

## مروری بر روش‌های محاسبه انتگرال‌های درون دامنه در روش المان‌های مرزی

لیلا نجار زاده، بشیر موحدیان عطار\* و مجتبی ازهری  
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۰۸ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۰۹/۰۷)

**چکیده** - این مقاله به مروری بر انواع روش‌های حل انتگرال‌های داخل دامنه در روش المان‌های مرزی می‌پردازد. ظهور انتگرال‌های درون دامنه در فرمول‌بندی روش اجزای مرزی، عمدتاً از جمله اینرسی در مسائل دینامیکی، نیروهای بدنه در مسائل استاتیکی و یا اثرات ناهمگنی ماده نشأت می‌گیرد. در حل مسائل با استفاده از روش‌های المان‌های مرزی رویکردهای متعددی برای محاسبه انتگرال‌های مرزی و درون دامنه وجود دارد. انتخاب نوع روش انتگرال‌گیری تأثیر بسیار مهمی بر سرعت و دقت حل مسئله دارد. در این تحقیق، مروری جامعی از روش‌های محاسبه انتگرال‌های درون دامنه با دو نگرش مبتنی بر شبکه‌بندی دامنه و گسسته‌سازی منحصر به مرز، ارائه خواهد شد. با توجه به محبوبیت رویکردهای بدون نیاز به شبکه‌بندی دامنه، در این بررسی تمرکز بیشتری به ارائه فرمول‌بندی چنین روش‌هایی اختصاص یافته و دو روش متداول تقابل دوگانه و انتگرال‌گیری شعاعی به عنوان شیوه کارآمدتر و سریع‌تر از میان این روش‌ها شرح داده می‌شوند. در پایان نیز جزییات روش انتگرال‌گیری شعاعی اصلاح شده برای محاسبه انتگرال‌های درون دامنه‌های غیر محدب بیان خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: روش المان مرزی، انتگرال‌های درون دامنه، روش تقابلی دوگانه، روش انتگرال‌گیری شعاعی اصلاح شده.

## A Review on Techniques of Domain Integrals Computation in Boundary Elements Method

L. Najarzadeh, B. Movahedian Attar\* and M. Azhari

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

**Abstract:** In this article, a review of the evaluation methods of the domain integrals in the boundary element method will be presented. The emergence of domain integrals in the formulation of the boundary element method mainly originates from the inertia term in dynamic problems, body forces in static problems or the effects of material heterogeneity. There are several approaches to calculate boundary and domain integrals in boundary element methods. Choosing the type of integration method has a prominent effect on the accuracy of the numerical solution. In this research, a comprehensive review on the techniques of domain integrals computation will be presented based on two approaches, i.e. domain splitting, and converting the domain integrals to boundary ones. The review focuses primarily on the formulation of approaches without requiring domain splitting, because of their popularity. Among them, the dual reciprocity method and the radial integration method have been described as the most efficient. At the end, the details of the modified radial integration method for calculating the integrals within non-convex domains will be stated.

\*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: b.movahedian@iut.ac.ir

**Keywords:** *Boundary elements method, Domain integrals, Dual reciprocity method, Modified radial integration method.*

## فهرست علائم

انتگرال درون دامنه	$I$	ضریب ثابت سری توابع شعاعی	$\alpha$
بردار یکه عمود بر مرز	$\vec{n}$	مرز مسأله	$\Gamma$
پاسخ همگن معادله حاکم	$u_H$	دامنه حل	$\Omega$
پاسخ خصوصی معادله حاکم	$u_p$	نیروی بدنه	$f$
تابع هسته	$v$	تابع پایه شعاعی	$f_i$

### ۱- مقدمه

داخل دامنه محاسباتی باعث برتری این روش در تحلیل مسائل شامل تغییرات شدید تنش همانند مسأله تمرکز تنش [۲ و ۳]، مسائل تماس و شکست [۴-۷]، است.

به‌رغم وجود مزایای ذکرشده، روش المان‌های مرزی دارای معایبی است که از جمله آن‌ها می‌توان به ضرورت وجود حل اساسی معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. روش المان‌های مرزی در بسیاری از مسائل تنها زمانی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد که حل اساسی معادله دیفرانسیل معلوم یا قابل محاسبه باشد. به‌طور مثال، این روش نمی‌تواند مستقیماً برای مسائلی با معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر که حل اساسی آن‌ها به‌طور صریح قابل تعیین نیست، استفاده شود. این رویکرد در مسائل غیرخطی که در آن‌ها اصل برهم‌نهی برقرار نیست، به‌طور مستقیم قابل استفاده نیست. در چنین مواردی انتگرال‌های روی دامنه پدیدار شده که مزیت شبکه‌بندی منحصر به مرز را تحت الشعاع قرار می‌دهد. همچنین، در صورتی که حل اساسی قابل محاسبه باشد، برای مسائل مختلف متفاوت و برحسب توابع مرتبه بالا مانند توابع کلونین<sup>۱</sup> و توابع بسل<sup>۲</sup> نوع دوم بیان می‌شود که به‌کارگیری این نوع توابع برای استخراج معادلات انتگرال مرزی دشوار است. این فرآیند مستلزم توجه خاص در محاسبه مشتقات، حد آن‌ها بر روی مرز و نقاط گوشه و حل عددی انتگرال‌های با تکنیکی ضعیف و قوی است. چنین رویه‌ای استفاده از روش المان‌های مرزی را برای مسائل دشوار می‌کند. در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای فائق آمدن بر معایب فوق‌الذکر انجام شده است [۱]. در این راستا، محققین به دنبال

مدلسازی عددی بسیاری از مسائل علمی و مهندسی مستلزم استفاده از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل یا معادلات انتگرالی بر روی مرز یا داخل دامنه خواهد بود. روش المان‌های مرزی به‌عنوان ابزاری قدرتمند در بسیاری از زمینه‌ها در علوم فیزیکی و مهندسی به کار گرفته می‌شود. در این روش معادلات دیفرانسیل حاکم به معادلات انتگرالی بر روی مرز تبدیل می‌شوند. جهت پیاده‌سازی این روش، مرز به اجزای کوچک تقسیم شده و همانند سایر روش‌های عددی، فرآیند حل مسئله به برآورد پاسخ یک دستگاه معادله جبری با جواب یکتا منجر خواهد شد.

استفاده از بیان انتگرالی معادلات مزایای بسیاری از جمله عدم نیاز به شبکه‌بندی کل دامنه دارد که این امر منجر به کاهش زمان لازم برای آماده‌سازی و نیز ذخیره‌سازی اطلاعات در حافظه رایانه خواهد شد. می‌توان به‌سادگی فرمول‌بندی را برای هر شکل پیچیده هندسی منطبق کرد، چون همه تقریب‌ها منحصر به مرز بوده و در نقاط داخلی تقریب اضافی وارد نمی‌شود. در روش المان‌های مرزی تنش‌ها و در حالت کلی مشتقات تابع پاسخ با دقت بالایی محاسبه می‌شوند. با توجه به این‌که در این رویکرد حل مسئله به‌صورت یک بیان انتگرالی ارائه می‌شود، می‌توان از آن همانند یک رابطه ریاضی پیوسته مشتق‌گیری کرد که این امر در روش اجزا محدود امکان‌پذیر نیست [۱]. به عبارت دیگر، دقت تابع مجهول و مشتقات آن در روش المان‌های مرزی یکسان است. مزیت پیوسته بودن حل در

اساسی روش المان‌های مرزی است که راه‌کارهای متنوعی برای حل آن‌ها ارائه شده است.

