

ترکیب روش المان محدود مرزی مقیاس شده و توابع پایه متعادل شده برای حل مسائل انتقال حرارت

نازنین پیرحاجی خوزانی و نیما نورمحمدی*

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

(دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۰۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۲/۱۹)

چکیده - روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده با مقیاس نمودن پاسخ سطح المان به مرز آن، گسسته سازی را تنها به مرز دامنه محدود می سازد. در این پژوهش، حل مسائل انتقال حرارت در فضای دوبعدی با رویکردی جدید بر پایه روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده به همراه روش توابع پایه متعادل شده مورد نظر قرار گرفته است. روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده، با ارائه روابط در دستگاه مختصات حاوی مختصه های شعاعی و پیرامونی، و تنها با گسسته سازی مرز مسئله بر پایه توسعه حل نیمه تحلیلی در امتداد شعاعی، چالش های وابستگی به المان بندی مناسب در ناحیه حل و یا نیاز به حل های اساسی معادله، چنانکه به ترتیب در روش های اجزا محدود و اجزا مرزی معمول است، را مرتفع می سازد. در این پژوهش پس از مقیاس کردن مرز توسط روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده و استخراج معادلات مربوطه، از روش توابع پایه متعادل شده برای تقریب تابع حل نیمه تحلیلی در امتداد شعاعی استفاده می شود؛ به این صورت که پس از تخمین بخش شعاعی تابع حل مسئله توسط توابع پایه اولیه از نوع چند جمله ای های جیبی شیف نوع اول، عملگر باقیمانده وزنی معادله بر آن اعمال می شود تا ارضای تقریبی آن تحقق یابد. در نهایت اقدام به برآورد ضرایب مجهول مجموعه پاسخ مسئله مرتبط با درجات آزادی مرزی مسئله می شود. بدین ترتیب نیازی به حل مسئله مقادیر ویژه در گام نهایی نخواهد بود. در نتایج عددی نشان داده خواهد شد که این رویکرد از دقت و همگرایی مطلوبی نیز برخوردار است.

واژه های کلیدی: روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده، روش توابع پایه متعادل شده، انتگرال باقی مانده وزنی.

Scaled Boundary Finite Element Method Coupled with Equilibrated Basis Functions for Heat Transfer Problems

N. Pirhaji Khouzani and N. Noormohammadi*

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

Abstract: The Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM) discretizes only the boundary by using a technique for scaling the domain response onto its boundary. In this research, heat transfer problems in two-dimensional space are solved with a new approach based on combining the scaled boundary finite element method and the equilibrated basis functions. The SBFEM develops

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Noormohammadi@iut.ac.ir

its relations in radial and circumferential coordinate systems, but only discretizes the boundary of the problem through development of a semi-analytical solution in radial direction. So the challenges of appropriate elemental grid for the solution domain, or the need for fundamental solutions of the equation, as usual in the finite element method or the boundary element method respectively, do not appear. In this research, after scaling the boundary in the scaled boundary finite element method and extracting the related equations, the equilibrated basis functions are used to approximate the semi-analytical solution in radial direction. After estimating the radial solution by the first kind Chebyshev polynomials, the weighted residual equation is applied for approximately satisfaction. Finally, the unknown degrees of freedom of the boundary are derived, and there will be no need for the usual eigenvalue solution of the SBFEM. It will be shown that this approach benefits good accuracy and convergence rate.

Keywords: scaled boundary finite element method, equilibrated basis functions, weighted residual integration.

فهرست علائم

مرتبه تقریب در راستای شعاعی	O_{ξ}	ماتریس ضرایب انتگرال وزنی	A
شار عبوری عمود بر مرز	q_n	بردار ضرایب مجهول	c
بردار شار گره‌ای	\hat{q}	بردار ضرایب مجهول	\mathbf{c}_n
شار حرارتی در گره‌های مرزی	Q	جزء دامنه	dV
عملگر گرادیان	S	جزء مرزی	dS
تابع درجه حرارت	T	بردار ضرایب مجهول	d
تابع دما در دستگاه مقیاس شده	$T(\xi, \eta)$	ماتریس ثابت انتگرال مرزی	\mathbf{E}^{\bullet}
بردار توابع گره‌ای	$\mathbf{T}(\xi)$	ماتریس ثابت انتگرال مرزی	\mathbf{E}'
مقادیر گره‌ای دما	$\hat{\mathbf{T}}$	ماتریس ثابت انتگرال مرزی	\mathbf{E}''
حل دقیق مسئله در نقطه $\hat{\mathbf{a}}$	u_{ex}^i	بردار توابع پایه اولیه	f
پاسخ تقریبی مسئله در نقطه $\hat{\mathbf{a}}$	u_{ap}^i	بردار توابع پایه متعادل شده	F
دمای مجازی در دستگاه مقیاس شده	$w(\xi, \eta)$	ماتریس همانی	I
بردار دمای مجازی گره‌ای	$\mathbf{w}(\xi)$	ماتریس ژاکوبین	J
مختصات x در دستگاه مقیاس شده	$x(\xi, \eta)$	دترمینان ماتریس ژاکوبین	$ \mathbf{J} $
بردار مختصات x در دستگاه کارترین	x	ضرایب هدایت حرارتی	k
مختصات y در دستگاه مقیاس شده	$y(\xi, \eta)$	ماتریس سختی	K
بردار مختصات y در دستگاه کارترین	y	عملگر معادله دیفرانسیل	L
درصد خطای میانگین	$\varepsilon_{avg}(\%)$	تعداد کل گره‌های مرزی	n_B
مختصه محیطی	η	تعداد مراکز وزن شعاعی	n_w
مختصه شعاعی	ξ, ζ	بردار یکه عمود بر مرز	n
فضای پوچ ماتریس ضرایب	Φ	تعداد پایه‌های اولیه	N
ماتریس توابع وزن	ω	توابع شکل	$N(\xi, \eta)$
ناحیه حل	Ω	تعداد نقاط برآورد خطا	N_E
		توابع شکل	$N(\eta)$

۱- مقدمه

اثرات حرارتی می‌توانند بر توزیع تنش در یک ساختار تاثیر بگذارند و از همین روی، جهت جلوگیری از خرابی‌های ناگهانی در سازه‌ها، آگاهی کافی از توزیع حرارت در آن‌ها ضروری است. جریان حرارت باعث ایجاد تنش‌های حرارتی در اجزای سازه‌ای در معرض دمای بالا می‌شود. این تنش‌ها در مواردی به حدی شدید هستند که می‌توانند شکست‌های فاجعه‌باری را موجب شوند. پیش‌بینی وضعیت سازه مستلزم حل معادلات مشتقات پاره‌ای همراه با شرایط مرزی حاکم بر رفتار آن است. با توجه به پیچیدگی اغلب مسائل مورد بررسی از منظر هندسه، بارگذاری و خواص مادی، استفاده از روش‌های عددی تنها راه موثر و معقول در حل آن‌ها است. در سال‌های اخیر رویکردی نیمه‌تحلیلی تحت عنوان روش اجزا محدود مرزی مقیاس‌شده^۱ برای حل این معادلات معرفی گردیده است. این روش در سال ۲۰۰۰ توسط وولف و سانگ [۱] توسعه یافته و برخی از ویژگی‌های مطلوب روش اجزا محدود^۲ و روش اجزا مرزی^۳ را با یکدیگر ترکیب می‌کند. در این روش در فضای دوبعدی، معادله دیفرانسیل پاره‌ای با معرفی یک سیستم مختصات مرزی مقیاس‌شده متشکل از مختصات شعاعی^۴ ξ و محیطی^۵ η و ضمن گسسته‌سازی مرز با المان‌های مبتنی بر روش اجزا محدود، به یک معادله دیفرانسیل یک‌بعدی در جهت شعاعی تبدیل می‌شود که به صورت نیمه‌تحلیلی حل می‌گردد. به این ترتیب، بعد فضایی به "یک" کاهش می‌یابد که این امر کاهش حجم محاسبات را به دنبال دارد [۲]. روش اجزا محدود مرزی مقیاس‌شده در زمینه‌های مختلف مهندسی همانند مکانیک، متالورژی، هوا-فضا و مکانیک شکست به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. از ویژگی‌های جالب آن قابلیت تحلیل مسائل دارای تکنیکی همانند ترک، در قالب یک مسئله مقادیر ویژه بدون نیاز به توابع غنی‌ساز است که اجازه محاسبه آسان و کارآمد ضرایب شدت تنش^۶ را می‌دهد [۳]. عملکرد این روش دارای نتایج خوبی در مقایسه با روش اجزا محدود است و نسبت به آن هزینه محاسباتی کمتری دارد [۴].

