



Truss topology optimization via Zero-One (Binary) programming

Seyed Kaveh Mirzapour and Hamid Moharrami *

Department of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

Abstract: In this paper, a new method has been proposed for the topology optimization of trusses. The method takes advantage of the equation of equilibrium between internal and external forces in the flexibility method of structural analysis. The internal forces are written as the multiplication of cross-sections of members into their stresses. The stress constraints (i.e. limits on the stress values) are then imposed on the problem and eventually, the topology optimization of trusses ends up in a Linear Programming (LP) problem. The solution to the LP problem is straightforward and results in a global optimum. Accordingly, the outcome of our formulation is a global optimum. When the displacement constraints are included among the constraints, the truss topology optimization turns into a nonlinear optimization problem. To convert the problem to a linear programming problem, we used discrete design variables and converted the problem to a binary (zero-one) integer programming. Several examples were solved and compared to the published examples in the literature. It was observed that our method of truss topology optimization ends up with the same results as the previous research works, but with much less calculations. Nevertheless, our results are proved to be the global optimum, whereas the methods used in the literature cannot prove their global optimality.

Keywords: Truss Topology Optimization, Linear Programming, Stress Constraints, Displacement Constraints, Binary (Zero-One) Integer Programming.

Received: Jul. 31, 2022; Revised: Jul. 31, 2022; Accepted: Aug. 27, 2022; Published Online: March 05, 2024.

* Corresponding Author: hamid@modares.ac.ir

How to Cite: Mirzapour Seyed Kaveh and Moharrami Hamid, Truss topology optimization via Zero-One (Binary) programming, Journal of Computational Methods in Engineering; 2024, 42(2), 51-68; DOI: 10.47176/jcme.42.2.5282.





بهینه‌سازی توپولوژی خرپا با استفاده از برنامه‌ریزی صفر و یک (دودویی)

سید کاوه میرزاپور و حمید محرمی* 

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده - در مقاله حاضر یک روش جدید برای بهینه‌سازی توپولوژی خرپاها ارائه می‌شود. این روش از رابطه تعادل در فرمولبندی روش نرمی در تحلیل سازه‌ها استفاده می‌کند. با اعمال تغییراتی روی رابطه نیروهای داخلی و خارجی، فضایی برای بهینه‌سازی سازه‌های خرپایی بوجود آورده می‌شود که متکی بر محدودیت تنش و نیروی داخلی اعضاء است. در ابتدا با در نظر گرفتن قید تنش که بر مسئله اعمال می‌شود، بهینه‌سازی توپولوژی خرپا در قالب یک مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) به انجام می‌رسد. راه حل مسئله برنامه‌ریزی خطی ساده است و منجر به بهینه سراسری می‌شود. با اعمال محدودیت جابجایی بهینه‌سازی توپولوژی به یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی تبدیل می‌شود. برای تبدیل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، از متغیرهای طراحی گسسته استفاده می‌شود و مسئله بهینه‌سازی توپولوژی به مسئله برنامه‌ریزی اعداد صحیح دودویی (صفر و یک) تبدیل می‌گردد. مثال‌های متعددی حل شده‌اند و با نمونه‌های منتشر شده در مقالات پیشین مقایسه گشته‌اند. با حل مسائل مطرح شده مشاهده می‌شود که روش ارائه شده در این تحقیق برای بهینه‌سازی توپولوژی خرپا منجر به نتایجی بهتر و در بعضی از موارد، مشابه نتایج تحقیقات قبلی اما با محاسبات کمتر می‌شود. با این وجود، ثابت شده است که نتایج بدست آمده در این مقاله بهینه سراسری هستند در حالی که روش‌های بکار رفته در تحقیقات پیشین نمی‌توانند بهینگی سراسری خود را اثبات کنند.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی توپولوژی خرپا، برنامه‌ریزی خطی، قید تنش، قید جابجایی، برنامه‌ریزی اعداد صحیح صفر و یک.

دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۵/۰۹، بازنگری: ۱۴۰۱/۰۵/۰۹، پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۰۵، اولین انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۵

* نویسنده مسئول، رایانامه: hamid@modares.ac.ir



فهرست علائم

سطح مقطع عضو	A	بردار جابجایی گره‌ها	$\{u\}$
ماتریس قطری شده سطح مقاطع	$[A_d]$	حداکثر جابجایی مجاز گره	u_j^{max}
متغیر دودویی	b_{ik}	حداقل جابجایی مجاز گره	u_j^{min}
ماتریس تعادل کل سازه	$[C]$	مختصات افقی گره نزدیک	X_i
ترانواده ماتریس تعادل کل سازه	$[C^T]$	مختصات افقی گره دور	X_j
بعد سازه خریایی	d	مختصات عمودی گره نزدیک	Y_i
مدول الاستیسیته	E	مختصات عمودی گره دور	Y_j
بردار نیروهای خارجی	$\{F\}$	تغییر طول عضو خریایی	δL
بردار نیروهای داخلی اعضاء	$\{f\}$	بردار تغییر طول اعضاء خریایی	$\{\delta L\}$
طول عضو	L	کرنش درون عضوی	ε
ماتریس قطری شده طول اعضاء	$[L_d]$	متغیر دودویی تنش	ξ_{ik}
تعداد اعضاء خرپا	m	چگالی سازه	ρ
تعداد درجات آزاد و بسته سازه	n	تنش درون عضوی	σ
تعداد گره‌ها	nn	بردار تنش اعضاء	$\{\sigma\}$
تعداد سطح مقاطع گسسته	q	حداکثر تنش مجاز عضو	σ_i^{max}
تعداد عکس‌العمل تکیه‌گاهی	r	حداقل تنش مجاز عضو	σ_i^{min}
جابجایی گره	u		

۱- معرفی

مهندسان در محاسبات خود، به دنبال راهی برای اقتصادی‌تر کردن طرح‌ها هستند. در بسیاری از زمینه‌های مهندسی، بهینه‌سازی وزن سازه‌ها، کاربرد و منافع زیادی دارد. در حوزه مهندسی عمران این کار می‌تواند منجر به سازه‌های ارزان‌تر شود. در این راستا طرحی موفق‌تر است که با هزینه کمتر، تمام شرایط خواسته شده را ارضاء نماید. بهینه‌سازی توپولوژی یک موضوع مهم در زمینه طراحی بهینه است. تعداد مقالات تحقیقاتی که در دهه‌های اخیر در این زمینه توسط ناشران مختلف چاپ شده است، این مهم را نشان می‌دهد. بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها به روش‌های تحلیلی، (حتی برای سازه‌های ساده) نسبتاً سخت و گاهی ناممکن است. لذا برای بهینه‌سازی توپولوژی از روش‌های عددی استفاده می‌شود. این روش‌ها با

تکنیک‌های حل تکرار شونده سعی می‌کنند توپولوژی بهینه را بدست آورند.

کلاین در سال ۱۹۵۵ اولین برنامه‌ریزی غیرخطی را در مسئله بهینه‌سازی سازه‌ها عنوان نمود. او مسئله بهینه‌سازی غیرخطی را با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ^۱ و متغیرهای کمبود^۲ به معادلات غیرخطی تبدیل نمود. حل معادلات غیرخطی به دست آمده بسیار مشکل بوده و پاسخ از میان مجموعه‌ای از جواب‌ها به دست می‌آمد. کلاین همچنین عنوان نمود که بیشتر مسائل بهینه‌سازی در سازه‌ها قابل تبدیل به معادلات غیرخطی می‌باشند [۱]. در سال ۱۹۶۴ دُرِن، گوموری و گرینبرگ مسئله بهینه‌سازی توپولوژی خرپا را با یک برنامه‌ریزی غیرخطی ارائه کردند. آنها برای بهینه‌یابی توپولوژی از خرپا با درجه نامعینی بالا استفاده کردند. پاسخ مسئله‌ی

بهینه‌سازی توپولوژی خرپا را تحت قید تنش با روش شاخه و کران^۴ حل کردند [۶]. فاستینو و همکاران در سال ۲۰۰۶ در ادامه‌ی پژوهش اوهاسکی و کاتو، با استفاده از برنامه‌ریزی اعداد صحیح مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی خرپا را فرمولبندی کردند با این تفاوت که، فرمولبندی آن‌ها بر اساس تئوری الاستیسیته برای پیدا کردن یک سازه‌ی پایدار از لحاظ سینماتیکی با توپولوژی و اندازه‌ی بهینه بود [۷]. در سال ۲۰۰۷، اشتولپ با ترکیب برنامه‌ریزی خطی صفر و یک و برنامه‌ریزی درجه دوم محذب تحت بارگذاری استاتیکی و چرخه‌ای با تابع هدف بیشینه‌سازی سختی، بهینه‌سازی توپولوژی خرپا را انجام داد [۸].

