نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی
نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۲، شماره ۱، تابستان ۱۴۰۲، ص. ۱۰۳-۸۹
مقاله پژوهشی

مطالعه ارتعاش آزاد اتصال پوسته‌های هیبریدی استوانه‌ای - مخروطی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته

محمد مسکینی و احمدرضا قاسمی*
گروه جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۲۳ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۲/۱۰)

چکیده- در این مقاله، ارتعاشات آزاد اتصال دو پوسته استوانه‌ای - مخروطی هیبریدی با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی در اتصال دو پوسته بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پوسته مطالعه شده است. روابط اتصال دو پوسته با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته برای شرایط مرزی مختلف حل شده است. همچنین پوسته‌های هیبریدی از لایه‌های کامپوزیت در هسته و دو لایه فلز آلومینیم در بالا و پایین تشکیل شده است که در این مقاله مواد کامپوزیت از جنس کربن - اپوکسی، شیشه - اپوکسی، آرامید - اپوکسی استفاده شده است. نتایج بدست آمده در این مقاله با روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته با مطالعات قبلی مقایسه شده که تطابق بسیار خوبی بین نتایج وجود داشته است. همچنین اثرات زاویه راس مخروط، شرایط مرزی، کسر حجمی، مود جانبی، مواد کامپوزیت، تغییرات طول به شعاع پوسته و تغییرات ضخامت به شعاع پوسته بر روی فرکانس طبیعی بررسی شده است. نتایج نشان داده است که با افزایش زاویه راس مخروط فرکانس طبیعی بدون بعد سازه اتصال دو پوسته استوانه‌ای - مخروطی افزایش یافته است. همچنین با افزایش مقدار مود جانبی، فرکانس طبیعی بدون بعد سازه اتصال دو پوسته هیبریدی در ابتدا کاهش و سپس افزایش یافته است.

واژه‌های کلیدی: پوسته مخروطی، هیبرید، ارتعاش آزاد، اتصال، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته.

Study of the Free Vibration of Joined Hybrid Cylindrical-Conical Shells with the Generalized Differential Quadrature Method

M. Meskini and A.R. Ghasemi*

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechatronics, Kashan University, Kashan, Iran.

Abstract*: In this research, the free vibration of the joint of two hybrid cylindrical-conical shells have been studied, considering the continuity conditions in the joint of the two shells, based on the first order shear deformation shell theory. The equations of the joint of two shells have been extracted using the Hamilton's principle, and solved by applying the generalized differential quadrature method under different boundary conditions. Also, hybrid shells are composed of composite layers in the core and two layers of aluminum metal at the top and bottom of the shells. In this study, the Carbon- Epoxy, Glass- Epoxy and Aramid-Epoxy composite*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ghasemi@kashanu.ac.ir

materials are used. The results obtained in this research are compared with previous studies, and there is a very good agreement between the results. Also, the effects of cone angle of the conical shell, boundary conditions, volume fraction, circumferential mode, composite materials, variation of length to shell radius and variation of thickness to shell radius, on the natural frequency have been investigated. The results have shown that, with the increase of the cone angle of the conical shell, the dimensionless natural frequency of the joint of two cylindrical- conical shells increased. Also, with increase of the circumferential mode, the non-dimensional frequency of the structure of two joined hybrid shells, first decreased and then increased.

Keywords: ***Conical shell, Hybrid, Free vibration, joint, GDQM***

فهرست علائم

R_x	شعاع متغیر پوسته مخروطی	R_2, R_1	شعاع اولیه و ثانویه پوسته مخروطی
L	طول پوسته	h	ضخامت پوسته
n	شمارنده موج محیطی	α	نیم زاویه راس مخروط
x, θ, z	مختصات استوانه ای	k_s	ضریب تصحیح برشی
u_0, v_0, w_0	جابجایی صفحات میانی	$\varphi_\theta, \varphi_x$	چرخش نرمال و برشی
$\varepsilon^0_{x\theta}, \varepsilon^0_x, \varepsilon^0_\theta$	کرنش صفحات میانی	$k_{x\theta}, k_x, k_\theta$	انحناء
U	انرژی کرنشی	Q_{ij}	ماتریس سفتی
ω	فرکانس طبیعی	T	انرژی جنبشی
ρ	چگالی	Ω	فرکانس طبیعی بدون بعد
E_x	مدول الاستیسیته طولی	E_y	مدول الاستیسته عرضی
$[M]$	ماتریس جرم	$[K]$	ماتریس سختی
C	شرط مرزی گیردار	F	شرط مرزی آزاد
N	تعداد نقاط شبکه	S	شرط مرزی ساده
B_{ij}	ماتریس کوپلینگ	A_{ij}	ماتریس کششی
$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$	نیروهای منتجه	D_{ij}	ماتریس خمشی
$Q_{xz}, Q_{\theta z}$	نیروی برشی	$M_x, M_\theta, M_{x\theta}$	ممان های منتجه

۱-مقدمه

استفاده از پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی کامپوزیتی و همچنین اتصال بین پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی کامپوزیتی در صنایع مختلف از جمله هوافضا، کشتی‌سازی و دیگر صنایع بصورت روزافزون در حال افزایش می‌باشد. بر همین اساس محققین در زمینه ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی، تحقیقات زیادی را انجام داده‌اند. علی بیگلو [1] با استفاده از روش مربع دیفرانسیلی تحلیل سه بعدی ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای چند لایه ناهمسانگرد با شرایط مرزی مختلف را بررسی نموده است. نتایج نشان داد که تاثیر شرایط مرزی لبه‌ها بر رفتار پوسته نازک کوچکتر از پوسته ضخیم است.

همچنین، توزیع تنش شعاعی برای شرایط مرزی به سادگی

بزرگتر از شرایط مرزی گیردار است. همچنین آمابیلی [۲] ارتعاش خطی و غیرخطی پوسته استوانه‌ای دایره‌ای چند لایه گرافیت- اپوکسی را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالای آمابیلی- ردی با شرایط مرزی ساده مورد مطالعه قرار داد. بر اساس تئوری لایه مرزی، ارتعاش آزاد غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده تحت بار محوری استاتیکی و دینامیکی بر روی بستر الاستیک پاسترناک توسط لی و کیائو [۳] ارائه شده است.

سپس لوپاتین و موروزوف [۴] با استفاده از روش فوریه و گالرکین، ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیت چند لایه با لبه‌های بسته را تجزیه و تحلیل کردند. نتایج برای پارامترهای مختلف الاستیک و هندسه پوسته بدست آمده و با روش اجزای محدود مقایسه شد. قاسمی و مهندس [۵ و ۶] ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای نازک هیبریدی را تحت شرایط مرزی ساده بر اساس تئوری تقریب اول پوسته لاو بررسی کردند. نتایج نشان داد که با افزایش تعداد موج محوری و محیطی، شکاف بین فرکانس پیشرو و پسرو افزایش یافته است.

طالبی‌توتی و همکاران [۷] ارتعاش آزاد پوسته مخروطی دوار تقویت شده با تقویت کننده محیطی و طولی را با استفاده از روش ریتز و روش انرژی تحلیل کردند. نتایج نشان داد که به طور کلی استفاده از تقویت‌کننده‌های محیطی در پوسته مخروطی با سرعت چرخش کم منجر به افزایش فرکانس طبیعی شده است اما تأثیر تقویت‌کننده طولی بر فرکانس طبیعی به چگالی تقویت کننده و سرعت چرخش پوسته بستگی دارد.