روش اجزا محدود مرزی مقیاس‌شده برای حل مسائل انتقال حرارت در محیط‌های ناهمسانگرد توسط بازاریار و طالبی [۵] در سال ۲۰۱۵ مورد استفاده قرار گرفت. ایشان از المان‌های مرزی با تعداد گره دلخواه متناظر با مراتب تقریب گوناگون استفاده می‌کنند. در سال ۲۰۲۱ یانگ و وانگ [۶] از روش المان محدود مرزی مقیاس‌شده چند ضلعی^۷ با مش‌های چندضلعی یا چهاردرختی^۸ به منظور گسسته‌سازی مرزهای هندسه به صورت دقیق‌تر استفاده کردند. استفاده از مش‌های چندضلعی برای تطبیق المان با مرز هندسه موجب افزایش تعداد درجات آزادی سیستم می‌گردد. برای کاهش هزینه‌های محاسباتی سعی بر به حداقل رساندن تعداد درجات آزادی است. استفاده از روش المان محدود مرزی مقیاس‌شده با خواص تقارن چرخه‌ای^۹، رویکردی است که یانگ و همکاران [۷] برای تحلیل مسائل انتقال حرارت حالت پایدار بدون کاهش تعداد درجات آزادی به کار گرفتند. در این رویکرد مسئله مقادیر ویژه مرتبه دوم به مجموعه‌ای از مسائل فرعی مستقل کوچک‌تر تقسیم شده است که با حل آن‌ها به جای کل مسئله، هزینه‌های محاسباتی کاهش می‌یابد. یو و همکاران [۸] در سال ۲۰۲۱ برای حل مسائل انتقال حرارت گذرا در هندسه‌های پیچیده از مش چهاردرختی ترکیبی استفاده نمودند که مشکل گره‌های آویزان و مرز هندسی نامنظم را با دقت قابل توجه مدنظر قرار می‌دهد. محاسب و همکاران [۹] در سال ۲۰۱۷ از یک الگوریتم بهینه‌سازی ترکیبی که از الگوریتم ژنتیک به همراه برنامه نویسی درجه دوم متوالی^{۱۰} تشکیل شده است، به منظور کاهش زمان محاسبه و به دست آوردن شار حرارتی ناشناخته مسائل انتقال حرارت گذرا استفاده کردند. توسعه روش برای مسائل الاستیسیته نیز نخستین بار توسط دیکز و وولف صورت گرفت [۱۰]. از آن زمان به طور گسترده‌ای از این روش به ویژه در تخمین ضرایب شدت تنش برای مسائل مکانیک شکست استفاده شده است [۱۱]. در روش اجزا محدود مرزی مقیاس‌شده، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در جهت محیطی با استفاده از روش اجزا محدود به فرم ضعیف درآمده‌اند و در عین حال، در جهت شعاعی به فرم قوی

را افزایش می‌دهد.

آنچه در ادامه مقاله می‌آید بدین شرح است؛ در بخش دوم کلیات روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده و نحوه استخراج معادلات حاکم تشریح می‌شود. در بخش سوم به بیان اصول روش پیشنهادی پرداخته می‌شود. بخش چهارم مثال‌های عددی برای بررسی عملکرد روش ارائه می‌کند. نهایتاً بخش پنجم به جمع‌بندی مقاله می‌پردازد.

۲- روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده در ترکیب با روش توابع پایه متعادل شده

دستگاه مختصات در روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده، مطابق شکل (۱) دارای دو مختصه شعاعی و محیطی با منشأ نقطه‌ای به نام مرکز مقیاس (O) است. مختصه شعاعی که با پارامتر نرمال ξ نشان داده می‌شود، از صفر تا یک را پوشش می‌دهد، به طوری که در مرکز مقیاس معادل با $\xi=0$ و در مرز معادل $\xi=1$ است. مختصه محیطی η نیز در امتداد مرز تعریف می‌شود و در محدوده هر المان مرزی، از مقدار -1 تا $+1$ را پوشش می‌دهد. هر نقطه‌ای درون المان با مختصات x و y را می‌توان با به کارگیری روابط (۱) و (۲) در دستگاه مختصات مقیاس شده و بر اساس مختصات نقاط گره‌ای المان مرزی به صورت زیر نوشت [۲]:

$$x(\xi, \eta) = \xi N(\eta)x \quad (1)$$

$$y(\xi, \eta) = \xi N(\eta)y \quad (2)$$

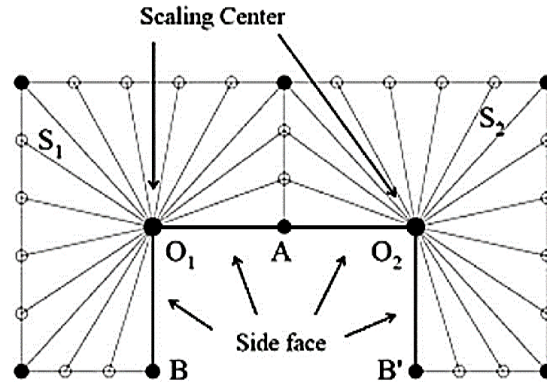
معادله بالا یک انتقال از دستگاه مختصات کارتزین به دستگاه مختصات مرزی مقیاس شده ξ و η است. در رابطه بالا x و y مختصات نقاط گره‌ای المان بر روی مرز گسسته بوده و $N(\eta)$ توابع شکل لاگرانژی مرزی مشابه روش اجزا محدود هستند. به طور مثال این توابع برای یک جزء خطی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$N(\eta) = [N_1(\eta) \quad N_2(\eta)] \\ = \left[\frac{1}{2}(1-\eta) \quad \frac{1}{2}(1+\eta) \right] \quad (3)$$

باقی می‌ماند. در این روش نیمه تحلیلی، انتخاب نقطه‌ای به نام مرکز مقیاس بندی^{۱۱} ضروری است. این نقطه باید بتواند کلیه گره‌های دامنه را در اصطلاح ببیند. این موضوع باعث ایجاد محدودیت‌هایی در هندسه‌های پیچیده می‌شود که با تقسیم کل دامنه به زیردامنه‌های کوچک‌تر قابل حل است (شکل ۱).

در عین حال روش ترفرتز یکی از قدیمی‌ترین روش‌های مرزی بدون شبکه است. در این روش پاسخ معادله توسط توابعی تقریب زده می‌شود که قابلیت ارضای دقیق صورت همگن آن را دارند [۱۲]. بنابراین حجم اصلی کار به اعمال شرایط مرزی محدود می‌شود. روش حل‌های اساسی با رویکردی مشابه، از حل‌های اساسی عملگر معادله به عنوان پایه‌های حل استفاده می‌کند [۱۳]. روش توابع پایه نمایی نیز به منظور تسهیل استخراج پایه‌های حل در دو روش قبلی، توسط برومند و همکاران معرفی شد [۱۴]. در سال‌های اخیر به منظور تسهیل بیشتر استخراج پایه‌های حل، از جمله در محیط‌های ناهمگن، روش توابع پایه متعادل شده توسط نورمحمدی و همکاران [۱۵] ارائه شد، این روش قادر به تشکیل پایه‌هایی برای سری پاسخ است که معادله را به طور تقریبی ولی با دقت بالا ارضا می‌کنند. این روش برای حل مسائل هارمونیک، الاستیسیته، خمش و پایداری ورق و نیز مسائل شکست توسعه یافته است [۱۶-۱۹].

در تحقیق حاضر با به کارگیری روش توابع پایه متعادل شده برای حل معادله برخاسته در راستای شعاعی، قابلیت‌های دو روش در ترکیب با یکدیگر نمایان می‌شود. به عبارت دیگر، از یک روش تقریبی در راستای شعاعی بهره گرفته می‌شود که قادر به تولید پایه‌هایی با توان ارضای تقریبی معادله راستای شعاعی است. این پایه‌ها در اصطلاح پایه‌های متعادل شده نامیده می‌شوند، زیرا حاصل اعمال معادله تعادل بر مجموعه اولیه پایه‌ها هستند. سپس روابط حل بر مبنای درجات آزادی توسعه یافته و مطابق مرسوم در روش اجزا محدود مرزی حل می‌شوند. نشان داده خواهد شد که ایده مطرح شده علیرغم سادگی در کاربرد، بسیار موثر عمل کرده و گستره اعمال روش



شکل ۱- تقسیم دامنه به زیردامنه‌های کوچک‌تر در فضای دوبعدی [۵].

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{b}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{b}^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (8)$$

که در آن از اختصارهای زیر استفاده می‌شود:

$$\mathbf{b}^1 = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}(\eta)_{,\eta} \mathbf{y} \\ -\mathbf{N}(\eta)_{,\eta} \mathbf{x} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{b}^2 = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{Bmatrix} -\mathbf{N}(\eta) \mathbf{y} \\ \mathbf{N}(\eta) \mathbf{x} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

درجه حرارت جزء مرزی در $\xi=1$ ، با به‌کارگیری توابع شکل رابطه (۳) در کل سطح المان درونیابی گشته و بر این اساس، گسسته‌سازی به مرز محدود می‌شود:

$$\mathbf{T}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\eta) \mathbf{T}(\xi) \quad (11)$$

به عبارت دیگر مقادیر گره‌ای المان مرزی، خود تابعی از متغیر ξ هستند و به این صورت در سطح المان گسترش می‌یابند. معادله فوق را می‌توان به نوعی با درونیابی مقادیر $\mathbf{T}(\xi)$ ، تعمیمی از رویکرد تفکیک متغیرها در جهت محیطی η تفسیر کرد. با استفاده از معادله (۱۱) و به‌کارگیری معادله (۸)، مجدداً به منظور تبعیت از نوشتار مرسوم در مراجع این روش، معادله (۱۲) پدیدار می‌گردد:

$$\begin{Bmatrix} T_{,x} \\ T_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^1 \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}^2 \mathbf{T}(\xi) \quad (12)$$

در رابطه بالا \mathbf{B}^1 و \mathbf{B}^2 عباراتی مستقل و تابع ξ می‌باشند که به نوعی جایگزین ماتریس گرادیان حرارتی گشته‌اند و چنین

برای انتقال مختصات، نیاز به ماتریس ژاکوبین است که به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

با استفاده از رابطه مشتقات فضایی در دستگاه مختصات کارتزین و مرزی، چنین نتیجه می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

سطح dV از دامنه المان که در انتگرال‌ها بروز می‌کند، با در نظر گرفتن ملاحظات هندسی برابر است با:

$$dV = \xi |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (6)$$

همچنین به منظور محاسبه مقادیر انتگرال مرزی، طول المان کوچک dS در مرز ($\xi=1$) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$dS = \sqrt{(\mathbf{N}(\eta)_{,\eta} \mathbf{x})^2 + (\mathbf{N}(\eta)_{,\eta} \mathbf{y})^2} d\eta = \Delta_s d\eta \quad (7)$$

با هدف توسعه روابط بر روی مرز $\xi=1$ ، با استفاده از مشتق معادلات (۱) و (۲) و جایگذاری معادلات حاصل در رابطه (۵)، شکل جدید این عبارات ماتریسی با هدف تسهیل روابط بعدی و نیز به عنوان نوشتار رایج روش اجزا محدود مرزی مقیاس‌شده، مطابق رابطه (۸) حاصل می‌شود:

تعریف می شوند [۲]:

$$\mathbf{B}^1 = \mathbf{b}^1 \mathbf{N}(\eta) = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{Bmatrix} y(\eta)_{,\eta} \\ -x(\eta)_{,\eta} \end{Bmatrix} \mathbf{N}(\eta) \quad (13)$$

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{b}^2 \mathbf{N}(\eta)_{,\eta} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{Bmatrix} -y(\eta) \\ x(\eta) \end{Bmatrix} \mathbf{N}(\eta)_{,\eta} \quad (14)$$

معادله انتقال حرارت حالت پایدار و بدون وجود منابع گرمایی در محیط ناهمسانگرد به شرح زیر می باشد:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{k} \mathbf{S} T = k_{xx} T_{,xx} + 2k_{xy} T_{,xy} + k_{yy} T_{,yy} = 0 \quad (15)$$

در رابطه بالا T درجه حرارت و k_{ij} ضرایب هدایت حرارتی ماده می باشند. به منظور تسهیل روابط بعدی، شکل ماتریسی رابطه نیز با استفاده از عملگر گرادیان $\mathbf{S} = [\partial/\partial x \quad \partial/\partial y]^T$ و ماتریس ضرایب هدایت حرارتی $\mathbf{k} = \{k_{ij}\}$ آورده شده است. رابطه انتگرال وزنی برای معادله (۱۵) در دامنه المان V دارای المان مرزی S چنین بیان می گردد:

$$\iint_V w \mathbf{S}^T \mathbf{k} \mathbf{S} T dV = 0 \quad (16)$$

w تابع وزن اعمالی به عملگر در سطح المان است. با الهام از روش وزنی گالرکین برای رابطه سازی باقی مانده وزنی به فرم ضعیف، عباراتی که دارای مشتق هستند با اعمال انتگرال گیری جزء به جزء تفکیک گشته و بخش مربوط به انتگرال مرزی از آن ها استخراج می گردد تا رابطه زیر حاصل شود:

$$\iint_V w \mathbf{S}^T \mathbf{k} \mathbf{S} T dV = - \iint_V (\mathbf{S} w)^T \mathbf{k} \mathbf{S} T dV + \int_S w \mathbf{n}^T \mathbf{k} \mathbf{S} T dS \quad (17)$$

$\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$ بردار یکه عمود بر مرز است. جایگذاری $\mathbf{n}^T \mathbf{k} \mathbf{S} T = q_n$ به عنوان شار عبوری عمود بر مرز در رابطه (۱۶) منجر به رابطه زیر می شود:

$$\iint_V (\mathbf{S} w)^T \mathbf{k} \mathbf{S} T dV = \int_S w q_n dS \quad (18)$$

با عنایت به نگرش کار مجازی، w به عنوان توزیع مجازی دما در نظر گرفته و به صورت زیر تخمین زده می شود،

$$w(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\eta) \mathbf{w}(\xi) \quad (19)$$

$\mathbf{w}(\xi)$ ماتریسی دوعضوی و تابع ξ به عنوان مقادیر گره ای دمای مجازی است. سمت چپ معادله (۱۸) کار مجازی داخلی

انجام شده، و سمت راست معادل با کار مجازی خارجی توسط شار حرارتی عمود بر مرز q_n است. در نوشتار روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده، گرادیان توابع وزن چنین است:

$$\mathbf{S} w = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^1 \mathbf{w}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}^2 \mathbf{w}(\xi) \quad (20)$$

با قرار دادن معادلات (۶)، (۱۲) و (۲۰) در عبارت سمت چپ معادله (۱۸) چنین حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \iint_V (\mathbf{S} w)^T \mathbf{k} \mathbf{S} T dV = & \int_0^1 \mathbf{w}(\xi)_{,\xi}^T \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{1T} \mathbf{k} \mathbf{B}^1 |\mathbf{J}| d\eta \xi T(\xi)_{,\xi} d\xi + \\ & \int_0^1 \mathbf{w}(\xi)_{,\xi}^T \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{1T} \mathbf{k} \mathbf{B}^2 |\mathbf{J}| d\eta T(\xi) d\xi + \\ & \int_0^1 \mathbf{w}(\xi)^T \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{2T} \mathbf{k} \mathbf{B}^1 |\mathbf{J}| d\eta T(\xi)_{,\xi} d\xi + \\ & \int_0^1 \mathbf{w}(\xi)^T \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{2T} \mathbf{k} \mathbf{B}^2 |\mathbf{J}| d\eta \frac{1}{\xi} T(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (21)$$

بخش هایی از انتگرال های فوق حاوی انتگرال بر روی مرز مسئله در موقعیت $\xi = 1$ بوده و تنها وابسته به η هستند که چنین نامگذاری می شوند:

$$\mathbf{e}^0 = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{1T} \mathbf{k} \mathbf{B}^1 |\mathbf{J}| d\eta \quad (22)$$

$$\mathbf{e}^1 = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{2T} \mathbf{k} \mathbf{B}^1 |\mathbf{J}| d\eta \quad (23)$$

$$\mathbf{e}^2 = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{2T} \mathbf{k} \mathbf{B}^2 |\mathbf{J}| d\eta \quad (24)$$

این ماتریس ها تابعی از ξ نبوده و عملیات انتگرال گیری آن ها بر روی جزء مرزی انجام می شود. ماتریس های فوق تنها مربوط به یک المان هستند. در روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده حاصل برهم نهی این ماتریس ها در کل دامنه مورد استفاده قرار می گیرد. برای هر حالت، این ماتریس های کلی به ترتیب \mathbf{E}^0 ، \mathbf{E}^1 و \mathbf{E}^2 نامیده می شوند. از این پس معادلات حاصل، کلیه المان های مرزی را به طور همزمان تحلیل می کنند. برای استخراج معادله تعادل راستای شعاعی لازم است که مشتق

نسبت به متغیر ξ از توابع وزن حذف گردد:

$$\iint_V (\mathbf{S}\mathbf{w})^T \mathbf{k}\mathbf{S}T dV = \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{w}(\xi)^T \Big|_{\xi=1} \mathbf{E}^0 \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} \Big|_{\xi=1} - \int_0^1 \mathbf{w}(\xi)^T \mathbf{E}^0 \xi \mathbf{T}(\xi)_{,\xi\xi} d\xi - \\ & \int_0^1 \mathbf{w}(\xi)^T \mathbf{E}^0 \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} d\xi + \mathbf{w}(\xi)^T \Big|_{\xi=1} \mathbf{E}^{1T} \mathbf{T}(\xi) \Big|_{\xi=1} - \\ & \int_0^1 \mathbf{w}(\xi)^T \mathbf{E}^{1T} \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} d\xi + \int_0^1 \mathbf{w}(\xi)^T \mathbf{E}^1 \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} d\xi + \\ & \int_0^1 \mathbf{w}(\xi)^T \mathbf{E}^2 \frac{1}{\xi} \mathbf{T}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

همچنین عبارت سمت راست معادله (۱۸) پس از قرار دادن معادلات (۷) و (۱۹) در آن به این شکل درمی آید:

$$\int_S \mathbf{w}^T \mathbf{q}_n dS = \mathbf{w}(\xi)^T \Big|_{\xi=1} \mathbf{Q} \quad (26)$$

\mathbf{Q} سهم شار حرارتی بر روی گره‌های مرزی است و چنین به دست می آید:

$$\mathbf{Q} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}(\eta)^T \mathbf{q}_n \Delta_s d\eta \quad (27)$$

در نهایت، با جای گذاری معادلات (۲۵) و (۲۶) در معادله (۱۸) و ضرب کل تساوی در ξ به منظور حذف تکینگی معادله در مرکز مقیاس ($\xi=0$)، معادله نهایی زیر نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} & \mathbf{w}(\xi)^T \Big|_{\xi=1} \xi \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \mathbf{T}(\xi=1)_{,\xi} + \\ \mathbf{E}^{1T} \mathbf{T}(\xi=1) - \mathbf{Q} \end{pmatrix} \\ & + \mathbf{w}(\xi)^T \int_0^1 \begin{pmatrix} -\mathbf{E}^0 \xi^2 \mathbf{T}(\xi)_{,\xi\xi} - \\ \left(\mathbf{E}^0 - \mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^{1T} \right) \xi \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} \\ \mathbf{E}^2 \mathbf{T}(\xi) \end{pmatrix} d\xi = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

با توجه به دلخواه بودن درجه حرارت مجازی $\mathbf{w}(\xi) \Big|_{\xi=1}$ و ماتریس ضرایب گزاره اول و دوم باید برابر با صفر گردند که روابط زیر را ایجاد می کند:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}^0 \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} \Big|_{\xi=1} + \mathbf{E}^{1T} \mathbf{T}(\xi) \Big|_{\xi=1} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^0 \xi^2 \mathbf{T}(\xi)_{,\xi\xi} + \\ & \left(\mathbf{E}^0 - \mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^{1T} \right) \xi \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}^2 \mathbf{T}(\xi) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (30)$$

معادله (۲۹) مقادیر شار گره‌ای مربوط به المان روی مرز مسئله ($\xi=1$) و رابطه (۳۰) نیز معادله تعادل روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده در راستای شعاعی برای مسئله انتقال حرارت را بیان می کند. رابطه (۳۰) باید به صورت تحلیلی به عنوان تابعی از متغیر ξ حل گشته و بدین ترتیب عباراتی برای مقادیر گره‌ای متغیر $\mathbf{T}(\xi)$ به ازای کلیه گره‌های دامنه به دست آید. مراجع موجود در روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده از یک تحلیل مقادیر ویژه برای حل معادلات (۲۹) و (۳۰) استفاده می کنند، اما در تحقیق حاضر ایده متفاوتی مبتنی بر روش توابع پایه متعادل شده مطرح خواهد گردید.

۳- مبانی روش پژوهش در حل مسائل همگن انتقال حرارت

پس از استخراج معادلات حاکم بر مسئله در بخش قبل، در این بخش به بیان فرمول بندی کلی روش حل پرداخته می شود. با نظر به اینکه در این پژوهش از روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده در ترکیب با روش توابع پایه متعادل شده استفاده می شود، مختصری از مبانی این روش ذکر می گردد [۱۸].