## ۲- روش‌های محاسبه انتگرال‌های دامنه

تمامی انتگرال‌های موجود در فرمول‌بندی روش المان‌های مرزی به غیر از انتگرال نیروی بدنه از نوع انتگرال‌های مرزی هستند. شکل کلی انتگرال دامنه در مسائل المان‌های مرزی، شامل دو جز نیروی بدنه  $f$  و تابع هسته  $v$  چنین بیان می‌شود:

$$I = \int_{\Omega} v f d\Omega \quad (1)$$

تابع هسته با توجه به معادله حاکم بر حل مسئله و نوع حل اساسی در روش المان مرزی تعیین می‌گردد و تابعی از شعاع بین نقطه مرجع و نقطه میدان است که شرح کامل آن در مرجع [۱۴] ارائه شده است. در موارد خاص به‌عنوان مثال زمانی که نیروی بدنه ثابت باشد، حل این انتگرال‌ها به راحتی صورت می‌پذیرد [۱]؛ لیکن در سایر حالات مانند مسائل غیرخطی و وابسته به زمان، محاسبه انتگرال‌های دامنه نیازمند بهره‌گیری از راهکارهای خاصی خواهد بود. انتگرال‌های درون دامنه در حالت کلی با دو نگرش گسسته‌سازی دامنه و تبدیل انتگرال‌های دامنه به انتگرال روی مرز محاسبه می‌شوند که در ادامه به بررسی آن‌ها پرداخته خواهد شد.

## ۲-۱ گسسته‌سازی دامنه حل

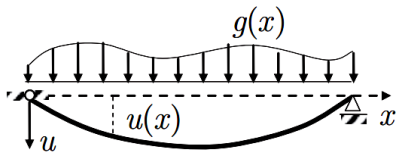
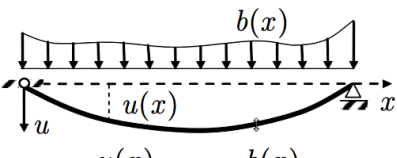
در این شیوه علاوه بر گسسته‌سازی مرز، همانند آنچه در روش اجزا محدود انجام می‌گردد، دامنه  $\Omega$  به تعداد محدودی از المان مثالی یا مستطیلی تقسیم می‌شود که در آن‌ها تغییرات مجهول مسئله معلوم فرض شده و با استفاده از توابع شکل به صورت خطی، ثابت و... درونیابی می‌شوند. این رویه در مقایسه با روش اجزا محدود به ازای درجات آزادی یکسان منجر به نتایج دقیق‌تری می‌شود [۱۵]. هرچند در این روش، شبکه‌بندی به پیچیدگی آنچه در روش اجزا محدود انجام می‌شود نیست، لیکن یکی از مزیت‌های اصلی روش المان‌های مرزی که کاهش درجات آزادی و ابعاد مسئله است را از بین می‌برد.

راه‌کاری بودند که مسائل کلی را با استفاده از حل اساسی ساده و معلوم معادله به بهای اعمال انتگرال‌های دامنه که خاصیت منحصر به مرز بودن این روش را از بین می‌برد، تحلیل کنند. یکی از این رویکردها، روش معادله آنالوگ<sup>۳</sup> (AEM) است که در آن یک مسئله معادل بدون نیاز به محاسبه حل اساسی جدید حل می‌شود. اصول معادله آنالوگ برای اولین بار در سال ۱۹۹۴ معرفی شد و با پیوند آن به روش المان‌های مرزی روش معادله آنالوگ توسعه یافت [۸].

بر اساس این ایده، هر معادله دیفرانسیل اعم از خطی و غیرخطی را می‌توان توسط یک معادله دیفرانسیل هم‌مرتبه با آن تحت یک منبع فرضی مجهول جایگزین کرد (جدول ۱). معادله جایگزین، معادله آنالوگ یا معادل نامیده می‌شود. بدیهی است، استفاده از رویکرد آنالوگ در روش المان‌های مرزی زمانی حائز اهمیت و مؤثر خواهد بود که یک معادله خطی با حل اساسی معلوم به عنوان معادله آنالوگ انتخاب شود. این روش مبنای حل انواع مسائل ورق در مرجع [۹] قرار گرفته است. در چند سال اخیر، نمونه‌هایی از کاربرد ایده معادله آنالوگ همراه با روش اجزا مرزی در حل مسائل الاستیسته سه بعدی در محیط ناهمگن [۱۰] و مسأله انتقال حرارت پایدار در محیط ناهمسانگرد دوبعدی [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته است.

رویکرد دیگر برای حل معادلات غیراستاندارد یا غیرخطی، تفکیک معادله به صورتی است که عملگر دیفرانسیل پاره‌ای خطی استاندارد در یک سمت معادله و سایر جملات در سمت دیگر قرار گیرند. به این ترتیب جملاتی که در سمت راست قرار گرفته‌اند مانند یک نیروی بدنه معادل سازی و مسئله مانند یک مسئله استاتیکی بررسی می‌شود که حل اساسی آن بدون تغییر می‌ماند. این شیوه از حل به دلیل استفاده از انتگرال‌های دامنه با عنوان روش المان/دامنه مرزی<sup>۴</sup> (D/BEM) شناخته می‌شود [۱۲ و ۱۳]. در هر دو این شیوه‌ها نیاز به حل انتگرال‌های دامنه است که این انتگرال‌ها برحسب متغیر مسئله که معمولاً جابجایی یا مشتقات مکانی یا زمانی این متغیر است. محاسبه این نوع انتگرال‌ها یکی از چالش‌های

جدول ۱- اصول معادله آنالوگ [۳]

مسئله واقعی	مسئله جایگزین
$N(u) = g(x), \quad x \in \Omega$ $B(u) = \bar{g}(x), \quad x \in \Gamma$ $N():$ linear or nonlinear operator	$N^*(u) = b(x), \quad x \in \Omega$ $B(u) = \bar{g}(x), \quad x \in \Gamma$ $N^*():$ linear or nonlinear operator of order N
 <p style="text-align: center;">(a)</p>	 <p style="text-align: center;">(b)</p>