ملک‌زاده و حیدرپور [۸] تحلیل ارتعاش آزاد پوسته مخروطی دوار تشکیل شده از مواد تابعی مدرج را بر اساس تئوری مرتبه اول برشی پوسته و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی توسعه یافته برای شرایط مرزی مختلف انجام دادند. با استفاده از روش حل توسعه یافته سری فوریه و ریلی ریتز ارتعاش آزاد پوسته مخروطی تحت شرایط مرزی مختلف توسط جین و همکاران [۹] مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که سفتی فنر مرزی نقش زیادی در رفتار ارتعاشی پوسته مخروطی داشته است. همچنین، اثر سفتی فنرهای مرزی دورانی در مقایسه با دیگر فنرها کمتر بوده است.

کماریان و همکاران [۱۰] ارتعاش آزاد پوسته مخروطی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را بر اساس تئوری مرتبه اول برشی پوسته و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی برای شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. نتایج نشان داد که تجمع نانولوله‌های کربنی نقش بسزایی در فرکانس طبیعی پوسته مخروطی داشته است. سپس ارتعاش پوسته مخروطی کامپوزیتی با استفاده از تئوری پوسته نازک دانل و روش فضای حالت توسط شکوری و کوچک زاده [۱۱] بررسی شد. نتایج این تحقیق نشان داد که افزایش ضخامت و همچنین کاهش طول مخروط باعث افزایش فرکانس های طبیعی شده است و همچنین پوسته‌های استوانه‌ای دارای مقادیر بیشتری از فرکانس‌های طبیعی نسبت به پوسته‌های مخروطی هستند.

جاود [۱۲] با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی، ارتعاش آزاد پوسته مخروطی کامپوزیتی چند لایه را تحلیل و بررسی نمود. در این تحقیق نتایج برای اثرات زاویه مخروط، لایه چینی مختلف، نسبت طول به شعاع، نسبت ضخامت به شعاع بر روی فرکانس طبیعی پوسته برای شرایط مرزی ساده بدست آمد. شکوری [۱۳] تحلیل ارتعاش آزاد پوسته مواد تابعی مدرج مخروطی دوار در شرایط دمایی بالا را براساس تئوری دانل و تئوری کلاسیک پوسته تحت شرایط مختلف مرزی و با استفاده از روش دیفرانسیل مرتبه چهارم تحلیل و بررسی نمود . نتایج نشان داد که در همه شرایط با افزایش دما، فرکانس طبیعی کاهش یافته است. همچنین در حالت غیردوار کمترین فرکانس در مودهای محیطی بالا و در حالت پوسته دوار، با افزایش چرخش پوسته کمترین فرکانس در مود اول محیطی رخ داده است.

ماجی و همکاران [۱۴] ارتعاش آزاد پوسته مخروطی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت حرارت را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و روش المان محدود مورد تحلیل قرار دادند. روابط پوسته با استفاده از روش دیفرانسیل مربعی تعمیم‌یافته حل شد. با استفاده از روش

توسعه‌یافته فوریه – ریتز ارتعاش آزاد و اجباری اتصال دو پوسته مخروطی – استوانه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف توسط ما و همکاران [۱۵] بررسی و تحلیل شده است. چن و همکاران [۱۶] ارتعاش آزاد و اجباری اتصال پوسته استوانه‌ای – مخروطی تقویت شده با تقویت‌کننده حلقه‌ای را تحت شرایط مرزی مختلف با استفاده از تئوری فلاگ و توابع بسل ارائه کردند. همچنین سرخیل و فومنی [۱۷] ارتعاش آزاد اتصال پوسته استوانه‌ای – مخروطی دوار را با استفاده از روش سری‌توانی تحت شرایط مرزی مختلف تحلیل نمودند.

سپس ارتعاش آزاد اتصال دو پوسته کامپوزیتی مخروطی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و روش سری توانی با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی بین دو پوسته توسط ایزدی و همکاران [۱۸] بررسی شد. باقری و همکاران [۱۹] ارتعاش آزاد اتصال پوسته مخروطی و پوسته کروی ساخته شده با مواد مدرج تابعی[۲] را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پوسته، روش سری فوریه و روش دیفرانسیل مربعی تعمیم‌یافته بررسی نمودند. همچنین رضایی‌پژند و همکاران [۲۰] با استفاده از روش نیمه تحلیلی و تئوری دانل ارتعاش آزاد اتصال پوسته مخروطی – مخروطی تشکیل شده با مواد مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله کربن و پلیمر اپوکسی را با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی در اتصال دو پوسته تحلیل کردند.

هدف از این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد اتصال پوسته‌های هیبریدی استوانه‌ای – مخروطی متشکل از کامپوزیت چند لایه و فلز آلومینیم با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی در نقاط اتصال دو پوسته با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی تحت شرایط مرزی مختلف می‌باشد. روابط حاکم بر اتصال دو پوسته با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی حل شده است. همچنین اثرات طول پوسته، زوایه راس مخروط، شعاع پوسته، مواد کامپوزیت و مود جانبی، کسر حجمی و شرایط مرزی بر روی فرکانس طبیعی اتصال دو پوسته استوانه‌ای مخروطی هیبریدی بررسی شده است.

۲- معادلات

در این بخش روابط حاکم بر اتصال دو پوسته هیبریدی استوانه‌ای – مخروطی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پوسته بدست آمده است. در شکل (۱) اتصال دو پوسته استوانه‌ای – مخروطی نشان داده شده و در شکل (۲) یک پوسته مخروطی هیبریدی ترسیم شده است که R نشان دهنده شعاع پوسته، L نشان دهنده طول پوسته، R_x نشان دهنده شعاع در هر مقطع از پوسته مخروطی، α نشان دهنده نیم زاویه راس مخروط پوسته مخروطی و h معرف ضخامت پوسته است.

همچنین u، v و w به ترتیب نشان دهنده جابجایی طولی، محیطی، شعاعی در طول مختصات استوانه‌ای x، θ و z می‌باشند. بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پوسته، جابجایی‌ها بصورت رابطه (۱) بیان می‌شود:

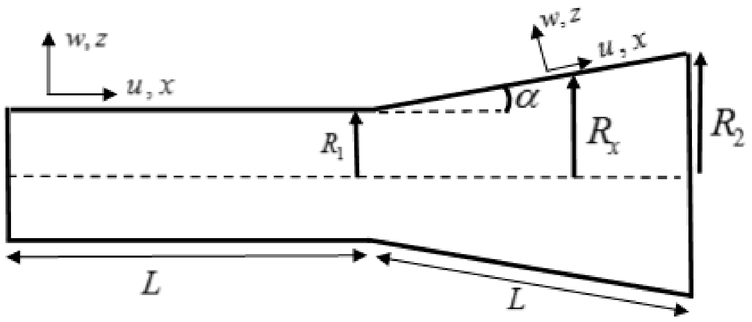
$$\begin{aligned} u &= u_o + z\varphi_x \\ v &= v_o + z\varphi_\theta \\ w &= w_o \end{aligned} \tag{۱}$$

همچنین، کرنش‌های طولی، محیطی و برشی بصورت رابطه (۲) می‌باشد [۲۱]:

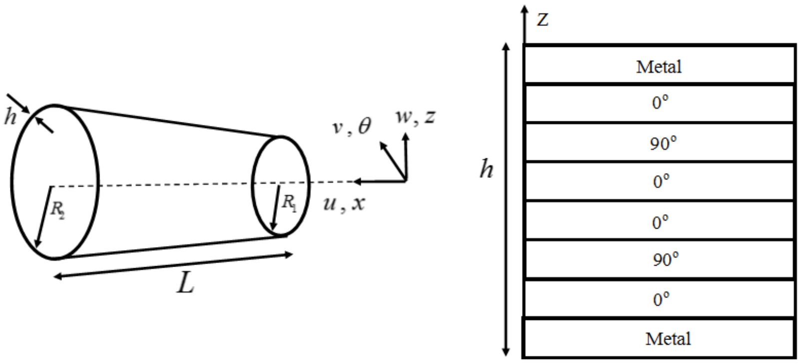
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_x^0 + zk_x \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_\theta^0 + zk_\theta \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + zk_{x\theta} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{x\theta}^0 \end{aligned} \tag{۲}$$

که z فاصله هر نقطه دلخواه از صفحه میانی پوسته است. همچنین $\varepsilon_{x,o}$، $\varepsilon_{\theta,o}$ و $\varepsilon_{x\theta,o}$ به ترتیب نشان‌دهنده کرنش طولی، محیطی و برشی صفحه میانی پوسته بوده که به صورت رابطه (۳) قابل بیان است [۲۲] :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,o} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{\theta,o} &= \frac{1}{R(x)}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{R(x)}u + \frac{\cos\alpha}{R(x)}w \\ \varepsilon_{x\theta,o} &= \frac{1}{R(x)}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin\alpha}{R(x)}v + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{۳}$$



شکل ۱- اتصال دو پوسته هیبریدی استوانه‌ای - مخروطی



شکل ۲- پوسته مخروطی هیبریدی

$$\varepsilon_{xz,o}=\varphi_x+\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{\theta z,o}=\varphi_\theta-\frac{\cos\alpha}{R(x)}v+\frac{1}{R(x)}\frac{\partial w}{\partial\theta} \qquad \text{(ادامه ۳)}$$

که شعاع متغیر $R(x)$ در طول پوسته مخروطی به صورت رابطه (۴) بیان می‌گردد [۲۳]:

$$R(x)=R_1+L\sin\alpha \qquad (۴)$$

همچنین k_x، k_θ و $k_{x\theta}$ به ترتیب بیانگر انحناء طولی، محیطی و برشی هستند که بصورت رابطه (۵) بیان می‌شوند:

$$k_x=-\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}$$
$$k_\theta=-\frac{1}{R(x)}\frac{\varphi_\theta}{\partial\theta}+\frac{\sin\alpha}{R(x)}\varphi_x \qquad (۵)$$
$$k_{x\theta}=-\frac{\varphi_\theta}{\partial x}-\frac{\sin\alpha}{R(x)}\varphi_\theta+\frac{1}{R(x)}\frac{\varphi_x}{\partial\theta}$$

روابط بین کرنش و تنش برای پوسته مخروطی بصورت رابطه (۶) تعریف می‌شود [۲۳]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \tau_{\theta z}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26}\\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0\\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{\theta z}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{x\theta}\end{Bmatrix} \qquad (۶)$$

که $\bar{Q}_{ij}$ بیانگر ضرایب ماتریس سختی مواد کامپوزیت لایه‌ای و فلز در هر لایه می‌باشد. برای بدست آوردن روابط تعادل پوسته

استوانه‌ای از اصل همیلتون استفاده شده که بصورت رابطه (۷) بیان می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta U - \delta T\right) dt = 0 \tag{۷}$$

که u و T به ترتیب نشان دهنده انرژی کرنشی و انرژی جنبشی می‌باشند. انرژی کرنشی بصورت رابطه (۸) قابل بیان است:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{0}^{L} \int_{0}^{2\pi} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} R dx d\theta dz \tag{۸}$$

همچنین انرژی جنبشی بصورت رابطه (۹) خواهد بود:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \rho h \int_{-h/2}^{h/2} \int_{0}^{L} \int_{0}^{2\pi} \overline{V} \bullet \overline{V} R dx d\theta dz \\ \overline{V} = \dot{u}\, i + \dot{v}\, j + \dot{w}\, k \end{cases} \tag{۹}$$

که i، j و k به ترتیب بردار یکه در طول مختصات استوانه‌ای x، θ و z می‌باشند. با جایگزین کردن تغییرات انرژی کرنشی و انرژی جنبشی در اصل همیلتون روابط حاکم بر پوسته مخروطی استخراج خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{R}(N_x - N_\theta) = \\
&I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\sin\alpha}{R} N_{x\theta} + \frac{\cos\alpha}{R} \varphi_{x\theta} = \\
&I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{R} Q_{xz} - \frac{\cos\alpha}{R} N_\theta = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{R}(M_x - M_\theta) - Q_{xz} = \\
&I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\sin\alpha}{R} M_{x\theta} - Q_{\theta z} = \\
&I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

که N_i، M_i، Q_i و I_i به ترتیب نشان‌دهنده نیروی منتجه، ممان منتجه، نیروی برشی و ممان اینرسی بوده که بصورت رابطه (۱۱) بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\int \sigma_i dz = N_i, \left(i = x, \theta, x\theta\right) \\
&\int \sigma_i z dz = M_i, \left(i = x, \theta, x\theta\right) \\
&\int k_s \sigma_i dz = Q_i, \left(i = xz, \theta z\right) \\
&\int \rho(1, z, z^2) dz = I_0, I_1, I_2
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

که k_s بیانگر ضریب تصحیح برشی بوده که برابر با مقدار $\frac{۵}{۶}$ می‌باشد. در صورتی که در روابط (۱۰)، زاویه راس مخروط صفر در نظر گرفته شود $(\alpha = 0)$روابط مربوطه به روابط پوسته استوانه‌ای تبدیل خواهند شد. شرایط مرزی مختلف برای سازه در دو انتهای آن به صورت رابطه (۱۲) از اصل همیلتون حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}
&\text{Simply}: N_x = V = W = M_x = M_{x\theta} = 0 \\
&\text{Clamp}: U = V = W = \varphi_x = \varphi_\theta = 0 \\
&\text{Free}: N_x = N_{x\theta} = \varphi_{xz} = M_x = M_{x\theta} = 0
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

همچنین شرایط پیوستگی بین دو پوسته با توجه به شکل (۱) بصورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&u_i = u_j, v_i = v_j, w_i = w_j, \varphi_{xi} = \varphi_{xj}, \\
&\varphi_{\theta i} = \varphi_{\theta j}, N_{xi} = N_{xj} \\
&N_{x\theta i} = N_{x\theta j}, \varphi_{xzi} = \varphi_{xzj}, \\
&M_{xi} = M_{xj}, M_{x\theta i} = M_{x\theta j}
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

با جایگذاری روابط (۲)، (۳) و (۵) در روابط (۱۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{11}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\
&A_{12}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\cos\alpha}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + B_{12}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) + \\
&A_{66}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}\right) + \\
&B_{66}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} - \frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2}\right) \\
&A_{11}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{11}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + A_{12}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} +
\end{aligned} \tag{۱۴–الف}$$

ادامه (۱۴-الف)

$$A_{12}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}u + A_{12}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}w$$
$$B_{12}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta} + B_{12}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}\varphi_x - B_{12}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} -$$
$$A_{22}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} - A_{22}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}u$$
$$-A_{22}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}w - B_{22}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta} - I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_1\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2}=0$$