در تئوری روش‌های ترفتر، پاسخ معادله همگن توسط ترکیبی از توابع پایه تخمین زده می شود که قادرند آن معادله را به صورت تحلیلی برآورده سازند. چنین کاری برای عموم مسائل میسر نیست زیرا ساختار معادله می تواند پیچیده باشد. در ایده توابع پایه متعادل شده نیز ابتدا پاسخ معادله با ترکیبی خطی از پایه‌های اولیه تخمین زده می شود:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \mathbf{c}_i \mathbf{f}_i = \mathbf{f}^T \mathbf{c} \quad (31)$$

در رابطه بالا \mathbf{f}_i توابع پایه اولیه و \mathbf{c}_i ضرایب مجهول این توابع می باشند. N تعداد پایه‌های موردنظر است که با درجه تقریب پاسخ در ارتباط مستقیم است. می توان از ارضای انتگرال

[0,+1] خواهد بود. مقادیر گره‌ای که در اینجا تابع متغیر شعاعی ζ هستند به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\mathbf{T}(\zeta) = \sum_{n=0}^{O_\zeta} \mathbf{T}_n(\zeta) \mathbf{I} \mathbf{c}_n = \mathbf{f}^T \mathbf{c} \quad (37)$$

با توجه به بررسی‌های صورت گرفته در پیشینه روش توابع پایه متعادل شده، از چندجمله‌ای‌های چبی شیف نوع اول به منظور تخمین پاسخ استفاده شده است. در رابطه بالا $\mathbf{T}_n(\zeta)$ چندجمله‌ای چبی شیف نوع اول از مرتبه n بوده و O_ζ مرتبه تقریب پاسخ راستای شعاعی است. از آنجا که دامنه تعریف این توابع بازه $[-1,+1]$ است، پارامتر $\zeta \in [-1,+1]$ جایگزین $\mathbf{T}(\zeta)$ در راستای شعاعی شده است. ابعاد بردار \mathbf{I} ماتریس برابر با تعداد کل گره‌های مرزی است، بنابراین \mathbf{I} ماتریس همانی با ابعاد برابر با تعداد کل گره‌های مرزی خواهد بود. \mathbf{c}_n نیز بردار ضرایب مجهول به تعداد گره‌های مرزی است. از آنجا که یک دستگاه معادلات حل می‌شود، لازم است پارامترهای موثر در انتگرال وزنی نیز مطابق آن اصلاح شوند. برای وزن دهی به انتگرال‌های یک‌بعدی برخواسته، توابع وزن مطابق زیر وابسته به تعدادی نقطه وزن در امتداد شعاعی در نظر گرفته می‌شوند:

$$\omega_\ell = e^{-W(\zeta - \zeta_\ell)^2}, \quad (38)$$

$\zeta_\ell = -1 + (2\ell - 1)/n_w$, $\ell = 1, \dots, n_w$
در عبارات بالا ζ_ℓ در اصطلاح یک مرکز وزن در امتداد شعاعی است و n_w تعداد کل مراکز وزن می‌باشد، به طوری که:

$$n_w = O_\zeta \quad (39)$$

مقدار پارامتر وزنی W معمولاً حساسیت چندانی در روند حل ندارد، اما در صورت استفاده از مراتب تقریب بسیار بالا در راستای شعاعی و به منظور حفظ استقلال خطی سطرهاى ماتریس ضرایب \mathbf{A} ، لازم است مقدار این پارامتر نیز مطابق جدول ۱ تغییر یابد [۱۵]. ماتریس توابع پایه اولیه \mathbf{f} دارای ابعاد $n_B(O_\zeta + 1) \times n_B$ می‌باشد که n_B تعداد کل گره‌های مرزی است:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{T}_0(\zeta)\mathbf{I} \quad \mathbf{T}_1(\zeta)\mathbf{I} \quad \dots \quad \mathbf{T}_{O_\zeta}(\zeta)\mathbf{I}]^T \quad (40)$$

چیدمان توابع وزن متناظر نیز در قالب ماتریسی سازگار با ابعاد

باقی‌مانده وزنی معادله به جای ارضای دقیق آن به شکل زیر استفاده کرد:

$$(\int_{\Omega} \omega \mathbf{L} \mathbf{f}^T d\Omega) \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (32)$$

در رابطه فوق \mathbf{L} عملگر معادله و Ω ناحیه حل می‌باشد. بردار ω شامل توابع وزن بوده و تعداد n_w عضو را دارا می‌باشد. رابطه بالا به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \int_{\Omega} \omega \mathbf{L} \mathbf{f}^T d\Omega \quad (33)$$

ماتریس ضرایب \mathbf{A} دارای ابعاد $n_w \times N$ است. برای برقراری رابطه (۳۳) لازم است که بردار مقادیر ثابت \mathbf{c} عضو فضای پوچ ماتریس ضرایب \mathbf{A} باشد. لذا ماتریس Φ که پایه‌های فضای پوچ ماتریس ضرایب را شامل شده و دارای ابعاد $N \times (N - n_w)$ می‌باشد استخراج می‌شود:

$$\Phi = \text{null}(\mathbf{A}) \quad (34)$$

ستون‌های فضای پوچ ماتریس ضرایب، مجموعه‌ای از بردارها را شامل می‌شود. با ضرب آن‌ها در اجزای بردار \mathbf{f} ، دسته جدیدی از توابع تحت عنوان پایه‌های متعادل شده ساخته می‌شوند که دارای خاصیت ارضای تقریبی صورت همگن اپراتور معادله هستند:

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{f}^T \Phi_j \quad (35)$$

در عبارت فوق Φ_j نمایانگر ستون j ام Φ است. ترکیب خطی پایه‌های متعادل شده، سری پاسخ جدید مسئله خواهد بود که مجهولات جدید \mathbf{d} را شامل می‌شود:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{N-n_w} d_j \mathbf{F}_j = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \quad (36)$$

موقعیت کلیدی که روابط روش توابع پایه متعادل شده وارد روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده می‌گردد، زمانی است که حل نیمه تحلیلی معادله برخواسته از تعادل در راستای شعاعی موردنظر است. برای حل معادله همگن (۳۰)، با بهره‌گیری از روش توابع پایه متعادل شده، به جای ارضای فرم اصلی معادله، صورت انتگرال وزنی آن مطابق رابطه (۳۲) ارضا می‌گردد. توجه شود که در اینجا منظور از ناحیه حل Ω در واقع امتداد شعاعی از مرکز مقیاس به سمت مرز دامنه، یعنی ناحیه نرمال

جدول ۱- مقادیر پیشنهادی پارامتر وزنی به ازای مراتب تقریب راستای شعاعی.

O_ζ	≤ 25	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵
W	۲۵	۳۰	۳۰	۳۰	۳۵	۳۵	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰	۷۰

مسئله می‌باشد:

$$\omega = [\omega_1 \mathbf{I} \quad \omega_2 \mathbf{I} \quad \cdots \quad \omega_{n_w} \mathbf{I}]^T \quad (41)$$

حال با داشتن این موارد، انتگرال وزنی معادله (۳۰) در روش توابع پایه متعادل‌شده به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 e^{-W(\xi-\xi_\ell)^2} \mathbf{E}^0 \xi^2 \mathbf{T}(\xi)_{,\xi\xi} d\xi + \\ & \int_0^1 e^{-W(\xi-\xi_\ell)^2} [\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{1T} - \mathbf{E}^1] \xi \mathbf{T}(\xi)_{,\xi} d\xi - \\ & \int_0^1 e^{-W(\xi-\xi_\ell)^2} \mathbf{E}^2 \mathbf{T}(\xi) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

با جایگذاری مقدار تابع مجهول از رابطه (۳۷) در عبارت بالا، معادله‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = 0 \quad (43)$$

ماتریس ضرایب \mathbf{A} دارای ابعاد $n_B n_w \times n_B (O_\zeta + 1)$ است. در واقع این ماتریس دارای شبکه‌ای با n_w سطر و $O_\zeta + 1$ ستون از سلول‌هایی است که هر کدام به ابعاد $n_B \times n_B$ هستند. هر کدام از سلول‌های ماتریس ضرایب \mathbf{A} در ماتریس‌هایی جزئی‌تر به صورت $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$ مطابق روابطی که در ادامه می‌آیند، به ازای یک مرکز وزن راستای شعاعی و یک درجه تقریب راستای شعاعی محاسبه می‌گردند:

$$(\mathbf{A}_1)_{\ell,n+1} = \quad (44\text{-الف})$$

$$2 \int_{-1}^1 \mathbf{E}^0 \left(\frac{\zeta+1}{2} \right)^2 e^{-W(\zeta-\zeta_\ell)^2} \mathbf{T}_{n,\zeta\zeta} d\zeta$$

$$(\mathbf{A}_2)_{\ell,n+1} = \quad (44\text{-ب})$$

$$\int_{-1}^1 [\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{1T} - \mathbf{E}^1] \left(\frac{\zeta+1}{2} \right) e^{-W(\zeta-\zeta_\ell)^2} \mathbf{T}_{n,\zeta} d\zeta$$

$$(\mathbf{A}_3)_{\ell,n+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{E}^2 e^{-W(\zeta-\zeta_\ell)^2} \mathbf{T}_n d\zeta \quad (44\text{-پ})$$

برای برقراری تعادل، بردار \mathbf{c} لازم است که عضو فضای پوچ ماتریس ضرایب باشد که با $\boldsymbol{\varphi}$ نشان داده می‌شود. به این ترتیب، پایه‌های متعادل‌شده به فرم ماتریسی چنین خواهند بود:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} \quad (45)$$

با استفاده از توابع فوق، بردار توابع درجات حرارت گره‌های مرزی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} \mathbf{d} \quad (46)$$

پاسخ کلی در سطح المان با استفاده از رابطه (۱۱) چنین خواهد بود:

$$\mathbf{T}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\eta) \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} \mathbf{d} \quad (47)$$