در دهه‌های اخیر، مقالات متعددی در زمینه بهینه‌سازی توپولوژی خرپا با استفاده از روش‌های ابتکاری و فرا-ابتکاری چاپ شده‌اند. هاجلا و همکاران در سال ۱۹۹۳ روش جستجوی تصادفی^۵ را معرفی کردند که بر پایه الگوریتم ژنتیک (GA) بود. در روش ارائه شده بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های خرپایی مورد توجه قرار گرفت [۹]. کاوه و کلات‌جاری در سال ۲۰۰۳ با اعمال روش نیرو برای متغیرهای طراحی و بکارگیری برخی مفاهیم تئوری گراف‌ها برای تحلیل سازه بهینه‌سازی توپولوژی و اندازه خرپاها را با استفاده از الگوریتم ژنتیک ارائه دادند [۱۰]. ریچاردسون و همکاران در سال ۲۰۱۲ بهینه‌سازی تک هدفه و چند هدفه توپولوژی خرپاها را با معرفی روشی بر پایه بهبود پایداری سینماتیکی^۶ (KSR) با استفاده از الگوریتم ژنتیک ارائه دادند [۱۱]. با الهام گرفتن از طبیعت رفتاری پروانه‌ها، وو و همکاران در سال ۲۰۱۷ با استفاده از مجموعه متغیرهای طراحی گسسته بهینه‌سازی همزمان توپولوژی و اندازه خرپاها را ارائه دادند [۱۲].

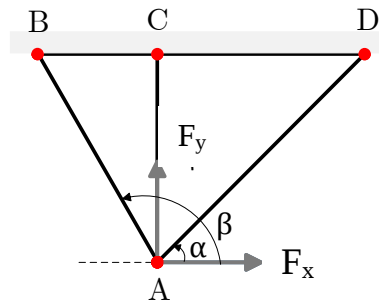
هدف از ارائه این مقاله بهینه‌سازی توپولوژی و اندازه سازه‌های خرپایی با استفاده از برنامه‌ریزی اعداد صحیح است. روش پیشنهادی از معادله تعادل در تحلیل به روش نرمی استفاده می‌کند. در این مقاله در بخش نخست پیشینه تاریخی و ادبیات علمی مرتبط با موضوع بیان شد. در بخش دوم روابط

کمترین وزن، یک سازه معین به دست آمده از خرپای نامعین بود. این پژوهشگران به روش خاصی توپولوژی خرپا را بهینه می‌نمودند [۲]. آن‌ها برای بهینه‌یابی توپولوژی با در نظر گرفتن بارهای وارده، تعدادی نقاط ثابت در صفحه فرض می‌کردند و با چیدن اعضاء بین گره‌ها به یک خرپای نامعین دست می‌یافتند، سپس با انتخاب تعدادی خرپای معین از شکل به دست آمده و تحلیل و طراحی هر یک از آنها، پاسخ بهینه مشخص می‌شد. اسپیلرس و فارل در سال ۱۹۶۹ برای بهینه‌سازی توپولوژی و سطح مقطع خرپا به یک برنامه‌ریزی خطی دست یافتند. در پژوهش آن‌ها، توپولوژی خرپا مانند روش دُرُن بهینه می‌شد. افزون بر آن، از روش طرح تنش نهایی برای بهینه نمودن سطح مقطع نیز استفاده می‌شد [۳]. در تحقیق آن‌ها فقط محدودیت تنش در نظر گرفته شده بود.