(۱۴-ب)

$$A_{66}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta} - A_{66}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial v}{\partial x} + A_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} +$$
$$B_{66}\frac{\partial^2\varphi_\theta}{\partial x^2} - B_{66}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x} - B_{66}\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x\partial\theta}$$
$$A_{12}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta} + B_{12}\frac{1}{R}\frac{\partial^2\phi_\theta}{\partial x\partial\theta} + A_{22}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} +$$
$$A_{22}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} + A_{22}\frac{\cos\alpha}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}$$
$$B_{22}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi_\theta}{\partial\theta^2} + B_{22}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial\theta} + A_{66}\frac{2\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} -$$
$$A_{66}\frac{2\sin^2\alpha}{R^2}v + A_{66}\frac{2\sin\alpha}{R}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$+B_{66}\frac{2\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} - B_{66}\frac{2\sin^2\alpha}{R^2}\varphi_\theta + B_{66}\frac{2\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_x}{\partial\theta} +$$
$$A_{55}\frac{\cos\alpha}{R}\varphi_\theta - A_{55}\frac{\cos\alpha}{R^2}v$$
$$+A_{55}\frac{\cos\alpha}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta} + +A_{54}\frac{\cos\alpha}{R}\varphi_x + A_{54}\frac{\cos\alpha}{R}\frac{\partial w}{\partial x} -$$
$$I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1\frac{\partial^2\varphi_\theta}{\partial t^2}=0$$

(۱۴-ج)

$$A_{44}\frac{\cos\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_x}{\partial\theta} + A_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{55}\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta} +$$
$$A_{55}\frac{\cos\alpha}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} + A_{55}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + A_{44}\frac{\sin\alpha}{R}\varphi_x +$$
$$A_{44}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial w}{\partial x} - A_{12}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial u}{\partial x} - B_{12}\frac{\cos\alpha}{R}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} -$$
$$A_{22}\frac{\cos\alpha}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} - A_{22}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}u -$$
$$A_{22}\frac{\cos^2\alpha}{R^2}w - B_{22}\frac{\cos\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta} - B_{22}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}\varphi_x$$

(۱۴-د)

$$B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_{11}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2} + B_{12}(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta} + \frac{\cos\alpha}{R}\frac{\partial w}{\partial x}) +$$
$$D_{12}(\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi_\theta}{\partial x\partial\theta} + \frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x})$$
$$+B_{66}(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}) +$$
$$D_{66}(\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi_\theta}{\partial x\partial\theta} - \frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial\theta^2})$$
$$B_{11}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + D_{11}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + B_{12}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} +$$
$$B_{12}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}u + B_{12}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}w$$
$$D_{12}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta} + D_{12}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}\varphi_x - D_{12}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} -$$
$$B_{22}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} - B_{22}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}u$$
$$-B_{22}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}w - D_{22}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta} -$$
$$D_{22}\frac{\sin\alpha}{R^2}\varphi_x - A_{44}\varphi_x - A_{44}\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$-A_{45}\varphi_\theta + A_{45}\frac{\cos\alpha}{R}v - A_{45}\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta} - I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_2\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2}=0$$

(۱۴-ر)

$$B_{66}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta} - B_{66}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial v}{\partial x} + B_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} +$$
$$D_{66}\frac{\partial^2\varphi_\theta}{\partial x^2} - D_{66}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\phi_\theta}{\partial x} - D_{66}\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x\partial\theta}$$
$$B_{12}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta} + D_{12}\frac{1}{R}\frac{\partial^2\phi_\theta}{\partial x\partial\theta} + B_{22}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} +$$
$$B_{22}\frac{\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} + B_{22}\frac{\cos\alpha}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}$$
$$D_{22}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi_\theta}{\partial\theta^2} + D_{22}\frac{\sin\alpha}{R}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial\theta} + B_{66}\frac{2\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} -$$
$$B_{66}\frac{2\sin^2\alpha}{R^2}v - B_{66}\frac{2\sin\alpha}{R}\frac{\partial v}{\partial x} + D_{66}\frac{2\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} -$$
$$D_{66}\frac{2\sin^2\alpha}{R^2}\varphi_\theta + D_{66}\frac{2\sin\alpha}{R^2}\frac{\partial\varphi_x}{\partial\theta} -$$
$$A_{55}\frac{\cos\alpha}{R}\varphi_\theta + A_{55}\frac{\cos\alpha}{R}v$$
$$-A_{55}\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta} - A_{54}\frac{\cos\alpha}{R}\varphi_x - A_{54}\frac{\partial w}{\partial x} - I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_1\frac{\partial^2\varphi_\theta}{\partial t^2}=0$$

که ضرایب A_{ij}، B_{ij} و C_{ij} بصورت رابطه (۱۵) تعریف شده‌اند:

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} Q_{ij}(h_k - h_{k-1}) \\
B_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_{ij}(h_k^2 - h_{k-1}^2) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} Q_{ij}(h_k^3 - h_{k-1}^3)
\end{aligned}
\qquad (۱۵)
$$

۳- روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته[1]:

برای حل ارتعاش آزاد اتصال دو پوسته استوانه‌ای - مخروطی از روش عددی مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته با توجه به در نظر گرفتن تمام شرایط مرزی استفاده شده است. در این روش همگرایی نتایج تعداد نقاط و چگونگی توزیع مهم است که در این مقاله از توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت (چبیشف-گوس-لوباتو) استفاده شده است که بصورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شود:

$$
x_i = \frac{L}{2}\left[1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)\right], \qquad (۱۶)
$$

$$
\text{if} \quad 0 \le x \le L \qquad i = 1, 2, \ldots, N
$$

در رابطه (۱۶)، N تعداد نقاط انتخابی در امتداد طول پوسته است. بر اساس روش تفاضلات مربعی، مشتقات یک تابع از هر مرتبه‌ای در نقطه‌ای دلخواه مانند $x = x_i$ بصورت رابطه (۱۷) تعریف می‌گردد [۲۴]:

$$
\left.\frac{d^r f}{dx^r}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(r)} f(x_i) \qquad (۱۷)
$$

که $A_{ij}^{(r)}$ ماتریس ضرایب وزنی است که همانند رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود [۲۵]:

$$
\begin{aligned}
A_{ij}^{(r)} &= A_{ij}^{(1)} A_{ij}^{(r-1)} \qquad 2 \le r \le N-1 \\
[A]^{(r)} &= [A]^{(r-1)} \times [A]^{(1)}
\end{aligned}
\qquad (۱۸)
$$

$$
A_{ij}^{(1)} = \begin{cases}
\dfrac{M(\xi_i)}{(\xi_i - \xi_j)M(\xi_j)} \quad \text{for} \ \ i \ne j \\
-\displaystyle\sum_{k=1,k\ne i}^{N} A_{ik}^{(1)} \qquad \text{for} \quad i=j
\end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, N
$$

$$
M(\xi_i) = \prod_{j=1, j\ne i}^{N} (\xi_i - \xi_j) \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, N
$$

۴- حل معادلات پوسته استوانه‌ای با استفاده از روش GDQM

با توجه به تقارن پوسته‌ها در راستای محیطی، جابجایی‌ها بر اساس روش GDQM بصورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
u(x,\theta,t) &= U(x)\cos(n\theta)\cos(\omega t) \\
v(x,\theta,t) &= V(x)\sin(n\theta)\cos(\omega t) \\
w(x,\theta,t) &= W(x)\cos(n\theta)\cos(\omega t) \\
\varphi_x(x,\theta,t) &= \phi_x(x)\cos(n\theta)\cos(\omega t) \\
\varphi_\theta(x,\theta,t) &= \phi_\theta(x)\sin(n\theta)\cos(\omega t)
\end{aligned}
\qquad (۱۹)
$$

که در آن n شمارنده موج محیطی و ω فرکانس طبیعی سازه است. با جایگذاری روابط (۱۹) در روابط (۱۴) ماتریس [H] به دست خواهد آمد که درایه‌های آن در پیوست مقاله بیان شده است. که $U^{(i)}$، $V^{(i)}$، $W^{(i)}$، $\phi_x^{(i)}$ و $\phi_\theta^{(i)}$ مشتقات مرتبه (i) جابجایی‌ها می‌باشند که با توجه به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته جایگزین خواهند شد.