### روش بردار گالرکین<sup>۵</sup>

در این روش با استفاده از قضیه دوم گرین و جواب خصوصی، انتگرال روی دامنه به انتگرال روی مرز تبدیل می‌شود. استفاده از این ایده اصولاً زمانی امکان‌پذیر است که تابع  $f$  هارمونیک باشد. هارمونیک بودن تابع به این معنی است که در معادله لاپلاس صدق کند ( $\nabla^2 f = 0$ ). البته، این رویکرد برای تبدیل سایر انواع انتگرال‌ها نیز تعمیم داده شده است [۲۰]. جهت تبدیل انتگرال در این روش نیاز به تابع جدیدی است که در معادله پواسون به شکل زیر صدق کند:

$$\nabla^2 U = v \quad (2)$$

با اعمال قضیه گرین برای توابع  $f$  و  $U$  می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} (f \nabla^2 U - U \nabla^2 f) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( f \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3)$$

و با توجه به اینکه  $\nabla^2 f = 0$  رابطه (۳) صرفاً تبدیل به انتگرال روی مرز می‌شود [۲۱]. تابع  $U = U(r)$  جواب خصوصی رابطه (۲) است و برای محاسبه آن عملگر لاپلاس در مختصات قطبی نوشته می‌شود که در معادله پواسون مقدار آن چنین محاسبه می‌شود:

از طرف دیگر در مواردی که نقطه مرجع و نقطه میدان در یک المان قرار می‌گیرند، بعضاً انتگرال‌های تکین در روند حل ظاهر می‌شوند که حل آن‌ها نیازمند توجه خاص است [۸ و ۱۶]. از این روش نمی‌توان در مواردی که محیط مسئله مورد بررسی نامتناهی یا نیمه متناهی است، استفاده کرد. شیوه گسسته‌سازی دامنه توسط بسیاری از محققین در حل مسائل ورق برای محاسبه انتگرال‌های روی دامنه مورد استفاده قرار گرفته است [۸، ۱۶-۱۸]. در مرجع [۳] از این روش برای حل معادلات آنالوگ در بررسی انواع مسائل ورق استفاده شده و نتایج قابل قبولی بدست آمده است. همچنین این ایده در حل مسائل الاستوپلاستیک دو و سه بعدی به روش اجزای مرزی برای محاسبه انتگرال‌های درون دامنه به کار گرفته شده است [۱۹].

### ۲-۲- تبدیل انتگرال روی دامنه به انتگرال مرزی

در این نگرش، با تبدیل انتگرال‌های روی دامنه به انتگرال‌های معادل بر روی مرز، گسسته‌سازی روش المان‌های مرزی تنها منحصر به مرز می‌شود. روش‌هایی که در ادامه معرفی می‌شوند، مرسوم‌ترین شیوه‌های تبدیل این نوع انتگرال‌ها هستند.

از انتگرال‌های مرزی معادل تبدیل شود. به این منظور ابتدا تابع  $v_1$  با استفاده از معادله  $\nabla^2 v_1 = v_0$  به حل اساسی معادله لاپلاس مرتبط می‌شود و در ادامه با اعمال قضیه گرین به انتگرال دامنه، عبارت زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\int_{\Omega} v_0 f_0 d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 v_1 f_0 d\Omega = \quad (9)$$

$$\int_{\Gamma} (f_0 \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1 \frac{\partial f_0}{\partial n}) d\Gamma + \int_{\Omega} v_1 \nabla^2 f_0 d\Omega$$

بار دیگر تابع  $f_1$  به صورتی در نظر گرفته می‌شود که رابطه  $f_1 = \nabla^2 f_0$  را ارضا کرده و با تعریف  $v_1 = \nabla^2 v_2$ ، همانند روند قبل تبدیل انتگرال دامنه صورت می‌گیرد،

$$\int_{\Omega} v_1 f_1 d\Omega = \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma} (f_1 \frac{\partial v_2}{\partial n} - v_2 \frac{\partial f_1}{\partial n}) d\Gamma + \int_{\Omega} v_2 \nabla^2 f_1 d\Omega$$

این فرآیند به دفعات تکرار می‌شود به طوری که،

$$f_{j+1} = \nabla^2 f_j, \quad (11)$$

$$\nabla^2 v_{j+1} = v_j \quad j=0,1,2,\dots$$

و انتگرال دامنه در نهایت چنین خلاصه می‌شود:

$$\int_{\Omega} v_0 f_0 d\Omega = \quad (12)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left( f_i \left( \frac{\partial v_{i+1}}{\partial n} \right) - v_{i+1} \left( \frac{\partial f_i}{\partial n} \right) \right) d\Gamma \quad i=1,2,\dots$$

نتیجه حدی سمت راست رابطه (۱۲) منجر به فرمول‌بندی منحصر به مرز دقیق خواهد شد. در نگاه دقیق‌تر این روش از نظر محاسباتی به دلیل تشکیل ماتریس‌های درون‌یابی متفاوت با استفاده از جواب‌های عمومی و خصوصی مرتبه بالا، پیچیده است [۲۵ و ۲۶]. همچنین در مواردی محاسبه مقدار اولیه در رابطه بازگشتی که عملگر لاپلاس بر آن حاکم است، دشوار است ضمن اینکه بهره‌گیری از عملگر لاپلاس مرتبه بالا استفاده از MRM را برای مسائل غیرهمگن دشوار می‌کند [۲۷]. به‌علاوه این روش احتیاج به تعیین ضریب ثابت موجود در حل اساسی تغییر مکان دارد. مقادیر مختلف این ضریب منجر به جواب‌های مختلف می‌شود [۲۸]. روش متقابل چندگانه مرکب بازگشتی<sup>۱</sup> (RC-MRM) یکی از راه‌حل‌های جایگزین برای این

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (4)$$

با دو بار انتگرال‌گیری از رابطه جواب خصوصی حاصل می‌شود:

$$U = \frac{1}{8\pi} r^2 (\ln r - 1) \quad (5)$$

به این ترتیب انتگرال درون دامنه رابطه (۱) به صورت انتگرال مرزی چنین محاسبه خواهد شد.

$$\int_{\Omega} f v d\Omega = \int_{\Gamma} \left( f \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (6)$$

استفاده از این روش تنها برای نیروهای بدنه ثابت و خطی امکان‌پذیر است. همچنین در مرجع [۲۲] روش بردار گالرکین برای حالت  $\nabla^2 f = a = \text{constant}$  توسعه داده شده است.