به منظور ایجاد ارتباط بین ضرایب مجهول \mathbf{d} و درجات آزادی گره‌های مرزی، معادله (۴۷) در مرز مسئله متناسب با $\zeta = 1$ برآورد می‌شود:

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{N}(\eta) \mathbf{f}^T \Big|_{\xi=1} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{d} \quad (48)$$

رابطه فوق را با برآورد در کلیه نقاط المان مرزی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{d} \quad (49)$$

که در آن $\hat{\mathbf{T}}$ دربردارنده مقادیر درجه حرارت در گره‌های مرزی بوده و نیز:

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{N}(\eta) \mathbf{f}^T \Big|_{\xi=1} \boldsymbol{\varphi} \quad (50)$$

در نتیجه مجهولات رابطه (۴۹) به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \hat{\mathbf{T}} \quad (51)$$

با قرار دادن عبارت فوق در رابطه (۴۷)، معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{T}(\xi, \eta) = (\mathbf{N}(\eta) \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\Phi}^{-1}) \hat{\mathbf{T}} \quad (52)$$

برای استخراج ماتریس سختی با توجه به مبانی روش اجزا

شده است و افزون بر آن، اثرگذاری پارامترهای گوناگون بر کیفیت حل نیز مورد بررسی قرار گرفته است. برای مثال‌هایی که دارای حل دقیق می‌باشند، شرایط مرزی متناظر با تابع حل مسئله در نظر گرفته می‌شود و از این مقادیر برای رسیدن به پاسخ مسئله بهره برده می‌شود. در نهایت به عنوان معیاری جهت سنجش کیفیت پاسخ، درصد خطای میانگین زیر به کار خواهد رفت:

$$\varepsilon_{ave} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_E} (u_{ap}(x_i, y_i) - u_{ex}(x_i, y_i))^2}{\sum_{i=1}^{N_E} (u_{ex}(x_i, y_i))^2}} \times 100 \quad (59)$$

در رابطه بالا u_{ex} و u_{ap} به ترتیب مقدار تابع حل مسئله و مقدار پاسخ تقریبی از روش تحقیق هستند. N_E نیز تعداد نقاط برآورد خطای مسئله است.

مثال ۱

یک مسئله انتقال حرارت دوبعدی با ناحیه حل مستطیلی با شرایط مرزی دریشله مطابق شکل (۳) برگرفته از مرجع [۶] معرفی شده است. معادله لاپلاس حاکم بوده و حل تحلیلی مسئله پایدار بر اساس مطالب مرجع [۲۰] به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$T(x, y) = \frac{100}{\sinh \frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (60)$$

پارامترهای مربوط به این قسمت از مثال، مطابق جدول ۲ می‌باشند. a و b به ترتیب مقادیر ۱۰ و ۵ متر را دارا می‌باشند. مرکز مقیاس‌بندی در مرکز مستطیل قرار گرفته است. در بخش نخست مثال، کانتورهای درجه حرارت با نظر به خاصیت تقارن تنها برای نیمه سمت چپ مسئله با استفاده از روش پژوهش و نیز روش اجزا محدود مطابق شکل (۴) نمایش داده شده است. انطباق کامل نتایج خبر از کیفیت خوب روش پیشنهادی تحقیق می‌دهد.

در قسمت بعد شار حرارتی برای مرز $y = +5$ و $x = 0$

محدود مرزی مقیاس شده، با در نظر گرفتن معادله (۲۹) که در مرز $\zeta = 1$ به فرم زیر برآورد گردید:

$$Q = E^0 T(\xi)_{,\xi} + E^{1T} T(\xi) \quad (29\text{-تکراری})$$

و سپس با جایگذاری معادله (۵۲) در عبارت فوق، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$Q = E^0 \left(2 \frac{\partial}{\partial \zeta} f^T \Big|_{\zeta=1} \Phi \right) d + E^{1T} f^T \Big|_{\zeta=1} \Phi d \quad (53)$$

در عبارت فوق به جای بردار ضرایب مجهول d ، مقادیر برآورد شده در مرز قرار گرفته و رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$Q = \left(2E^0 \frac{\partial}{\partial \zeta} f^T \Big|_{\zeta=1} \Phi \Phi^{-1} + E^{1T} f^T \Big|_{\zeta=1} \Phi \Phi^{-1} \right) \hat{T} \quad (54)$$

با در نظر گرفتن رابطه بالا، ماتریس سختی مسئله انتقال حرارت از روش حاضر به شکل زیر استخراج می‌گردد:

$$K = 2E^0 \frac{\partial}{\partial \zeta} f^T \Big|_{\zeta=1} \Phi \Phi^{-1} + E^{1T} f^T \Big|_{\zeta=1} \Phi \Phi^{-1} \quad (55)$$

جهت استخراج بردار مقادیر شار گره‌ای بر روی مرز، لازم است توابع شکل روش حاضر در نقاط مرزی در بردار شار حاصل از روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده ضرب شود. توابع شکل در روش تحقیق با در نظر گرفتن معادلات (۱۱) و (۵۲) به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$N(\xi, \eta) = N(\eta) f^T \Phi \Phi^{-1} \quad (56)$$

با در نظر گرفتن معادله فوق، بردار شارهای گره‌ای در روش پژوهش به صورت زیر به دست می‌آید:

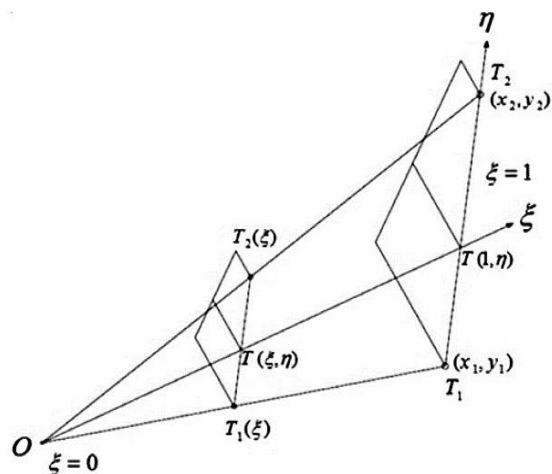
$$\hat{q} = f^T \Big|_{\zeta=1} \Phi \Phi^{-1} Q \quad (57)$$

نهایتاً بردار مجهولات گره‌ای با حل رابطه سختی زیر حاصل می‌گردند:

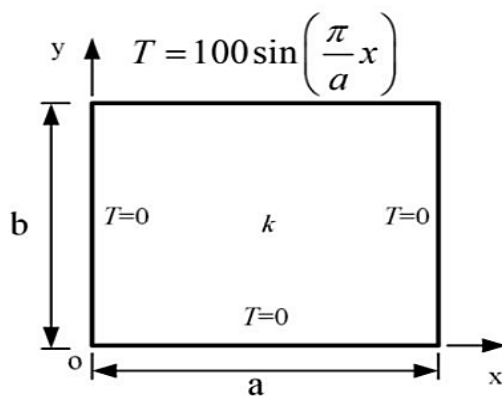
$$K \hat{T} = \hat{q} \quad (58)$$

۴- نتایج عددی

در این قسمت مثال‌هایی جهت بررسی قابلیت‌های روش پیشنهادی پژوهش حاضر در حل معادله انتقال حرارت ارائه



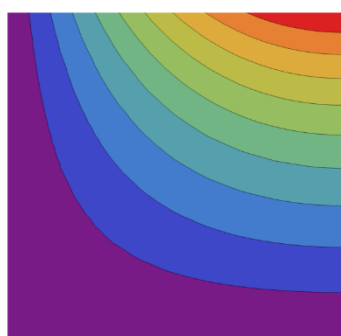
شکل ۲- جزء محدود مرزی مقیاس شده و مرکز مقیاس بندی [۵].



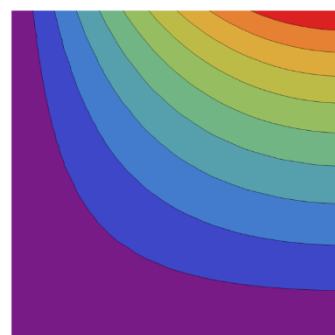
شکل ۳- ساختار مسئله و شرایط مرزی در مثال ۱ [۶].

جدول ۲- پارامترهای حل مثال ۱.

تعداد المان‌های مرزی	فاکتور وزنی (w)	بالاترین درجه توابع پایه (O_p)
۱۲۰	۳۰	۲۵



(ب)



(الف)

شکل ۴- تغییرات درجه حرارت در قسمت اول مثال ۱ با استفاده از (الف) روش اجزا محدود و (ب) روش حاضر.

لاپلاس حاکم بر تعادل مسئله است. شرایط مرزی مسئله به صورت شرایط دریشله در $y=0, 1$ و نویمان در $x=0, 1$ در نظر گرفته شده و مقادیر آن از پاسخ دقیق مسئله استخراج می گردد:

$$T = e^{2\pi y} \cos 2\pi x \quad (61)$$

مرکز مقیاس بندی در مرکز مربع در نظر گرفته شده و سایر پارامترهای مثال به قرار جدول ۳ می باشند. در بخش نخست توزیع دما از روش تحقیق برآورد شده و کانتورهای حرارتی متناظر در شکل (۹) ترسیم گشته است. مقایسه اجمالی حاکی از عملکرد مطلوب روش پیشنهادی می باشد. برای مقایسه شار گره ای از روش حاضر و حل دقیق در مرزهای $y = \pm 0.5$ نمودار شکل های (۱۰) و (۱۱) حاصل شده است که دقت مطلوب روش را تایید می کند.

در بخش بعد تاثیر تعداد گره های مرزی بر دقت حل مورد بررسی قرار گرفته است. پس از مقایسه مقادیر درجه حرارت نقاط به روش پژوهش و نیز حل دقیق، نمودار درصد خطا مطابق شکل (۱۲) نتیجه شده است که دقت بالای حل و شیب همگرایی مطلوب را نشان می دهد.