۵- نتایج

در این بخش نتایج حاصل از ارتعاش سازه به هم پیوسته پوسته‌های استوانه‌ای - مخروطی هیبریدی ارائه شده است. خواص مکانیکی مواد کامپوزیتی و فلز آلومینیم در جدول ۱ ارائه شده است. کلیه نتایج در تحلیل ارتعاش آزاد سازه برای فرکانس بدون بعد بصورت $\Omega = \omega\sqrt{\rho R^2 / E_y}$ بدست آمده است. که ω بیانگر فرکانس طبیعی سازه، ρ بیانگر چگالی مواد کامپوزیت و E_y بیانگر مدول الاستیسیته مواد کامپوزیت در راستای عرضی می‌باشد.

۵-۱- اعتبار سنجی

در این بخش نتایج بدست آمده از روش حاضر با نتایج تحقیقات قبلی مقایسه شده است. تاثیرات لایه‌چینی، زاویه نیم‌راس مخروط و مود جانبی (اعداد داخل پرانتز) بر روی فرکانس طبیعی اتصال دو پوسته استوانه‌ای - مخروطی

جدول ۱- خواص مکانیکی مواد کامپوزیت و آلومینیم

مواد	خواص				
	$E_x(GPa)$	$E_y(GPa)$	$E_s(GPa)$	υ_x	$\rho(kg/m^3)$
کربن - اپوکسی	۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۷	۰/۲۸	۱۶۰۰
شیشه - اپوکسی	۳۸/۶	۸/۲۷	۴/۱۴	۰/۲۶	۱۸۰۰
آرامید اپوکسی	۷۶	۵/۵	۲/۳	۰/۳۴	۱۴۶۰
آلومینیم	۷۲/۴	۷۲/۴	۲۸	۰/۳۳	۲۷۰۰

جدول ۲- مقایسه فرکانس طبیعی بدون بعد $(\Omega = \omega R\sqrt{\rho h / A_{11}})$ اتصال دو پوسته استوانه ای - مخروطی

زوایه مخروط	$\alpha = 30$		$\alpha = 60$	
لایه چینی	روش حاضر	مرجع [۲۳]	روش حاضر	مرجع [۲۳]
[0 90]	۰/۰۳۶۵ (۴)	۰/۰۳۶۶ (۴)	۰/۰۲۵۳ (۳)	۰/۰۲۵۰ (۳)
[0 0 0]	۰/۰۲۳۸(۴)	۰/۰۲۳۸ (۴)	۰/۰۱۸۰ (۴)	۰/۰۱۸۱ (۴)
[0 90 0]	۰/۰۳۰۹ (۴)	۰/۰۳۰۹ (۴)	۰/۰۲۴۱ (۴)	۰/۰۲۴۱ (۴)

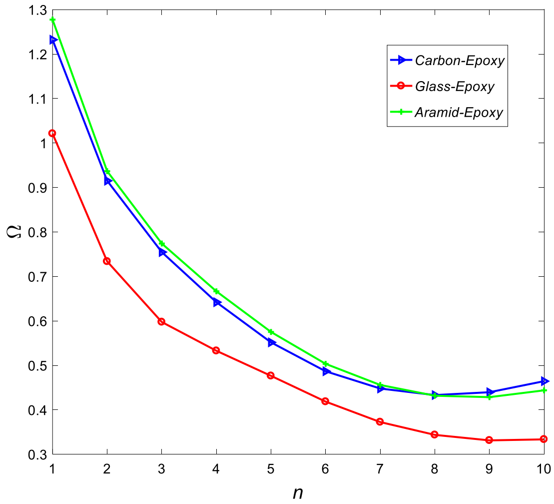
کامپوزیتی در جدول ۲ نشان داده شده است. برای این مقایسه، فرض شده است که دو پوسته استوانه‌ای و مخروطی دارای طول، ضخامت و شعاع یکسان هستند. همچنین شرایط مرزی روی پوسته استوانه‌ای، آزاد و روی پوسته مخروطی، گیردار (FC) در نظر گرفته شده است. ابعاد پوسته به صورت $(L/R = 1, h/R = 0.01)$ و چیدمان مواد بصورت یکسان در نظر گرفته شده است. نتایج نشان داده شده در جدول ۲ بیانگر آن است که تطابق بسیار خوبی بین نتایج حل حاضر و روش سری توانی (مرجع [۲۳]) وجود دارد و در همه موارد نتایج یکسان و قابل قبول است.

۲-۵- نتایج اتصال پوسته‌های هیبریدی استوانه‌ای - مخروطی

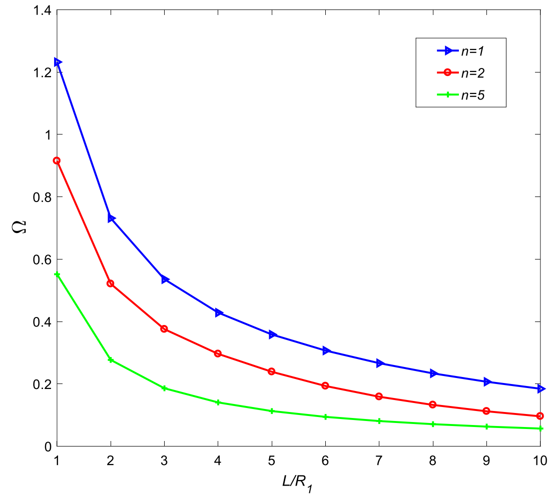
در این بخش اثرات مود جانبی، نیم‌زاویه راس مخروط، کسر حجمی، مواد کامپوزیت، طول و ضخامت پوسته بر روی فرکانس طبیعی بدون بعد اتصال دو پوسته هیبریدی نشان داده شده است. لایه‌چینی در لایه‌های پوسته هیبریدی بصورت چهار لایه متقارن $[Al/0/90/0]_s$ در نظر گرفته شده است. همچنین ابعاد و شرایط مرزی پوسته در حالت کلی بصورت $L/R = 1, h/R = 0.01, BC = CC$ در نظر گرفته شده است.

در شکل (۳) تاثیر مود جانبی و تغییرات مواد کامپوزیت در لایه‌ها بر روی فرکانس طبیعی بدون بعد نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد با افزایش مقدار مود جانبی، فرکانس طبیعی بدون بعد در ابتدا کاهش و سپس در ادامه و در مود فرکانسی ۹ به بعد افزایش یافته است. همچنین بیشترین مقدار فرکانس طبیعی در حالتی که از مواد کربن - اپوکسی در لایه‌های کامپوزیت استفاده شده است اتفاق افتاده است.