#### روش تقابل چندگانه (MRM)

روش تقابل چندگانه در سال ۱۹۸۹ برای حل معادلات هلمهولتز<sup>۲</sup> و پواسون گسترش داده شد [۲۳]. این روش تعمیم روش بردار گالرکین است. این روش به‌جای استفاده از یک حل اساسی همانند روش بردار گالرکین، از مجموعه‌ای از حل‌های اصلی مرتبه بالاتر بهره می‌گیرد [۲۴]. در این روش برخلاف روش بردار گالرکین محدودیتی برای تابع  $f$  وجود ندارد. این رویکرد بسیار قدرتمند بوده و مزیت اصلی آن چنین است که احتیاج به نقاط داخلی ندارد، ضمن اینکه در مقایسه با روش‌هایی که در ادامه معرفی می‌شوند، احتیاج به محاسبه وارون یک ماتریس کاملاً پر ندارد. تشریح این روش برای تبدیل انتگرال یک تابع معلوم در مرجع [۲۰] ارائه شده است. در ادامه روند حل برای حل معادله دیفرانسیل پواسون به شکل زیر معرفی خواهد شد.

$$\nabla^2 U = f_0 \quad (7)$$

فرم انتگرالی پواسون با استفاده از حل اساسی معادله لاپلاس،  $v_0$ ، به شکل زیر قابل بیان است.

$$\varepsilon(P)U = \int_{\Omega} v_0 f_0 d\Omega - \int_{\Gamma} \left( v_0 \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (8)$$

انتگرال دامنه در سمت راست رابطه (۸) می‌تواند به مجموعه‌ای

$$\mathbf{u}_p = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \bar{\mathbf{u}}_{p,j}, \quad \mathbf{f} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \mathbf{f}_j, \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)  $\alpha_j$ ها مجموعه‌ای از ضرایب مجهول و  $\mathbf{f}_j$ ها توابع تقریبی هستند که رابطه آن‌ها با پایه‌های جواب‌های خصوصی  $\bar{\mathbf{u}}_{p,j}$  به صورت  $\nabla^2 \bar{\mathbf{u}}_{p,j} = \mathbf{f}_j$  است.  $\mathbf{f}_j$ ها می‌توانند از میان انواع توابع از جمله عناصر مثلث پاسکال، سری‌های مثلثاتی و توابع پایه شعاعی و... انتخاب شوند. در این بین، توابع پایه شعاعی به عنوان ساده‌ترین و دقیق‌ترین آن‌ها توسط محققین مقبولیت بیشتری پیدا کرده است. نمونه‌ای از توابع  $\mathbf{f}_j$  و پایه‌های جواب خصوصی نظیر مورد استفاده در مراجع در جدول ۲ ارائه شده است.

در ادامه ضرایب مجهول  $\alpha_j$  با درونیابی تابع  $\mathbf{f}$  بر روی مجموعه از  $N$  نقطه مرزی و  $L$  نقطه داخلی درون دامنه برآورد می‌گردند. سپس عبارت انتگرال درون دامنه بر حسب پایه‌های جواب خصوصی بیان و با اعمال قضیه گرین برای توابع  $\bar{\mathbf{u}}_{p,j}$  و  $\mathbf{v}$  می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{f} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} (\nabla^2 \mathbf{u}_p) \, d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} \mathbf{v} (\nabla^2 \bar{\mathbf{u}}_{p,j}) \, d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{u}}_{p,j} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{p,j}}{\partial \mathbf{n}}) \, d\Gamma + \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_{p,j} \nabla^2 \mathbf{v} \, d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{u}}_{p,j} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{p,j}}{\partial \mathbf{n}}) \, d\Gamma + \varepsilon(P) \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \bar{\mathbf{u}}_{p,j} \quad (14)$$

### روش انتگرال‌گیری شعاعی (RIM)

این روش در سال ۲۰۰۲ با هدف تبدیل انتگرال‌های روی دامنه به مرز بر اساس انتگرال‌گیری شعاعی ارائه شده است [۲۸]. از آنجا که این شیوه صرفاً بر پایه روابط ریاضی استوار است، قادر به تبدیل هر نوع انتگرال روی دامنه به مرز بدون نیاز به استفاده از عملگر لاپلاس و جواب خصوصی مسئله است. این تبدیل برای انتگرال‌های روی دامنه شامل توابع معلوم، دقیق است. در حالی که برای انتگرال‌های دامنه شامل متغیرهای مجهول، تبدیل با استفاده از توابع پایه شعاعی، به‌منظور تقریب مقادیر مجهول

رویکرد در مسائل غیرهمگن است [۲۹].

### روش تقابل دوگانه (DRM)

استفاده از روش تقابل دوگانه در رویکرد المان‌های مرزی برای اولین بار در سال ۱۹۸۲ معرفی شد [۳۰]. از این روش ابتدا به‌منظور تشکیل ماتریس جرم برای حل مسائل دینامیک با استفاده از روش المان‌های مرزی استفاده شد. سپس این روش برای حل مسائل بیضی که در آن‌ها تعیین جواب اساسی به‌سادگی امکان‌پذیر نبود و حل مسائل سهمی و هذلولی توسعه داده شد. در روش تقابلی دوگانه، تبدیل انتگرال با استفاده از تقریب نیروی بدنه به کمک مجموعه‌ای از توابع تقریب و جواب خصوصی آن‌ها انجام می‌گیرد. تشریح کامل این روش و کاربردهای عملی آن را می‌توان در مرجع [۳۱] یافت.

نکته قابل توجه در این روش، ضرورت استفاده از توابع تقریب حتی برای مسائل با نیروی بدنه معلوم است. استفاده از این تقریب باعث می‌شود دقت نتایج محاسباتی روش به اندازه سایر روش‌ها نباشد [۳۰]. این رویکرد برای مسائل دینامیکی که نیازمند نقاط درونیابی زیاد برای بیان توزیع نیروی اینرسی درون دامنه است، مناسب نیست. تعداد زیاد نقاط منجر به تشکیل ماتریس‌های بدحالت<sup>۱</sup> می‌شود که خطاهای عددی را در پی دارد [۳۲]. نمونه‌ای از کاربردهای اخیر روش DRM در مسائل مهندسی در مراجع [۱، ۲۰، ۳۳ و ۳۴] قابل مشاهده است. یکی دیگر از کاربردهای روش DRM در حل مسائل مربوط ورق‌های نازک و ضخیم است که از این میان چند نمونه از مطالعات مربوط به حل مسائل دینامیک و پایداری ورق در مراجع [۳۵-۳۹] ارائه شده است. در ادامه بسط ریاضی این روش برای یک حالت ساده شرح داده خواهد شد.

جواب عمومی معادله پواسون،  $\mathbf{u}$ ، برای حالتی که تابع  $\mathbf{f}$  معلوم باشد شامل پاسخ همگن،  $\mathbf{u}_H$ ، و جواب خصوصی  $\mathbf{u}_p$  است که از رابطه  $\nabla^2 \mathbf{u}_p = \mathbf{f}$  حاصل می‌شود. در روش DRM، ابتدا  $\mathbf{u}_p$  به صورت ترکیب خطی از پایه‌های جواب‌های خصوصی  $\bar{\mathbf{u}}_{p,j}$  در نظر گرفته می‌شود

جدول ۲- توابع پایه شعاعی مورد استفاده در روش تقابل دوگانه همراه با جواب خصوصی نظیر مربوط به معادله دیفرانسیل پواسون [۴۰-۴۲]

تابع پایه شعاعی ( $f_j$ )	جواب خصوصی نظیر ( $\bar{u}_{p,j}$ )
Linear (LR): $1+r$	$\frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9}$
Thin Plate Spline (TPS): $r^2 \ln r$	$\frac{r^4}{16} \ln r - \frac{r^4}{32}$
MultiQuadric (MQ): $\sqrt{r^2+c^2}$	$-\frac{c^3}{3} \ln(c\sqrt{r^2+c^2}+c^2) + \frac{1}{9}(r^2+4c^2\sqrt{r^2+c^2})$
Quadratic (QC): $1+r+r^2$	$\frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + \frac{r^4}{16}$