مثال ۳

یک مسئله انتقال حرارت در ناحیه ای دارای هندسه غیرمعمول جهت بررسی انعطاف روش تحقیق مورد نظر قرار گرفته است. دامنه حل یک باله مثلثی متصل به یک لوله است. هندسه آن به همراه شرایط مرزی تماما دریشله در شکل (۱۳) نشان داده شده است. مجدداً معادله لاپلاس بر مسئله حاکم است. این مثال نخست توسط سلیمانی و همکاران [۲۱] مورد تحلیل قرار گرفت و متعاقب آن بازیار و همکاران [۵] برای نشان دادن قابلیت روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده از این مثال استفاده کردند. از المان های سه گره ای مرتبه دوم برای مدل سازی دامنه استفاده شده است. مرکز مقیاس مطابق شکل درون ناحیه حل قرار گرفته است و سایر مشخصات نیز به صورت جدول ۴ می باشند. کانتورهای توزیع دما از مرجع [۵] و روش حاضر با ۹۰ المان مرزی، در شکل (۱۴) نشان داده شده است. واضح است

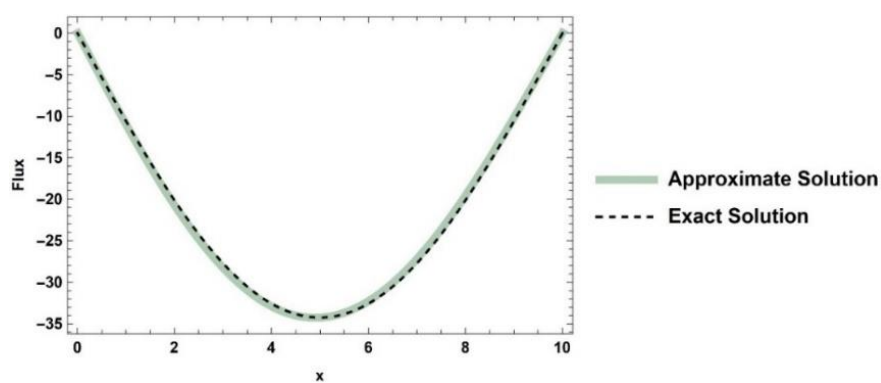
جهت نمایان سازی قابلیت روش حاضر در مقایسه با حل تحلیلی نمایش داده شده است. پارامترهای مورد استفاده در این قسمت نیز مشابه جدول ۲ می باشند. مطابقت نتایج حاصل از دو روش در شکل های (۵) و (۶) به وضوح قابل مشاهده است.

در بخش سوم مثال، تاثیر تعداد نقاط گره ای متناسب با تعداد المان های مرزی خطی بر دقت حل مورد بررسی قرار گرفته است. با محاسبه درجه حرارت نقاط با استفاده از روش پژوهش و مقایسه آن با حل دقیق مسئله، نمودار درصد خطا نتیجه شده است. درجه چندجمله ای های راستای شعاعی، فاکتور وزنی W و همچنین تعداد المان مرزی در این قسمت مطابق جدول ۲ می باشند. با دقت در شکل (۷) می توان دریافت که شیب همگرایی نتایج قابل قبول است. چنانکه مشاهده می شود شیب همگرایی نمودار در شکل ۷ معادل ۲ است که به دلیل مشابهت ماهیت تقریب در راستای مرزی با روش اجزا محدود و استفاده از المان های مرتبه اول (خطی) می باشد.

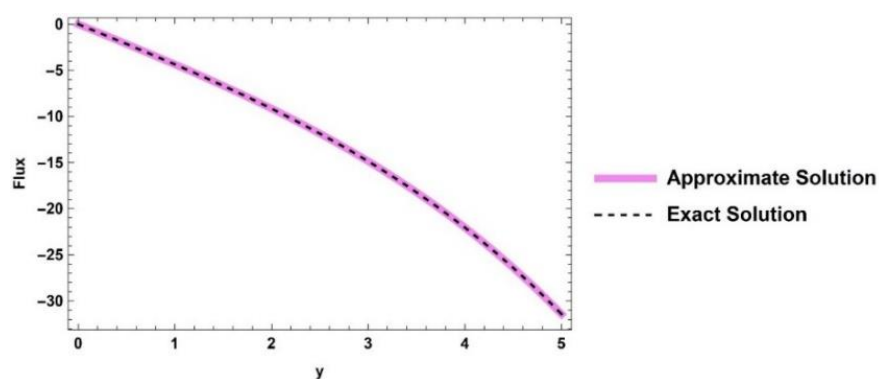
در قسمت بعد، ترسیم تغییرات درصد خطا به جهت بررسی تاثیر تعداد مراکز وزن در راستای شعاعی بر کیفیت حل انجام شده است. لازم به ذکر است که تعداد مراکز وزن و به تبع آن فاکتور وزنی در پژوهش حاضر، متناسب با درجه چندجمله ای ها می باشد. تعداد نقاط مرزی مورد استفاده در امتداد هر ضلع دامنه ۱۵ نقطه است که در مجموع ۶۰ گره مرزی را شامل می شود. نتیجه در شکل (۸) نشان داده شده است. مشاهده می شود که درصد خطا تا $O_e = n_{\text{ش}}$ کاهش یافته و پس از آن ثابت می ماند که دستورالعمل ذکر شده برای تعداد نقاط وزن را تایید می کند. نتایج این بخش نشانگر این است که لزوماً افزایش دقت با افزایش تعداد نقاط وزن به دست نمی آید و نیازمند رعایت تناسب است. ضمناً نشان داده شد که پارامتر وزنی W حساسیت چندانی در کیفیت نتایج ندارد. البته این مهم مشروط بر تناسب آن با مرتبه تقریب است که در جدول ۱ ذکر گردید.

مثال ۲

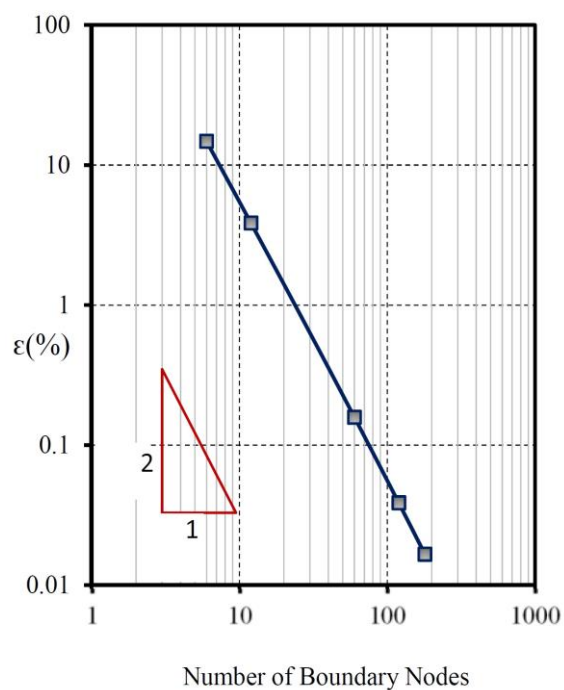
در این مثال مسئله انتقال حرارت حالت پایدار برای ناحیه حل همگن مربعی به ضلع ۱ مورد بررسی قرار گرفته است. معادله



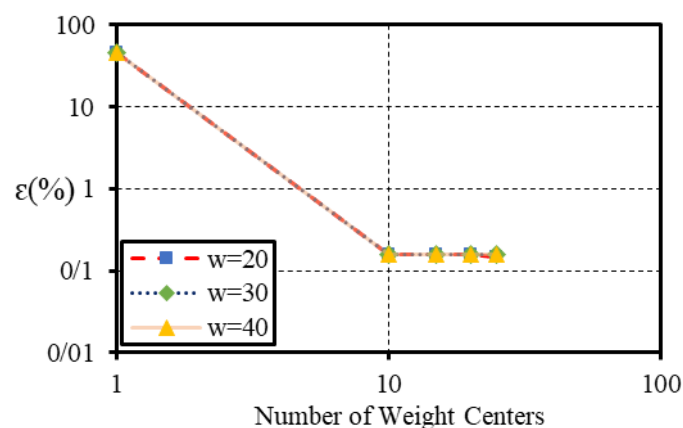
شکل ۵- تغییرات شارگره‌ای در مرز در قسمت دوم مثال ۱.



شکل ۶- تغییرات شارگره‌ای در مرز در قسمت دوم مثال ۱.



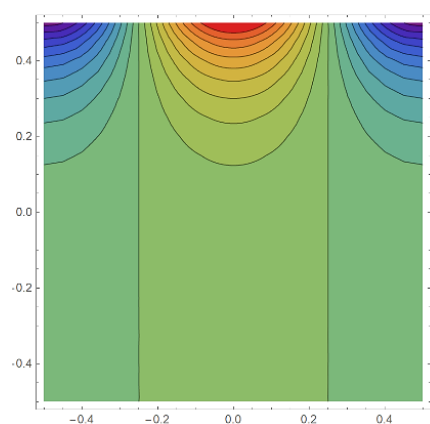
شکل ۷- همگرایی پاسخ حاصل از روش تحقیق حاضر در قسمت سوم مثال ۱.



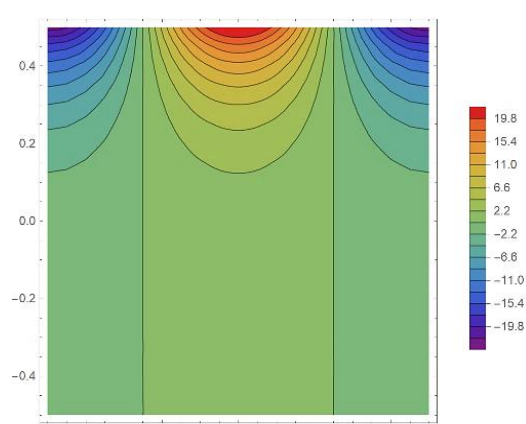
شکل ۸- همگرایی پاسخ مسئله با افزایش تعداد توابع وزن در قسمت چهارم مثال ۱.

جدول ۳- پارامترهای حل مثال ۲.