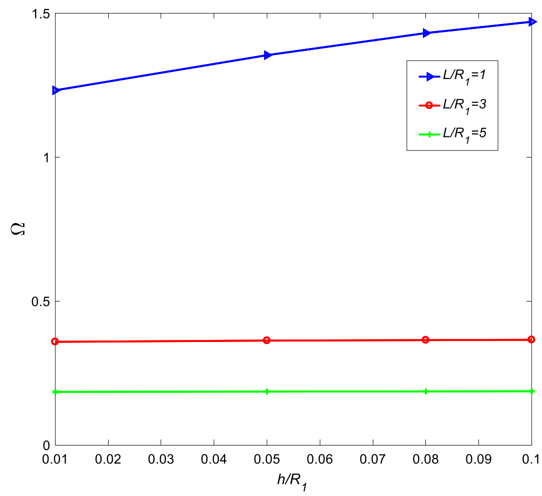
در شکل (۴) تاثیرات طول به شعاع پوسته و مود جانبی بر روی فرکانس طبیعی اتصال دو پوسته ترسیم شده است. همانطور که دیده می‌شود با افزایش مقدار نسبت طول به شعاع پوسته فرکانس طبیعی بدون بعد همواره کاهشی بوده است که در ابتدا با شیب بیشتر و در ادامه با شیب کمتری کاهش یافته است. همچنین اثرات نسبت ضخامت به شعاع پوسته و نسبت طول به شعاع پوسته بر روی فرکانس طبیعی در شکل (۵) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با



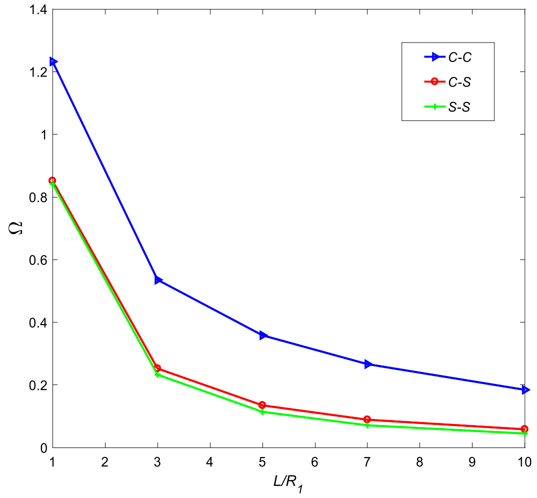
شکل ۳- اثر مود جانبی و مواد کامپوزیت بر روی فرکانس اتصال پوسته‌های هیبریدی



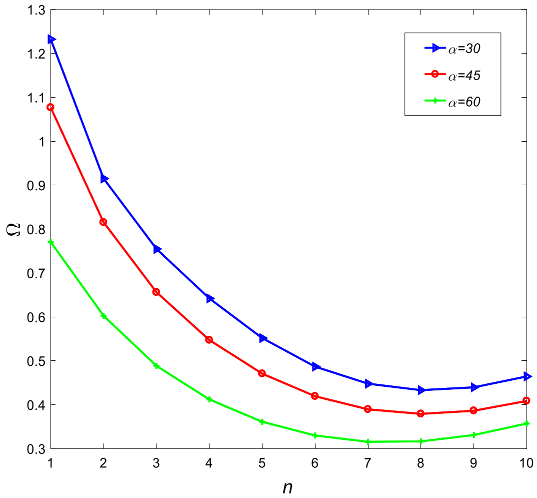
شکل۴- اثر نسبت طول به شعاع پوسته و مود جانبی بر روی فرکانس اتصال پوسته‌های هیبریدی



شکل ۵- اثر نسبت ضخامت به شعاع پوسته و نسبت طول به شعاع بر روی فرکانس اتصال پوسته‌های هیبریدی



شکل ۶- اثر شرایط مرزی و نسبت طول به شعاع پوسته بر روی فرکانس اتصال پوسته‌های هیبریدی

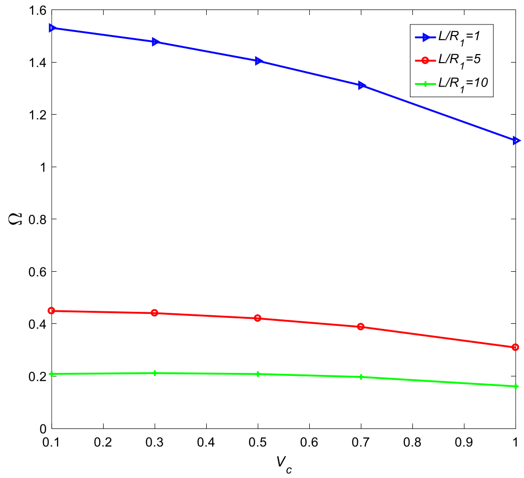


شکل ۷- اثر زوایه نیم راس مخروط و مود جانبی بر روی فرکانس اتصال پوسته‌های هیبریدی

افزایش نسبت ضخامت به شعاع پوسته فرکانس طبیعی با شیب کمی افزایش یافته است که در نسبت طول به شعاع پوسته در مقدار ۱، شیب افزایش بطور قابل محسوسی بیشتر بوده است.

در شکل (۶) اثرات شرایط مرزی و نسبت طول به شعاع پوسته بر روی فرکانس طبیعی اتصال دو پوسته استوانه‌ای – مخروطی هیبریدی نشان داده شده است. همانطور که نتایج نشان داده است فرکانس طبیعی در حالت شرایط مرزی گیردار – گیردار از سایر شرایط مرزی بیشتر بوده است. این بدین دلیل است که در حالت شرایط مرزی گیردار- گیردار سفتی سازه بیشتر است. همچنین تاثیر تغییرات زاویه نیم‌راس مخروط و مود جانبی بر روی فرکانس طبیعی در شکل (۷) ترسیم شده است. نتایج نشان داده است که با افزایش مقدار زوایه نیم‌راس در پوسته مخروطی، فرکانس طبیعی بدون بعد کاهش یافته است. همچنین مشاهده شده است که با افزایش مقدار مود جانبی فرکانس در ابتدا کاهش و سپس افزایش یافته است. همچنین بیشترین مقدار فرکانس در حالتی که مود جانبی برابر با مقدار ۱ می‌باشد اتفاق افتاده است.

اثرات کسر حجمی و مود جانبی بر روی فرکانس طبیعی بدون بعد اتصال دو پوسته استوانه‌ای – مخروطی هیبریدی در شکل (۸) ترسیم شده است. نتایج نشان داده است که با افزایش



شکل ۸- اثر کسر حجمی و نسبت طول به شعاع پوسته بر روی فرکانس اتصال پوسته‌های هیبریدی

مقدار کسر حجمی مواد کامپوزیت نسبت به فلز آلومینیم فرکانس طبیعی بدون بعد سازه هیبریدی کاهش یافته است. همچنین مشاهده شده است که در ابتدا اختلاف بین فرکانس‌ها زیاد بوده که با افزایش نسبت طول به شعاع پوسته کاهش یافته است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، بررسی ارتعاشات آزاد اتصال پوسته‌های استوانه‌ای – مخروطی هیبریدی با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی[3] تحت شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. روابط سازه اتصال دو پوسته هیبریدی با استفاده از اصل همیلتون با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی در نقاط اتصال پوسته‌ها استخراج شده است و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته روابط حاکم بر اتصال دو پوسته حل شده است. مهم‌ترین نتایج حل ارتعاشات آزاد اتصال دو پوسته هیبریدی عبارت است از:

۱- فرکانس طبیعی بدون بعد اتصال پوسته‌های هیبریدی استوانه‌ای – مخروطی با افزایش نسبت طول به شعاع پوسته همواره کاهشی بوده است. همچنین با افزایش مود جانبی در ابتدا فرکانس کاهشی بوده و در ادامه افزایش یافته است.

۲- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع پوسته، فرکانس طبیعی بدون بعد سازه افزایش یافته است. همچنین با افزایش مقدار زوایه نیم‌راس مخروط پوسته مخروطی، فرکانس طبیعی بدون بعد کاهش یافته است.

۳- با افزایش کسر حجمی کامپوزیت در مقایسه با فلز آلومینیم، فرکانس طبیعی سازه کاهشی بوده است. همچنین در شرایط مرزی گیردار – گیردار بیشترین فرکانس در سازه اتفاق افتاده است.