در رابطه (۱۵)  $x_i^q, i=1,2$  مختصات نقطه میدان در دستگاه مختصات کارتزین هستند. جزء سطح  $d\Omega$  در مختصات قطبی عبارت است از:

$$d\Omega = r dr d\theta \quad (16)$$

با توجه به شکل (۱-ب) زمانی که نقطه میدان بر روی مرز قرار دارد، می توان نوشت

$$rd\theta = d\Gamma \cos \varphi = d\Gamma \frac{r_i n_i}{r} \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)،  $\varphi$  زاویه بین بردار عمود بر کمان  $rd\theta$  و بردار عمود خارجی  $d\Gamma$  است. با توجه به روابط (۱۶) و (۱۷) و با استفاده از رابطه

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r_i n_i, \quad r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i^q - x_i^p}{r(x^q, x^p)} = \frac{r_i}{r} \quad (18)$$

انتگرال روی دامنه برای تابعی با ضابطه مشخص  $f(x_1, x_2)$  چنین تبدیل می شود

$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2) d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} F(Q) d\Gamma \quad (19)$$

که در آن

$$F(Q) = \int_0^r f(x_1, x_2) r dr \quad (20)$$

برای محاسبه انتگرال رابطه (۲۰) نیاز به تعیین مختصات  $x_i$  برحسب شعاع  $r$  است که این رابطه چنین بیان می شود:

$$x_i = x_i^p + r_i r \quad (21)$$

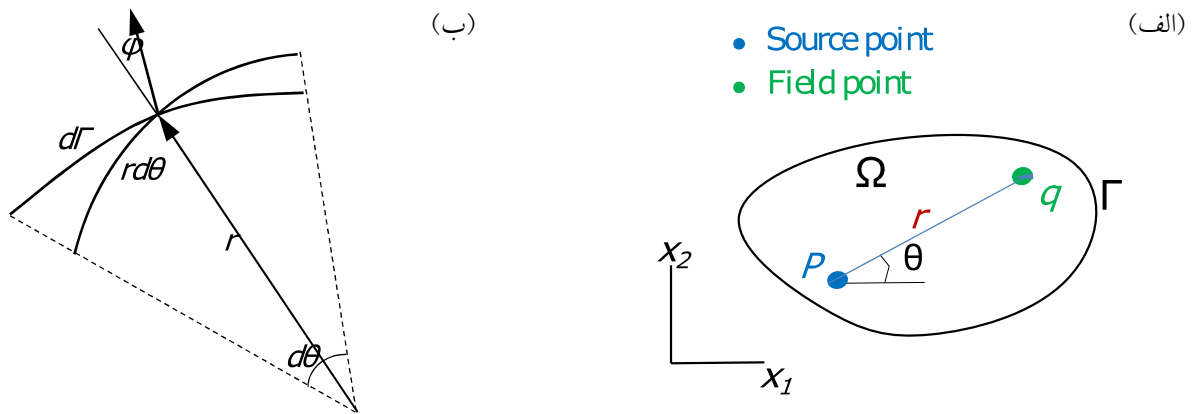
در بسیاری از موارد امکان محاسبه انتگرال رابطه (۲۰)

انجام می شود. یکی از مزایای این روش تبدیل انتگرال های تکین درون دامنه، به انتگرال های روی مرزی بدون ظهور تکینگی در نقاط داخلی است.

روش RIM در مراجع [۴۳ و ۴۴] برای تحلیل مسائل الاستوپلاستیک به کار گرفته شد و تکینگی های ضعیف و قوی با تبدیل انتگرال های روی دامنه به مرز رفع شدند. این روش، در مسائل ترموالاستیک استفاده و انتگرال های دامنه موجود در معادلات انتگرالی تنش های داخلی و تغییر مکان به انتگرال های مرزی معادل تبدیل شدند [۴۵ و ۴۶]. در مرجع [۲۴] از روش RIM برای تبدیل انتگرال ها در حل عددی مسائل با ضرایب متغیر استفاده شده است. اخیرا نیز حل مسائل انتقال حرارت گذرا، [۴۷-۵۱]، و مسائل مرتبط با خمش ورق های نازک و ضخیم، [۵۲-۵۳]، با استفاده از این روش مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است.

در ادامه فرمول بندی RIM برای انتگرال های شامل تابع با ضابطه معلوم ارائه می گردد. در صورتی که درون دامنه دوبعدی  $\Omega$  محدود به مرز بسته  $\Gamma$ ، همزمان یک دستگاه مختصات کارتزین  $(x_1, x_2)$  و یک دستگاه مختصات قطبی  $(r, \theta)$  با مرکزیت نقطه مرجع (نقطه  $p$  در شکل ۱-الف) در نظر گرفته شود، رابطه بین مختصات قطبی و کارتزین نقطه میدان (نقطه  $q$  در شکل ۱-الف) و نقطه مرجع چنین بیان می شود:

$$\begin{cases} x_1^q - x_1^p = r \cos \theta \\ x_2^q - x_2^p = r \sin \theta \end{cases} \quad (15)$$



شکل ۱- (الف) نمای کلی نقطه میدان و نقطه مرجع برای محاسبه رابطه بین مختصات قطبی و کارتزین - (ب) رابطه بین جز دیفرانسیل  $rd\theta$  و  $d\Gamma$

در رابطه (۲۲)  $\alpha_i^A$  ضرایبی هستند که با اعمال نقطه کاربردی  $A$  در همه مجموعه نقاط مرزی و داخلی محاسبه و در نهایت چنین محاسبه می‌گردند:

$$\alpha = \Phi^{-1}b \quad (24)$$

اگر تابع نیروی بدنه  $b$  معلوم باشد،  $\alpha$  نیز یک بردار معلوم است و زمانی که نیروی بدنه  $b$  مجهول باشد،  $\alpha$  برحسب مقادیر گره-ای این متغیر مجهول به دست می‌آیند. توابع پایه شعاعی باید واجد شرایطی باشند که رابطه (۲۴) دارای جواب منحصر به فرد باشد. در سال ۱۹۳۸ مجموعه‌ای از قضایا به اثبات رسید که براساس آن‌ها رده خاصی از توابع شعاعی که توابع اکیداً یکنوا هستند، منجر به تشکیل ماتریس درون‌یابی  $\phi$  مثبت معین و مطلقاً معکوس‌پذیر خواهند شد [۵۴]. به هر حال، بعضی از توابع پایه شعاعی مانند تابع  $^{13}TPS$  در مواردی شرایط این قضایا را ارضا نمی‌کنند. در واقع زمانی که این نوع توابع مورد استفاده قرار می‌گیرند، مجموعه‌ای از نقاط وجود دارند که یک ماتریس درون‌یابی معکوس‌ناپذیر را تولید می‌کنند. در سال ۱۹۸۶ شرایط و محدودیت‌هایی به این قضایا اضافه شد و توابع پایه شعاعی تکمیل‌یافته<sup>۱۴</sup> برای رفع مشکل معکوس‌ناپذیری ماتریس‌ها در یک فضای  $N$  بعدی به فرم زیر معرفی شدند [۵۵].