ساکا در سال ۱۹۸۰ روش جدیدی را برای بهینه‌یابی شکل خرپا ارائه نمود. در روش‌هایی که تا آن زمان ارائه شده بود از تحلیل سازه و بهینه‌سازی به صورت دو الگوریتم جداگانه استفاده می‌شد. به عبارتی دیگر به ازاء هر تکرار، یک بار تحلیل سازه و یک بار مسئله بهینه‌یابی حل می‌گردید. ساکا تحلیل سازه را به عنوان محدودیت سختی در مسئله بهینه‌یابی وارد نمود. در این مسئله، سطح مقطع عرضی و مختصات گرهی خرپا به عنوان متغیر طراحی مستقل و تغییرمکان‌های گرهی به صورت متغیر طراحی وابسته در نظر گرفته شده بود. او مسئله غیرخطی بدست آمده را با استفاده از دو جمله اول دنباله تیلور به مسئله خطی تبدیل نمود. در این فرآیند، افزون بر هندسه، توپولوژی سازه نیز بهینه گردید [۴].

ساکاموتو و اُدا در سال ۱۹۹۳، پژوهشی در راستای بهینه‌سازی همزمان توپولوژی و اندازه خرپا ارائه دادند. آن‌ها با استفاده از روش معیار بهینگی سطح مقطع اعضاء خرپا را بهینه کردند و با اعمال الگوریتم ژنتیک به طراحی بهینه توپولوژی خرپا دست یافتند [۵].

اوهاسکی و کاتو در پژوهشی در سال ۲۰۰۵، با فرمولبندی کردن مسئله به روش برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط^۳،



شکل ۱- خرپای سه عضوی

مولفه‌های نیروهای تک تک اعضا بر روی نیروهای گرهی در نظر گرفته شده و در ماتریس ذخیره می‌شود. اگر ماتریس تعادل کل سازه با $[C]$ نشان داده شود، رابطه‌ی تعادل سازه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[C]\{f\} = \{F\} \quad (1)$$

شایان توجه است که در حالت کلی ماتریس تعادل مربعی و متقارن نیست، زیرا تعداد سطرها برابر تعداد درجات آزادی گره‌ها است و تعداد ستون‌های با تعداد اعضا خرابایی سازه برابر است و لزوماً تعداد درجات آزادی گره‌ها با تعداد اعضا خرپا برابر نیستند. در رابطه‌ی (۱) ماتریس تعادل، نیروهای گرهی مستقل $\{F\}$ را به نیروهای وابسته‌ی عضوی $\{f\}$ پیوند می‌دهد. روش یافتن ماتریس $[C]$ برای یک خرپای سه عضوی در فضای دو بعدی به صورت شکل (۱) است.

$$\begin{bmatrix} -\cos\beta & 0 & -\cos\alpha \\ -\sin\beta & -1 & -\sin\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{AB} \\ f_{AC} \\ f_{AD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (2)$$

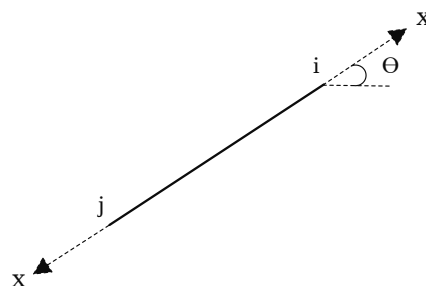
در رابطه‌ی (۲) F_x و F_y معادل نیروهای خارجی اعمال شده به گره A می‌باشند و f_i ها نیروهای درون عضوی را نمایش می‌دهند. در رابطه فوق زوایا از محور x به صورت پادساعتگرد اندازه‌گیری می‌شوند.

روابط مثلثاتی مورد نیاز برای هر عضو i - j در انتها i به صورت زیر است.

اساسی مورد نیاز برای فرمولبندی مسئله مطرح می‌شود سپس فرمولبندی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی خرپا در بخش سوم ارائه می‌شود. در انتهای بخش سوم مسئله بهینه‌سازی توپولوژی خرپای ده عضوی تحت قید تنش مطرح می‌شود، سپس در بخش چهارم راه حل نویسندگان برای رفع ناپایداری سینماتیکی خرپا ارائه می‌شود. در انتها و در بخش پنجم چند مثال برای تبیین مسئله حل می‌گردد.

