حل مختلف مانند روش نیوتن - رافسون[۲۳] استفاده نمود.