$$b(x_k) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \phi_i(R_k) + \sum_{j=1}^N \alpha_{M+j} p_j(x_k) \quad x_k \in R \quad (25)$$

به صورت تحلیلی وجود دارد، اما در موارد پیچیده می‌توان از تکنیک‌های انتگرال‌گیری عددی مانند روش مربعی گوسی به‌سادگی بهره برد. در روابط پیشین مشاهده شد که تبدیل مستقیم انتگرال‌های دامنه به مرز در حالتی که تابع موردنظر معلوم باشد، به صورت دقیق قابل محاسبه است. از سوی دیگر برای انتگرال‌های دامنه شامل توابع مجهول، این تبدیل مستقیم غیرممکن است. برای تبدیل انتگرال‌ها در این موارد، همانند روش DRM، مشابه یک نیروی بدنه با ضابطه مجهول به صورت مجموعه‌ای از توابع پایه شعاعی، تقریب زده می‌شود:

$$b_i(x) = \sum_{i=1}^M \alpha_i^A \phi^A(R) \quad (22)$$

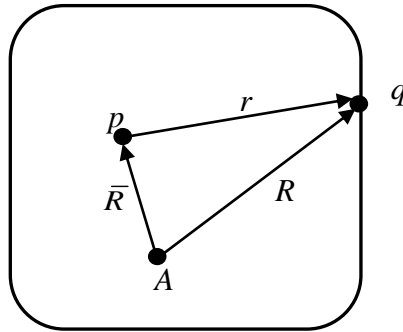
در رابطه (۲۲) برای  $M$  نقطه مرزی و داخلی،  $R = |x - x^A|$  فاصله بین نقطه کاربردی (نقطه  $A$  در شکل (۲) و نقطه میدان است (نقاط کاربردی<sup>۱۲</sup> شامل تمامی نقاط مرزی و تعدادی نقاط داخلی می‌باشند). فاصله  $R$  بایستی برحسب  $r$  (فاصله بین نقطه مرجع و نقطه میدان) بیان شود که رابطه آن با به‌کارگیری قوانین برداری براساس شکل (۲) چنین محاسبه می‌شود [۲۴]:

$$R = \sqrt{r^2 + sr + \bar{R}^2} \quad (23)$$

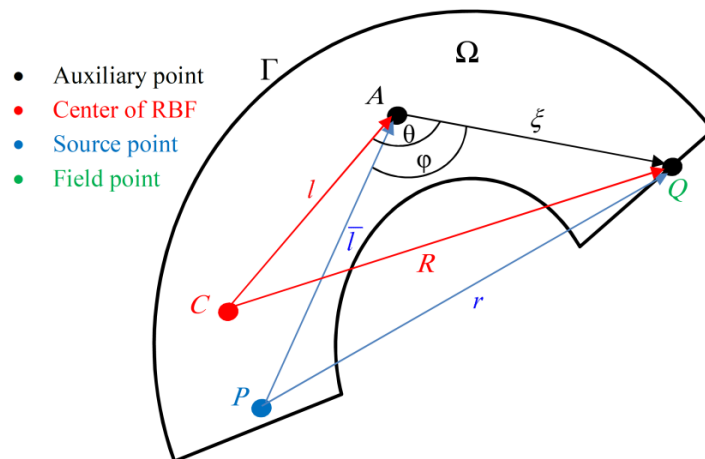
در رابطه (۲۳)،

$$s = 2r_i \bar{R}_i, \quad \bar{R} = |x^p - x^A| = \sqrt{\bar{R}_i \bar{R}_i}, \quad \bar{R}_i = x_i^p - x_i^A \quad (24)$$





شکل ۲- ارتباط بین فواصل  $r$  و  $R$



شکل ۳- نمای کلی نقطه میدان، نقطه مرجع، نقطه کاربردی و نقطه کمکی برای محاسبه انتگرال‌های درون دامنه غیر محدب در روش انتگرال‌گیری شعاعی اصلاحی [۵۸-۶۱]

خصوصی نیست. در بعضی از مسائل برای دستیابی به دقت بالا استفاده از جملات بیشتر برای چند جمله‌ای‌ها و افزایش نقاط درونیابی، افزایش تعداد انتگرال‌های شعاعی و در نتیجه بالا رفتن زمان حل مسئله را به دنبال خواهد داشت. با این وجود، این رویه از مقبولیت و محبوبیت بالایی در میان روش‌های حل انتگرال‌های دامنه برخورداری بوده و در تحقیقات بسیاری مورد توجه و استفاده قرار گرفته است.

در مطالعات اخیر از فرم اصلاح شده روش انتگرال‌گیری شعاعی برای مسائلی در انواع دامنه‌های محدب و مقعر بهره گرفته شده است. اساس حل روش انتگرال‌گیری شعاعی اصلاحی مبتنی بر انتخاب یک نقطه کمکی و انتقال مسیر بین نقطه مرجع و نقطه میدان به مسیر نقطه کمکی و نقطه میدان است (شکل ۳). این روش تا حد بسیاری در کاهش حجم

به منظور دستیابی به ماتریس مربعی ضرایب با مرتبه کامل، ارضا مجموعه شرایط تکمیلی زیر ضروری است.

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i p_j(x_i) = 0 \quad j=1, \dots, N \quad (26)$$

تحقیقات نشان داده است که ترکیب توابع پایه شعاعی و چندجمله‌ای‌ها برحسب مختصات کلی منجر به جواب‌های قابل قبولی می‌شود [۵۶ و ۵۷]. در مرجع [۲۴] نیروی بدنه برحسب چندجمله‌ای‌های خطی و توابع پایه شعاعی بیان شده و در مرجع [۵۷] برای تقریب تنش‌های اولیه از ترکیب توابع پایه شعاعی با چندجمله‌ای‌های خطی، مرتبه دو و مرتبه سه استفاده شده است. بدیهی است استفاده از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالاتر دقت روش را بالا خواهد برد [۲۴]. در فرآیند حل انتگرال‌گیری شعاعی نیازی به محاسبه جداگانه جواب

تقسیم بندی می‌شوند. با توجه به ماهیت روش المان مرزی، استفاده از رویکرد تبدیل انتگرال دامنه به انتگرال‌های مرزی مورد توجه بیشتری قرار گرفته است. از این رو در بخش دوم مقاله با تمرکز بیشتر، نمونه‌هایی از روش‌های بدون نیاز به گسسته‌سازی دامنه، شامل روش بردار گالرکین، روش تقابلی چندگانه، روش تقابلی دوگانه و روش انتگرال‌گیری شعاعی معرفی شده‌اند. در پایان نیز نتیجه تحقیقات پیشین مولفین در رابطه با معرفی روش انتگرال‌گیری شعاعی اصلاح شده به منظور استفاده در دامنه‌های محدب و غیر محدب بررسی شد.