تعداد توابع وزن (n_w)	بالاترین درجه توابع پایه (O_c)	فاکتور وزنی (w)	تعداد المانهای مرزی
۱۰	۱۰	۲۵	۱۰۰

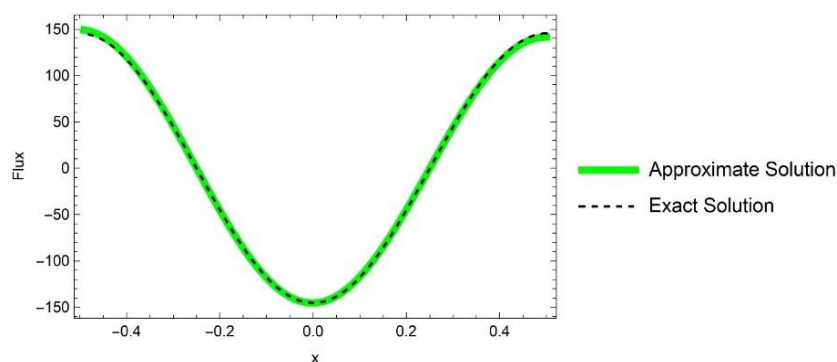


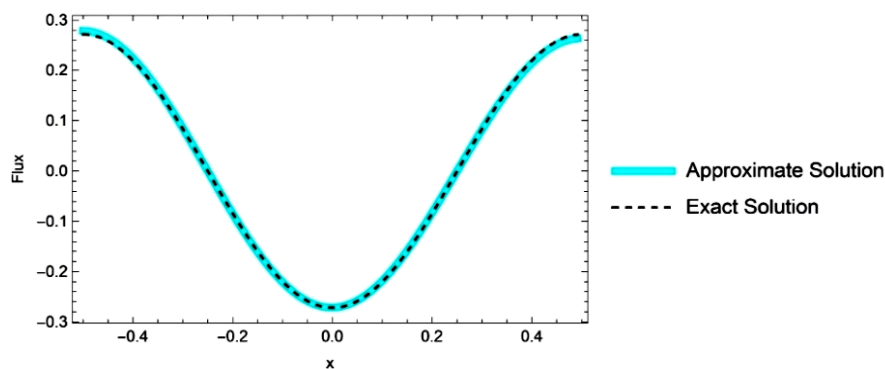
(ب)



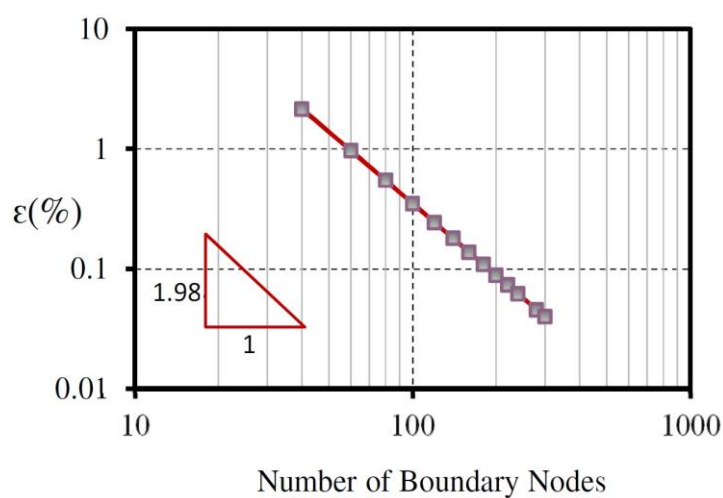
(الف)

شکل ۹- تغییرات درجه حرارت در بخش اول مثال ۲ با استفاده از (الف) پاسخ دقیق مسئله و (ب) حل تقریبی.

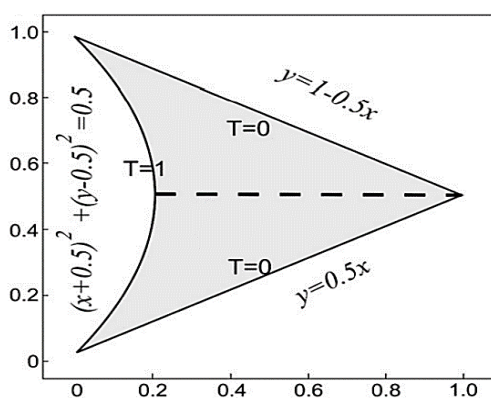

 شکل ۱۰- تغییرات شارگره‌ای در مرز $y = \pm 0.5$ در بخش دوم مثال ۲.



شکل ۱۱- تغییرات شارگره‌ای در مرز $y = \pm 0.5$ در بخش دوم مثال ۲.



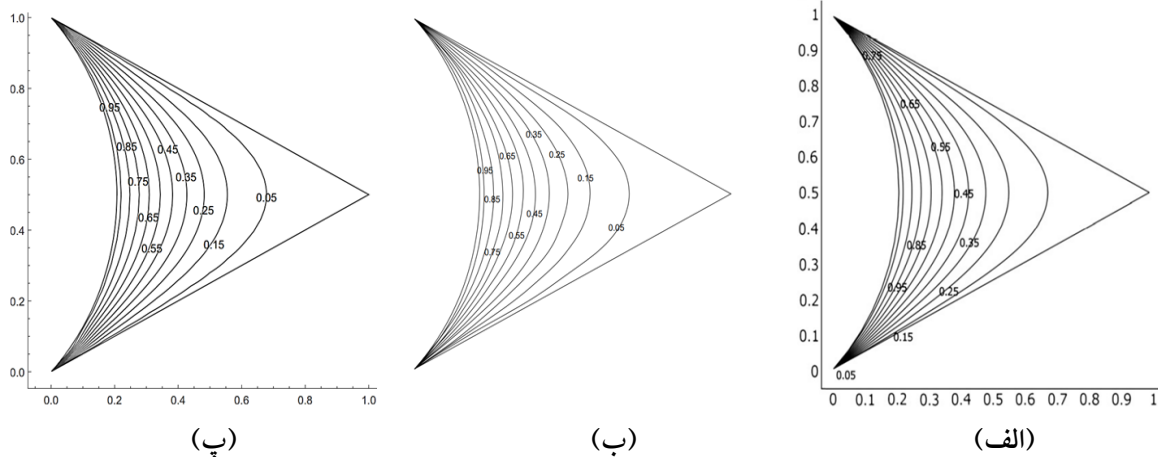
شکل ۱۲- همگرایی پاسخ حاصل از روش تحقیق حاضر در بخش سوم مثال ۲.



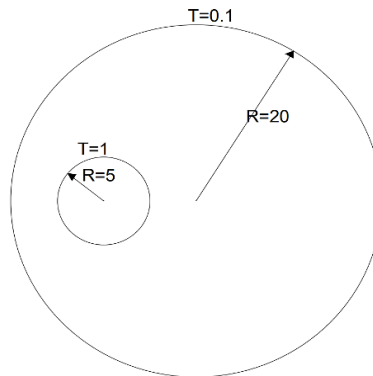
شکل ۱۳- ساختار مسئله و شرایط مرزی در مثال ۳ [۲۱].

جدول ۴- پارامترهای حل مثال ۳.

تعداد توابع وزن (n_w)	بالاترین درجه توابع پایه (O_p)	فاکتور وزنی (w)	تعداد المان‌های مرزی
۲۰	۲۰	۲۵	۹۰



شکل ۱۴- تغییرات درجه حرارت در دامنه حل مثال ۳ با استفاده از (الف) روش اجزا محدود [۵] و (ب) روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده [۵] و (پ) روش تحقیق حاضر.



شکل ۱۵- ساختار مسئله و شرایط مرزی در مثال ۴ [۲۲].

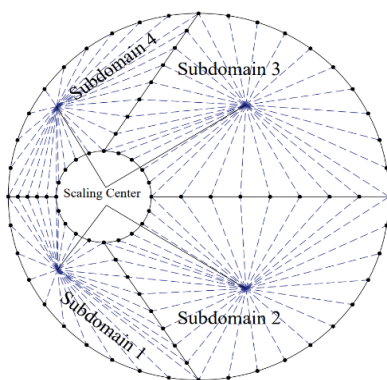
حائز اهمیت این است که نمی توان نقطه واحدی را مشخص کرد که از آن کل مرز قابل مشاهده باشد. پس نیاز است که این دامنه محاسباتی به زیردامنه های کوچک تری تقسیم بندی شده و برای هر کدام مرکز مقیاس مجزایی در نظر گرفته شود. در این راستا دامنه مذکور به چهار زیر دامنه با مراکز مقیاس بندی متناظر هر کدام با به کارگیری ۸۹ المان مرزی و در مجموع با ۸۵ درجه آزادی مطابق شکل (۱۶)، گسسته سازی شده است. سایر مشخصات مطابق جدول ۵ می باشند. در بخش اول ضرایب هدایت حرارتی برای این مسئله ناهمسانگرد به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$k_{xx} = 1, k_{xy} = 0/1, k_{yy} = 0/8 \quad (۶۲)$$

که تطابق کامل بین نتایج برقرار بوده و این نشان از کارآمدی روش پیشنهادی است.

مثال ۴

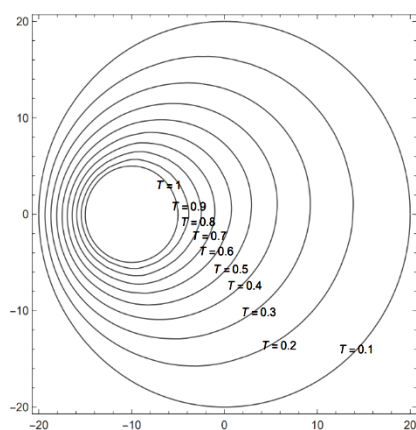
مجدداً برای نشان دادن انعطاف پذیری روش تحقیق، یک استوانه ناهمسانگرد گریزنده از مرکز به عنوان مثال آخر مطابق شکل (۱۵) در نظر گرفته شده است. برای سطوح داخلی و خارجی دمای ثابتی لحاظ شده و نوع شرایط مرزی درجمله می باشد. ابتدا ژانگ و همکاران [۲۲] این مسئله را با استفاده از روش المان مرزی و سپس بازیار و همکاران [۵] به روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. نکته



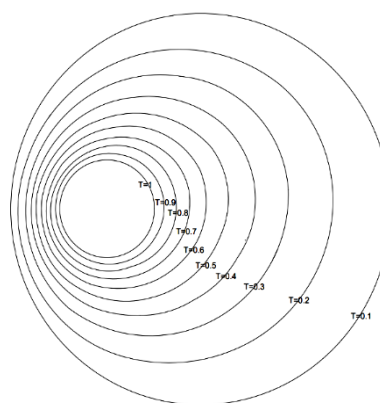
شکل ۱۶- تقسیم‌بندی ناحیه حل در مثال ۴ [۵].