۴- بیشترین فرکانس در حالتی که مواد کامپوزیت از جنس کربن – اپوکسی استفاده گردیده نسبت به سایر مواد کامپوزیت بیشتر و بالاتر بوده است.

واژه‌نامه

1. generalized differential quadrature method (GDQM)
2. functionally graded materials (FGM)
3. first order shear deformation theory (FSDT)

مراجع

1. Alibeigloo, A., "Static and Vibration Analysis of Axi-Symmetric Angle-Ply Laminated Cylindrical Shell Using State Space Differential Quadrature Method", *International Journal of Pressure Vessels*

and Piping, Vol. 86, No. 11; pp. 738–747, 2009.
2. Amabili, M., "Nonlinear Vibrations of Angle-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells: Skewed Modes", *Composite Structures*, Vol. 94, No.12, pp. 3697–3709, 2012.
3. Li, Z.M., and Qiao, P., "Nonlinear Vibration Analysis of Geodesically-Stiffened Laminated Composite Cylindrical Shells in an Elastic Medium", *Composite Structures*, Vol. 111, pp. 473–487, 2014.
4. Lopatin, A.V., and Morozov, E.V., "Fundamental Frequency of the Laminated Composite Cylindrical Shell with Clamped Edges", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 92, pp. 35–43, 2015.
5. Ghasemi, A.R., and Mohandes, M., "Free Vibration Analysis of Rotating Fiber-Metal Laminate Circular Cylindrical Shells", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2017, DOI: 10.1177/1099636217706 912.
6. Mohandes, M., and Ghasemi, A.R., "A New Approach to Reinforce the Fiber of Nanocomposite Reinforced by CNTs to Analyze Free Vibration of Hybrid Laminated Cylindrical Shell Using Beam Modal Function Method", *European Journal of Mechanics- A/Solids*, Vol. 73, pp. 224-234, 2019.
7. Talebitooti, M., Ghayour, M.,, Ziaei-Rad, S., and Talebitooti, R., "Free Vibrations of Rotating Composite Conical Shells with Stringer and Ring Stiffeners", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 80, pp. 201–215, 2010.
8. Malekzadeh, P., and Heydarpour, Y., "Free Vibration Analysis of Rotating Functionally Graded Truncated Conical Shells", *Composite Structures*, Vol. 97, pp. 176–188, 2013.
9. Jin, G., Ma, X., Shi, S., Ye, T., and Liu, Z., "A Modified Fourier Series Solution for Vibration Analysis of Truncated Conical Shells with General Boundary Conditions", *Applied Acoustics*, Vol. 85, pp. 82-96, 2014.
10. Kamarian, S., Salim, M., Dimitri, R., and Tornabene, F., "Free Vibration Analysis of Conical Shells Reinforced with Agglomerated Carbon Nano Tubes", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 108-109, No. 1, pp. 157-165, 2016.
11. Shakouri, M., and Kouchakzadeh, M.A., "Analytical Solution for Vibration of Generally Laminated Conical and Cylindrical Shells", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 131-132, pp. 414-425, 2017.
12. Javed, S., "Free Vibration Characteristic of Laminated Conical Shells Based on Higher-Order Shear Deformation Theory", *Composite Structures*, Vol. 204, pp. 80-87, 2018.
13. Shakouri, M., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Rotating Conical Shells in Thermal Environment", *Composites Part B*, Vol. 163, pp. 574–584, 2019.
14. Maji, P., Rout, M., and Karmakar, A., "Free Vibration Response of Carbon Nanotube Reinforced Pre Twisted Conical Shell under Thermal Environment, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers", *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 234, No. 3, 2020, Doi.org/10.1177/0954406219886.
15. Ma, X., Jin, G., Xiong, Y., and Liu, Z., "Free and Forced Vibration Analysis of Coupled Conical–Cylindrical Shells with Arbitrary Boundary Conditions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 88, pp. 122-137, 2014.
16. Chen, M Xie, K Jia, W and Xu K., "Free and Forced Vibration of Ring-Stiffened Conical–Cylindrical Shells with Arbitrary Boundary Conditions", *Ocean Engineering*, Vol. 108, pp. 241-256. 2015.
17. Sarkheil, S., and Foumani, M.S., "Free Vibrational Characteristics of Rotating Joined Cylindrical-Conical Shells:, *Thin-Walled Structures*, Vol. 107, pp. 657-670, 2016.
18. Izadi, M.H., Hashemi, S.H., and Korayem, M.H., "Analytical and FEM Solutions for Free Vibration of Joined Cross-Ply Laminated Thick Conical Shells Using Shear Deformation Theory", *Archive of Applied Mechanics* , Vol. 88, pp. 2231–2246, 2018.
19. Bagheri, H., Kiani, Y., and Eslami, M.R., "Free Vibration of FGM Conical–Spherical Shells", *Thin-Walled Structures*, Vol. 160, pp. 107387, 2021.
20. Rezaiee-Pajand, M., SobhaniAmir, E., and Masoodi, R., "Semi-Analytical Vibrational Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotubes Coupled Conical-Conical Shells", *Thin-Walled Structures*, Vol. 159, pp. 107272, 2021.
21. Dung, D.V., and Chan, D.Q., "Analytical Investigation on Mechanical Buckling of FGM Truncated Conical Shells Reinforced by Orthogonal Stiffeners Based on FSDT", *Composite Structures*, Vol. 159, pp. 827-841, 2017.
22. Patel, B.P., Shukla, K.K., and Nath Y., "Thermal Post Buckling Analysis of Laminated Cross-Ply Truncated Circular Conical Shells", *Composite Structures*, Vol. 71, pp. 101–114, 2005.
23. Kouchakzadeh, M.A., and Shakouri, M., "Free Vibration Analysis of Joined Cross-Ply Laminated Conical Shells", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 78, pp. 118-125, 2014.
24. Shu, C., "An Efficient Approach for Free Vibration Analysis of Conical Shells", *International Journal of Mechanical Sciences*", Vol. 38, pp. 935–949, 1996.
25. Xu, C.S., Xia, Z.Q., and Chia, C.Y., "Non-Linear Theory and Vibration Analysis of Laminated Truncated, Thick, Conical Shells", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 31, pp. 139–154, 1996.

پیوست

داریه‌های ماتریس [H] که با استفاده از جایگذاری روابط جابجایی (۱۹) در معادلات پوسته بدست آمده است بصورت روابط (الف) قابل بیان می‌باشند:

$$
\begin{aligned}
H_{11} &= A_{11}U^{(2)} - A_{66}\frac{n^2}{R^2}U + A_{11}\frac{\sin\alpha}{R}U^{(1)} + A_{12}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}U - A_{12}\frac{\sin\alpha}{R}U^{(1)} - A_{22}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}U + I_0\omega^2 U\\
H_{12} &= A_{12}\frac{n}{R}V^{(1)} - A_{66}\frac{n\sin\alpha}{R^2}V + A_{66}\frac{n}{R}V^{(1)} + A_{12}\frac{n\sin\alpha}{R^2}V - A_{22}\frac{n\sin\alpha}{R^2}V\\
H_{13} &= A_{12}\frac{\cos\alpha}{R}W^{(1)} + A_{12}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}W - A_{22}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}W\\
H_{14} &= B_{11}\phi_x^{(2)} + B_{12}\frac{\cos\alpha}{R}\phi_x^{(1)} - B_{66}\frac{n^2}{R^2}\phi_x + B_{12}\frac{\sin\alpha}{R}\phi_x^{(1)} + B_{12}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}\phi_x - B_{12}\frac{\sin\alpha}{R}\phi_x^{(1)} - B_{22}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}\phi_x + I_1\omega^2\phi_x\\
H_{15} &= B_{12}\frac{n}{R}\phi_\theta^{(1)} + B_{66}\frac{n}{R}\phi_\theta^{(1)} - B_{66}\frac{n\sin\alpha}{R^2}\phi_\theta - B_{12}\frac{n\sin\alpha}{R^2}\phi_\theta - B_{22}\frac{n\sin\alpha}{R^2}\phi_\theta
\end{aligned}
$$