محاسبات، سادگی فرآیند حل مسئله و رفع مشکل دامنه‌های مقعر در مواردی که پتانسیل در داخل دامنه متغیر است، مؤثر است. این رویکرد اخیراً در حل مسئله کمانش ورق، انتشار امواج دو بعدی، مسئله انتشار موج در اقیانوس و انتشار موج الاستیک مورد استفاده قرار گرفته شده است [۵۸-۶۱].

### ۳- جمع بندی

در این مقاله مروری بر انواع تکنیک‌های محاسبه انتگرال‌های درون دامنه ظاهر شده در فرمول‌بندی روش اجزا مرزی ارائه شده است. در یک طبقه‌بندی کلی، این رویکردها به دو دسته مبتنی بر گسسته‌سازی دامنه حل و تبدیل به انتگرال مرزی

### واژه‌نامه

- |                                   |  |                               |
|-----------------------------------|--|-------------------------------|
| 1. Kelvin                         | 6. multiple reciprocity method                     | 10. ill conditioned           |
| 2. Bessel                         | 7. Helmholtz                                       | 11. radial integration method |
| 3. analog equation method         | 8. recursive composite multiple reciprocity method | 12. application points        |
| 4. domain boundary element method | 9. dual reciprocity method                         | 13. thin plate spline         |
| 5. Galerkin vector method         |  | 14. augmented RBFs            |

### مراجع

- Katsikadelis, J. T., "Boundary Elements: Theory and Applications", Vol. 1, UK: Elsevier Science Ltd, 2002.
- Balaš, J., Sládek, J., and Sládek V., "Stress Analysis by Boundary Element Methods", Elsevier, 2013.
- Alatawi, I. A., and Trevelyan, J., "A Direct Evaluation of Stress Intensity Factors Using the Extended Dual Boundary Element Method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 52, pp. 56-63, 2015.
- Aliabadi, M. H., "Boundary Element Formulations in Fracture Mechanics", 1997.
- Aliabadi, M.H., "A New Generation of Boundary Element Methods in Fracture Mechanics", *International Journal of Fracture*, Vol. 86, No. 1, pp. 91-125, 1997.
- Fedeliński, P., "Boundary Element Method in Dynamic Analysis of Structures with Cracks", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 28, No. 9, pp. 1135-1147, 2004.
- Andrade, H. C., and Leonel, E.D., "An Enriched Dual Boundary Element Method Formulation for Linear Elastic Crack Propagation", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 121, pp.158-179, 2020.
- Katsikadelis, J. T., "A Powerful BEM-Based Solution Technique for Solving Linear and Nonlinear Engineering Problems, in Boundary Element Method XVI", *16th International Boundary Element Method Conference (BEM XVI)*, Computational Mechanics Publications: Southampton, UK., pp. 167-182, 1994.
- Katsikadelis, J. T., "The Boundary Element Method for Plate Analysis", Vol. 1, UK: Elsevier Inc, 2014.
- Riveiro, M.A., and Gallego, R., "Boundary Elements and the Analog Equation Method for the Solution of Elastic Problems in 3-D Non-Homogeneous Bodies", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 263, pp. 12-19, 2013.
- Ishiguro, S., Nakajima, H., and Tanaka, M., "Analysis of Two-Dimensional Steady-State Heat Conduction in Anisotropic Solids by Boundary Element Method Using Analog Equation Method and Green's Theorem", *Journal of Computational Science and Technology*, Vol. 3, No. 1, pp. 66-76, 2009.
- Carrer, J. A.M., and Telles, J.C.F., "A Boundary Element Formulation to Solve Transient Dynamic Elastoplastic Problems", *Computers & Structures*, Vol. 45, No. 4, pp. 707-713, 1992.
- Carrer, J.A.M., and Mansur, W.J., "Alternative Time-Marching Schemes for Elastodynamic Analysis with the Domain Boundary Element Method Formulation", *Computational Mechanics*,

- Vol. 34, No. 5, pp. 387-399, 2004.
14. Katsikadelis, J. T., "Boundary Elements: Theory and Applications", 2002.
  15. Beskos, D.E., "Boundary Element Analysis of Plates and Shells", Vol. 1, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
  16. Beer, G., Smith, I. M., and Duenser, C., "The Boundary Element Method with Programming", Vienna, Austria: Springer, 2008.
  17. Tan, C. L., "Three-Dimensional Boundary Integral Equation Stress Analysis of Cracked Components", Imperial College, University of London, 1979.
  18. Najarzadeh, L., Movahedian, B. and Azhari, M., "Free Vibration and Buckling Analysis of Thin Plates Subjected to High Gradients Stresses Using the Combination of Finite Strip and Boundary Element Methods", *Thin-Walled Structures*, Vol. 123, pp. 36-47, 2018.
  19. Feng, W.Z., Gao X.W., Liu, J., and Yang, K., "A New BEM for Solving 2D and 3D Elastoplastic Problems without Initial Stresses/Strains", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 61, pp. 134-144, 2015.
  20. Danson, D. J., "Boundary Element Formulation for Problems in Linear Isotropic Elasticity with Body Forces", Springer Verlag, 1981.
  21. De Mey, G., Suciu, R., Munteanu, C., and Matthys, L., "BEM Solution of Poisson's Equation in Two Dimensions with Polynomial Interpolation of the Source Function", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 18, pp. 175-178, 1997.
  22. Suciu, R., De Mey, G., and De Baetselier, E., "BEM Solution of Poisson's Equation with Source Function Satisfying  $\Delta\rho=\text{constant}$ ", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 25, No. 2, pp. 141-145, 2001.
  23. Nowak, A. J., and Brebbia, C. A., "The Multiple Reciprocity Method: A New Approach for Transforming BEM Domain Integrals to the Boundary", *Engineering Analysis*, Vol. 6, pp. 164-167, 1989.
  24. Al-Jawary, M. A., "The Radial Integration Boundary Integral and Integro-differential Equation Methods for Numerical Solution of Problems with Variable Coefficients", Brunel University: London, 2012.
  25. Neves, A. C., and Brebbia, C. A., "The Multiple Reciprocity Boundary Element Method in Elasticity: A New Approach for Transforming Domain Integrals to the Boundary", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, No. 4, pp. 709-727, 1991.
  26. Shiah, Y. C., and Lin, Y. J., "Multiple Reciprocity Boundary Element Analysis of Two-Dimensional Anisotropic Thermoelasticity Involving an Internal Arbitrary Non-Uniform Volume Heat Source", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 24, pp. 6593-6612, 2003.
  27. Chen, W., Fu, Z. J., and Chen, C. S., "Boundary-Type RBF Collocation Methods, in Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods", Springer Berlin Heidelberg: Berlin, Heidelberg. pp. 51-87, 2014.
  28. Gao, X. W., "The Radial Integration Method for Evaluation of Domain Integrals with Boundary-Only Discretization", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, No. 10, pp. 905-916, 2002.
  29. Chen, W., Fu, Z. J., and Jin, B. T., "A truly Boundary-only Meshfree Method for Inhomogeneous Problems Based on Recursive Composite Multiple Reciprocity Technique", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 34, No. 3, pp. 196-205, 2010.
  30. Nardini, D. and Brebbia, C., "A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 7, No. 3, pp. 157-162, 1983.
  31. Partridge P. W., Brebbia, C. A., and Wrobel, L.C., "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", Computational Mechanics Publications: Southampton, 1992.
  32. Loeffler, C. F., Mansur, W. J., de Melo Barcelos, H., and Bulcão, A., "Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 61, pp. 218-225, 2015.
  33. Hamzeh Javaran, S., Khaji, N., and Noorzad, A., "First Kind Bessel Function (J-Bessel) as Radial Basis Function for Plane Dynamic Analysis Using Dual Reciprocity Boundary Element Method", *Acta Mechanica*, Vol. 218, pp. 247-258, 2011.
  34. Hamzeh Javaran, S., and Khaji, N., "Complex Fourier Element Shape Functions for Analysis of 2D Static and Transient Dynamic Problems Using Dual Reciprocity Boundary Element Method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 95, pp. 222-237, 2018.
  35. Wen, P.H., Aliabadi, M.H., and Young, A., "Transformation of Domain Integrals to Boundary Integrals in BEM Analysis of Shear Deformable Plate Bending Problems", *Computational Mechanics* Vol. 24, No. 4, pp. 304-309, 1999.
  36. Uğurlu, B., "A Dual Reciprocity Boundary Element Solution Method for the Free Vibration Analysis of Fluid-Coupled Kirchhoff Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 340, pp. 190-210, 2015.
  37. Useche, J., and Albuquerque, E. L., "Dynamic Analysis of Shear Deformable Plates Using the Dual Reciprocity Method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 36, No. 5, pp. 627-632, 2012.
  38. Davies, T.W., and Moslehy, F.A., "Modal Analysis of Plates Using the Dual Reciprocity Boundary Element Method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 14, No. 4, pp. 357-362, 1994.
  39. Soares Jr, R. A., Palermo Jr, L., and Wrobel, L. C.,