۲- روابط اساسی

در مسائل مربوط به بهینه‌سازی قبل از هر چیز، فرمولبندی مسئله مشخص می‌شود. فرمولبندی شامل تعیین متغیرهای طراحی و تعریف تابع هدف و محدودیت‌های طراحی می‌باشد. در بهینه‌سازی توپولوژی خرپاهای دو بعدی و سه بعدی متغیرهای طراحی سطح مقطع اعضا بوده و تابع هدف وزن (حجم) سازه است. محدودیت‌های طراحی شامل محدودیت‌های تنش، جابجایی گره‌ها و پایداری سینماتیکی می‌باشد. در طراحی خرپاها توجه به پایداری عضو و کماتش نکردن اعضای فشاری از ملزومات مهم طراحی است. این محدودیت می‌تواند به صورت محدودیت در تنش فشاری اعضا اعمال شود. در این مقاله فرمولبندی بهینه‌سازی توپولوژی خرپا با استفاده از ماتریس تعادل نیرویی بیان می‌شود. ماتریس تعادل نیرویی در تحلیل به روش نرمی بکار می‌رود. این ماتریس نیروهای داخلی عضوی را به نیروهای گرهی پیوند می‌دهد. ماتریس تعادل نیرویی، یک نوع ماتریس تعادل^۷ است [۱۳ و ۱۴] و برای ساختن آن با استفاده از معادلات ایستایی اثر



شکل ۲- دیاگرام آزاد عضو

$$[L_d]\{\sigma\} = E\{\delta L\} \xrightarrow{\{\delta L\} = [C^T]\{u\}} \quad (8)$$

$$[L_d]\{\sigma\} = E[C^T]\{u\}$$

ماتریس طول اعضاء یک ماتریس قطری به این صورت است:

$$[L_d] = \begin{bmatrix} L_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & L_m \end{bmatrix} \quad (9)$$

حال با تعریف روابط اخیر، می‌توان فرمولبندی بهینه‌سازی توپولوژی خرپا تحت قید تنش و جابجایی را به صورت زیر بیان کرد.

۳- فرمولبندی بهینه‌سازی توپولوژی خرپا

طبق روابط ارائه شده در بخش (۲) و با در نظر گرفتن قیود تنش و جابجایی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی خرپا به صورت زیر فرمولبندی می‌شود.

$$\text{Min } F(A) = \rho \sum_{i=1}^m A_i L_i$$

s. t.

$$\{F\} = [C]\{f\} \quad (10)$$

$$[L_d]\{\sigma\} = E[C^T]\{u\}$$

$$\{f\} = [A_d]\{\sigma\}$$

$$\sigma_i^{\min} \leq \sigma_i \leq \sigma_i^{\max} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$u_j^{\min} \leq u_j \leq u_j^{\max} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ادامه (۱۰)

$$A \geq 0$$

این در حالی است که $[A_d]$ فرم قطری ماتریس سطح مقاطع می‌باشد.

$$\cos \alpha = \frac{X_i - X_j}{L} \quad (3)$$

$$\sin \alpha = \frac{Y_i - Y_j}{L}$$

این در حالی است که طول عضو از رابطه (۴) بدست می‌آید.

$$L = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} \quad (4)$$

در شکل (۲)، مختصات محلی در i و j ، با یکدیگر اختلاف جهت دارند. در روابط بالا X_i و Y_i مختصات گره ابتدای المان بوده و X_j و Y_j نیز مختصات گره انتهای المان می‌باشد و L طول المان را نشان می‌دهد. رابطه تنش هر عضو با نیروی داخلی عضو و سطح مقطع آن در ادامه آمده است.

$$\sigma = \frac{f}{A} \quad (5)$$

که در آن قانون هوک^۸ و کرنش درون عضوی برای هر عضو خرابایی در محدوده ارتجاعی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\delta L}{L} \rightarrow \sigma = E \frac{\delta L}{L} \quad (6)$$

در روابط بالا E مدول یانگ و ε کرنش عضو می‌باشد.