(الف–۱)

$$
\begin{aligned}
H_{21} &= -A_{66}\frac{n}{R}U^{(1)} - A_{12}\frac{n}{R}U^{(1)} - A_{22}\frac{n\sin\alpha}{R^2}U - A_{66}\frac{2n\sin\alpha}{R^2}U\\
H_{22} &= -A_{66}\frac{\sin\alpha}{R}V^{(1)} + A_{66}V^{(2)} - A_{22}\frac{n^2}{R^2}V - A_{66}\frac{2\sin^2\alpha}{R^2}V + A_{66}\frac{2\sin\alpha}{R}V^{(1)} - A_{55}\frac{\cos\alpha}{R^2}V + I_0\omega^2 V\\
H_{23} &= -A_{12}\frac{n\cos\alpha}{R^2}W - A_{55}\frac{n\cos\alpha}{R^2}W + A_{54}\frac{\cos\alpha}{R}W^{(1)}\\
H_{24} &= -B_{66}\frac{n}{R}\phi_x^{(1)} - B_{12}\frac{n}{R}\phi_x^{(1)} - B_{22}\frac{n\sin\alpha}{R^2}\phi_x + B_{66}\frac{2\sin\alpha}{R}\phi_x^{(1)} - B_{66}\frac{2n\sin\alpha}{R^2}\phi_x + A_{45}\frac{\cos\alpha}{R}\phi_x\\
H_{25} &= B_{66}\phi_\theta^{(2)} - B_{66}\frac{\sin\alpha}{R}\phi_\theta^{(1)} - B_{22}\frac{n^2}{R^2}\phi_\theta - B_{66}\frac{2\sin^2\alpha}{R^2}\phi_\theta + A_{55}\frac{\cos\alpha}{R}\phi_\theta + I_1\omega^2\phi_\theta
\end{aligned}
$$

(الف–۲)

$$
\begin{aligned}
H_{31} &= -A_{12}\frac{\cos\alpha}{R}U^{(1)} - A_{22}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}U\\
H_{32} &= -A_{55}\frac{n\cos\alpha}{R^2}V - A_{22}\frac{n\cos\alpha}{R^2}V - A_{45}\frac{\cos\alpha}{R}V^{(1)} - A_{45}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}V\\
H_{33} &= A_{44}W^{(2)} - A_{55}\frac{n^2}{R^2}W + A_{44}\frac{\sin\alpha}{R}W^{(1)} - A_{22}\frac{\cos^2\alpha}{R^2}W - A_{45}\frac{n}{R}W^{(1)} -\\
&\quad A_{54}\frac{n}{R}W^{(1)} + A_{45}\frac{n\sin\alpha}{R^2}V + I_0\omega^2 W\\
H_{34} &= A_{44}\phi_x^{(1)} + A_{44}\frac{\sin\alpha}{R}\phi_x - B_{12}\frac{\cos\alpha}{R}\phi_x^{(1)} - B_{22}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}\phi_x - A_{54}\frac{n}{R}\phi_x\\
H_{35} &= A_{55}\frac{n}{R}\phi_\theta - B_{22}\frac{n\cos\alpha}{R^2}\phi_\theta - A_{45}\phi_\theta^{(1)} + A_{45}\frac{\sin\alpha}{R}\phi_\theta
\end{aligned}
$$

(الف–۳)

$$H_{41}=B_{11}U^{(2)}-B_{66}\frac{n^2}{R^2}U+B_{11}\frac{\sin\alpha}{R}U^{(1)}+B_{12}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}U-B_{12}\frac{\sin\alpha}{R}U^{(1)}-B_{22}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}U+I_1\omega^2U$$

$$H_{42}=B_{12}\frac{n}{R}V^{(1)}-B_{66}\frac{n\sin\alpha}{R^2}V+B_{66}\frac{n}{R}V^{(1)}+B_{12}\frac{n\sin\alpha}{R^2}V-B_{22}\frac{n\sin\alpha}{R^2}V+A_{45}\frac{\cos\alpha}{R}V$$

$$H_{43}=B_{12}\frac{\cos\alpha}{R}W^{(1)}+B_{12}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}W-B_{22}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R^2}W-A_{44}W^{(1)}+A_{45}\frac{n}{R}W$$

$$H_{44}=D_{11}\phi_x{}^{(2)}+D_{12}\frac{\cos\alpha}{R}\phi_x{}^{(1)}-D_{66}\frac{n^2}{R^2}\phi_x+D_{12}\frac{\sin\alpha}{R}\phi_x{}^{(1)}+D_{12}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}\phi_x \quad \text{(الف–۴)}$$

$$-D_{12}\frac{\sin\alpha}{R}\phi_x{}^{(1)}-D_{22}\frac{\sin^2\alpha}{R^2}\phi_x-A_{44}\phi_x+I_2\omega^2\phi_x$$

$$H_{55}=D_{12}\frac{n}{R}\phi_\theta{}^{(1)}+D_{66}\frac{n}{R}\phi_\theta{}^{(1)}-D_{66}\frac{n\sin\alpha}{R^2}\phi_\theta-D_{12}\frac{n\sin\alpha}{R^2}\phi_\theta-D_{22}\frac{n\sin\alpha}{R^2}\phi_\theta+A_{45}\phi_\theta$$

$$H_{51}=-B_{66}\frac{n}{R}U^{(1)}-B_{12}\frac{n}{R}U^{(1)}-B_{22}\frac{n\sin\alpha}{R^2}U-B_{66}\frac{2n\sin\alpha}{R^2}U$$

$$H_{52}=-B_{66}\frac{\sin\alpha}{R}V^{(1)}+B_{66}V^{(2)}-B_{22}\frac{n^2}{R^2}V-B_{66}\frac{2\sin^2\alpha}{R^2}V$$

$$-B_{66}\frac{2\sin\alpha}{R}V^{(1)}+A_{55}\frac{\cos\alpha}{R}V+I_1\omega^2V$$

$$H_{53}=-B_{22}\frac{n\cos\alpha}{R^2}W+A_{55}\frac{n}{R}W-A_{45}W^{(1)} \quad \text{(الف–۵)}$$

$$H_{54}=-D_{66}\frac{n}{R}\phi_x{}^{(1)}-D_{12}\frac{n}{R}\phi_x{}^{(1)}-D_{22}\frac{n\sin\alpha}{R^2}\phi_x-D_{66}\frac{2n\sin\alpha}{R^2}\phi_x-A_{45}\phi_x$$

$$H_{55}=D_{66}\phi_\theta{}^{(2)}-D_{66}\frac{\sin\alpha}{R}\phi_\theta{}^{(1)}-D_{22}\frac{n^2}{R^2}\phi_\theta-D_{66}\frac{2\sin^2\alpha}{R^2}\phi_\theta-A_{55}\phi_\theta$$

$$+D_{66}\frac{2\sin\alpha}{R}\phi_\theta{}^{(1)}-D_{66}\frac{2n\sin\alpha}{R^2}\phi_\theta+I_2\omega^2\phi_\theta$$