- “Application of the Dual Reciprocity Method for the Buckling Analysis of Plates with Shear Deformation”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 106, pp. 427-439, 2019.
40. Chen, C.S., Brebbia, C.A. and Power, H., “Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 137-150, 1999.
  41. Li, J., Hon, Y. C., and Chen, C. S., “Numerical Comparisons of Two Meshless Methods Using Radial Basis Functions”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, No. 3, pp. 205-225, 2002.
  42. Chanthawara, K., Kaennakham, S., and Toutip, W., “The Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM) with Multiquadric Radial Basis Function for Coupled Burger’s Equations”, *The International Journal of Multiphysics*, Vol. 8., No. 2, pp. 123-144, 2014.
  43. Gao, X.W., “A Boundary Element Method Without Internal Cells for Two-Dimensional and Three-Dimensional Elastoplastic Problems”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 2, pp. 154-160, 2001.
  44. Deng, Q., Li, C. G., Wang, S. L., Zheng, H., and Ge, X. R., “A Nonlinear Complementarity Approach for Elastoplastic Problems by BEM without Onternal Cells”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, No.3, pp. 313-318, 2011.
  45. Gao, X.W., “Boundary Element Analysis in Thermoelasticity with and without Internal Cells”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, No. 7, pp. 975-990, 2003.
  46. Gao, X. W., Zheng, B. J., Yang, K., and Zhang, C., “Radial Integration BEM for Dynamic Coupled Thermoelastic Analysis Under Thermal Shock Loading”, *Computers & Structures*, Vol. 158, pp. 140-147, 2015.
  47. Yao, W. A., Yao, H. X., and Yu, B., “Radial Integration BEM for Solving Non-Fourier Heat Conduction Problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 60, pp. 18-26, 2015.
  48. Feng, W. Z., Yang, K., Cui, M., and Gao, X. W., “Analytically-Integrated Radial Integration BEM for Solving Three-dimensional Transient Heat Conduction Problems”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 79, pp. 21-30, 2016.
  49. Yang, K., Peng, H. F., Wang, J., Xing, C. H., and Gao, X. W., “Radial Integration BEM for Solving Transient Nonlinear Heat Conduction with Temperature-dependent Conductivity”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 108, pp. 1551-1559, 2017.
  50. Cui, M., Xu, B. B., Feng, W. Z., Zhang, Y., Gao, X. W., and Peng, H. F., “A Radial Integration Boundary Element Method for Solving Transient Heat Conduction Problems with Heat Sources and Variable Thermal Conductivity”, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 73, No. 1, pp. 1-18, 2018.
  51. Chen, L., Li, K., Peng, X., Lian, H., Lin, X., and Fu, Z., “Isogeometric Boundary Element Analysis for 2D Transient Heat Conduction Problem with Radial Integration Method”, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 126, No. 1, pp. 125-146, 2021.
  52. Albuquerque, E. L., Sollero, P., and Portilho de Paiva, W., “The Radial Integration Method Applied to Dynamic Problems of Anisotropic Plates”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 9, pp. 805-818, 2007
  53. Soares Jr, R. A., Palermo Jr, L., and Wrobel, L. C., “Application of the Radial Integration Method for the Buckling Analysis of Plates with Shear Deformation”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 118, pp. 250-264, 2020.
  54. Schoenberg, I.J., “Metric Spaces and Positive Definite Functions”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 44, No. 3, pp. 522-536, 1938.
  55. Micchelli, C. A., “Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions, in Approximation Theory and Spline Functions”, Springer, pp. 143-145, 1984.
  56. M. A. Golberg, Chen, C. S., and Bowman, H., “Some Recent Results and Proposals for the Use of Radial Basis Functions in the BEM”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 23, pp. 285-296, 1999.
  57. Golberg, M. A., Chen, C. S. and Karur, S. R., “Improved Multiquadric Approximation for Partial Differential Equations”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 18, No. 1, pp. 9-17, 1996.
  58. Najarzadeh, L., Movahedian, B., and Azhari, M., “Stability Analysis of the Thin plates with Arbitrary Shapes Subjected to Non-Uniform Stress Fields Using Boundary Element and Radial Integration Methods”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 87: pp. 111-121, 2018.
  59. Najarzadeh, L., Movahedian, B., and Azhari, M., “Numerical Solution of Scalar Wave Equation by the Modified Radial Integration Boundary Element Method”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 105: pp. 267-278, 2019.
  60. Najarzadeh, L., Movahedian, B., and Azhari, M., “Numerical Solution of Water Wave Propagation Problems Over Variable Bathymetries Using the Modified Radial Integration Boundary Element Method”, *Ocean Engineering*, Vol. 257, p. 111613, 2022.
  61. Zonoubi, K., Movahedian, B., and Azhari, M., “The Solution of Elastodynamic Problems Using Modified Radial Integration Boundary Element Method (MRIBEM)”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 144, pp. 482-491, 2022.