جدول ۵- پارامترهای حل مثال ۴.

تعداد توابع وزن (n_w)	بالاترین درجه توابع پایه (O_c)	فاکتور وزنی (w)
۲۵	۲۵	۲۵



(ب)



(الف)

شکل ۱۷- تغییرات درجه حرارت در بخش اول مثال ۴ با استفاده از (الف) روش اجزا محدود مرزی مقیاس‌شده [۵] و (ب) روش تحقیق حاضر.

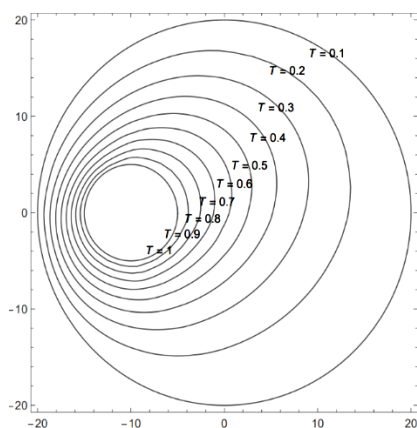
کلیه مثال‌های این بخش نشان از دقت مناسب روش پیشنهادی دارند.

نتیجه‌گیری

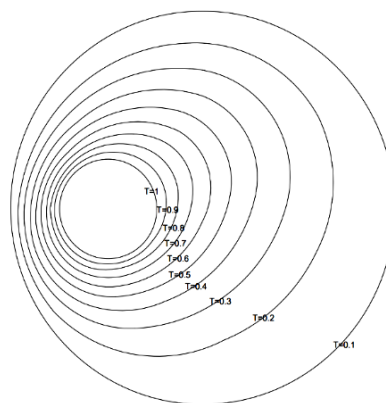
در این پژوهش تحلیل مسئله انتقال حرارت حالت پایدار با رویکردی جدید بر مبنای روش نوین اجزا محدود مرزی مقیاس‌شده در ترکیب با روش توابع پایه متعادل‌شده

کانتورهای توزیع دما حاصل از روش تحقیق و روش اجزا محدود مرزی مقیاس‌شده کلاسیک با ۸۹ المان، در شکل (۱۷) نشان داده شده است که از توافق عالی نسبت به مراجع موجود برخوردار هستند. همچنین برای نشان دادن تاثیر ضرایب هدایت حرارتی بر توزیع دما، با تغییر ضرایب ماتریس هدایت حرارتی به صورت رابطه (۶۳)، شکل (۱۸) حاصل می‌شود:

$$k_{xx} = 1, k_{xy} = 0/3, k_{yy} = 0/8 \quad (۶۳)$$



(ب)



(الف)

شکل ۱۸- تغییرات درجه حرارت در بخش دوم مثال ۴ با استفاده از (الف) روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده [۵] و (ب) روش تحقیق حاضر.

اجزا محدود مرزی مقیاس شده گسسته می شود. سپس با توسعه روش توابع پایه متعادل شده در امتداد شعاعی، معادله تعادل در این راستا به طور تقریبی برآورده می گردد. در نهایت با فرمول بندی مسئله بر اساس مقادیر گره های مرزی، رابطه سختی نهایی حاصل گشته و از حل آن مقادیر مجهول درجات آزادی به دست می آیند. نشان داده شد که روش پیشنهادی از دقت، نرخ همگرایی و انعطاف مناسبی برخوردار است.

مورد بررسی قرار گرفت. به واسطه معرفی دستگاه مختصات جدید در روش اجزا محدود مرزی مقیاس شده، تنها مرز مسئله گسسته سازی می شود که کاهش یک واحدی ابعاد فضایی مسئله و در نتیجه کاهش حجم عملیات لازم برای حل مسئله را به دنبال دارد. با ترکیب این روش و روش توابع پایه متعادل شده، نیازی به حل مسئله مقادیر ویژه برای حصول پاسخ های گره ای نخواهد بود. در روش پیشنهادی ابتدا مرز مسئله بر مبنای روش

واژه نامه

- | | | |
|--|---|--|
| 1. scaled boundary finite element method (SBFEM) | 5. circumferential coordinates | 9. cyclic symmetry |
| 2. finite element method (FEM) | 6. stress intensity factors | 10. sequential quadratic programming (SQP) |
| 3. boundary element method (BEM) | 7. polygonal scaled boundary finite element method (PSBFEM) | 11. scaling center |
| 4. radial coordinates | 8. quad-tree | |

مراجع

- Wolf, J. P., and Song, C. "The Scaled Boundary Finite-Element Method-A Primer: Derivations", *Computers & Structures*, Vol. 78, issue. 1-3, pp. 191-210, 2000.
- Wolf, J. P., "The Scaled Boundary Finite Element Method", John Wiley & Sons, 2003.
- Song, C., Ooi, E. T., and Natarajan, S., "A Review of the Scaled Boundary Finite Element Method for Two-Dimensional Linear Elastic Fracture Mechanics", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 187, pp. 45-73, 2018.
- Song, C., and Wolf, J. P., "The Scaled Boundary Finite-Element Method-A Primer: Solution Procedures", *Computers & Structures*, Vol. 78, issue. 1-3, pp. 211-225, 2000.
- Baziyar, M. H., and Talebi, A., "Scaled Boundary Finite-Element Method for Solving Non-Homogeneous Anisotropic Heat Conduction Problems", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, issue. 23-24, pp. 7583-7599, 2015.
- Yang, Y., Zhang, Z., Feng, Y., Yu, Y., Wang, K., and Liang, L., "A Polygonal Scaled Boundary Finite

- Element Method for Solving Heat Conduction Problems”, *arXiv preprint, arXiv:2106.12283*, 2021.
7. He, Y., Yang, H., and Deeks, A. J., “On the Use of Cyclic Symmetry in SBFEM for Heat Transfer Problems”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 71, pp. 98-105, 2014.
8. Yu, B., Hu, P., Saputra, A. A., and Gu, Y., “The Scaled Boundary Finite Element Method Based on the Hybrid Quadtree Mesh for Solving Transient Heat Conduction Problems”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 89, pp. 541-571, 2021.
9. Mohasseb, S., Moradi, M., Sokhansefat, T., Kasaeian, A., and Mahian, O., “A Novel Approach to Solve Inverse Heat Conduction Problems: Coupling Scaled Boundary Finite Element Method to a Hybrid Optimization Algorithm”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 84, pp. 206-212, 2017.
10. Deeks, A. J., and Wolf, J. P., “A Virtual Work Derivation of the Scaled Boundary Finite-Element Method for Elastostatics”, *Computational Mechanics*, Vol. 28, pp. 489-504, 2002.
11. Adak, D., Pramod, A. L. N., Ooi, E. T., and Natarajan, S., “A Combined Virtual Element Method and the Scaled Boundary Finite Element Method for Linear Elastic Fracture Mechanics”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 113, pp. 9-16, 2020.
12. Kita, E., and Kamiya, N., “Trefftz Method: An Overview”, *Advances in Engineering software*, Vol. 24, issue. 1-3, pp. 3-12, 1995.
13. Fairweather, G., and Karageorghis, A., “The Method of Fundamental Solutions for Elliptic Boundary Value Problems”, *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, pp. 69-95, 1998.
14. Motamedi, A. R., Boroomand, B., and Noormohammadi, N., “A Trefftz-Based Meshfree Local Method for Bending Analysis of Arbitrarily Shaped Laminated Composite and Isotropic Plates”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 143, pp. 237-262, 2022.
15. Boroomand, B., and Noormohammadi, N., “Weakly Equilibrated Basis Functions for Elasticity Problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, issue. 12, pp. 1712-1727, 2013.
16. Azizpooryan, M., Noormohammadi, N., and Boroomand, B., “Equilibrated Basis Functions for Static Analysis of In-plane Heterogeneous Laminated Composite Plates in Boundary and Meshfree Approaches”, *Iranian Journal of Science and Technology – Transactions of Mechanical Engineering*, Vol. 46, pp. 957-984, 2022.
17. Bateniparvar, O., and Noormohammadi, N., “An Enrichment Technique for Bending Analysis of In-plane Heterogeneous Thin Plates with Weak Singularities”, *Engineering with Computers*, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00366-022-01702-w>
18. Noormohammadi, N., and Boroomand, B., “A Fictitious Domain Method Using Equilibrated Basis Functions for Harmonic and Bi-Harmonic Problems in Physics”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 272, pp. 189-217, 2014.
19. Noormohammadi, N., and Boroomand, B., “A Domain Decomposition Approach Using Equilibrated Basis Functions: Special Reference to Structural Engineering Problems with Varying Material Properties”, *Iranian Journal of Science and Technology – Transactions of Civil Engineering*, Vol. 45, pp. 667-681, 2021.
20. Kanjanakijkasem, W., “A Finite Element Method for Prediction of Unknown Boundary Conditions in Two-Dimensional Steady-State Heat Conduction Problems”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 88, pp. 891-901, 2015.
21. Soleimani, S., Jalaal, M., Barmnia, H., Ghasemi, E., Ganji, D. D., and Mohammadi, F., “Local RBF-DQ Method for Two-Dimensional Transient Heat Conduction Problems”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, issue. 9, pp. 1411-1418, 2010.
22. Zhang, Y. M., Liu, Z. Y., Chen, J. T., and Gu, Y., “A Novel Boundary Element Approach for Solving the Anisotropic Potential Problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, issue. 11, pp. 1181-1189, 2011.