اگر $\{u\}$ بردار جابجایی گره‌ها و $\{\delta L\}$ بردار تغییر طول اعضاء ناشی از بار وارده باشد رابطه‌ی زیر بین تغییر طول اعضاء و جابجایی گره‌ها برقرار می‌باشد:

$$\{\delta L\} = [C^T]\{u\} \quad (7)$$

با استفاده از تعاریف بالا می‌توان نتیجه گرفت:

با تعریف مجموعه‌ای برای متغیرهای طراحی به صورت $A_i \in \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}\}$ فرمولبندی غیرخطی بالا به شکل رابطه خطی صفر و یک مختلط تبدیل می‌شود:

$$A_i = \sum_{K=1}^q b_{iK} \cdot A_{iK} \quad (14)$$

$$\sum_{K=1}^q b_{iK} \leq 1$$

$$b_{iK} \in \{0, 1\}$$

در رابطه (۱۴)، A_{iK} ها مقادیر گسسته هستند. با جایگزین کردن رابطه (۱۴) در $f_i = \sigma_i \cdot A_i$ می‌توان نوشت:

$$f_i = \sigma_i \cdot A_i \xrightarrow{A_i = \sum_{K=1}^q b_{iK} \cdot A_{iK}} f_i = \sum_{K=1}^q \sigma_i \cdot b_{iK} \cdot A_{iK} \quad (15)$$

در ادامه و به کمک روابط (۱۲) و تعریف متغیر جدیدی به نام $\xi_{iK} = \sigma_i \cdot b_{iK}$ روابط به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\sigma_i^{\min} \cdot b_{iK} \leq \xi_{iK} \leq \sigma_i^{\max} \cdot b_{iK} \quad (16)$$

$$\sigma_i - \sigma_i^{\max} (1 - b_{iK}) \leq \xi_{iK} \leq \sigma_i - \sigma_i^{\min} (1 - b_{iK}) \quad (17)$$

با توجه به رابطه نامساوی (۱۸) مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی خرپا تکمیل می‌شود:

$$\sum_{K=1}^q b_{iK} \leq 1 \quad (18)$$

ذکر این نکته در اینجا حائز اهمیت است که، اگر رابطه‌ی نامساوی بالا به صورت رابطه‌ی برابری بکار گرفته شود مسئله بهینه‌سازی خرپا صرفاً به مسئله بهینه‌سازی اندازه تبدیل می‌شود. فرمولبندی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی خرپا با مجموعه‌ای از سطح مقاطع به طور کلی به این صورت بیان می‌شود.

$$\text{Min } F(X) = \rho \sum_{i=1}^m A_i L_i \quad (19)$$

s. t.

$$A_i = \sum_{k=1}^q b_{ik} \cdot A_{ik} \quad k = 1, 2, \dots, q$$

$$[A_d] = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

در فرمولبندی بالا بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های خرپایی تحت قیود تنش و جابجایی بیان شده است.

اگر هدف بهینه‌سازی توپولوژی صرفاً با قید تنش باشد و به عبارت دیگر محدودیت جابجایی مطرح نباشد، مسئله می‌تواند به صورت برنامه‌ریزی خطی فرمولبندی شود اما، در صورتی که قید جابجایی به مسئله اضافه شود، مسئله بهینه‌سازی خرپا به مسئله‌ای غیرخطی تبدیل می‌شود زیرا چنان که ملاحظه خواهد شد، در تعریف نیروی داخلی ($f_i = \sigma_i \cdot A_i$) حاصلضرب دو مجهول (تنش و مساحت عضو) ظاهر می‌شود و آن را غیرخطی می‌کند. در ادامه با استفاده از پژوهشی که پترسن [۱۵] در سال ۱۹۷۱ انجام داد، می‌توان قید نیروی داخلی را با توجه به مجموعه‌ای از سطح مقطع‌های گسسته به قید خطی تبدیل کرد. پترسن ابتدا رابطه غیرخطی $z = xy$ را به خطی تبدیل کرد، در ادامه‌ی پژوهش او، گلوور طی مطالعاتی که در سال‌های ۱۹۷۵ و ۱۹۸۴ [۱۶ و ۱۷] انجام داد، رابطه‌ی معرفی شده را به یک رابطه‌ی صفر و یک خطی مختلط تبدیل کرد.

$$z = xy, \quad x \in \{0, 1\}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$1) LL \leq y \leq UU \xrightarrow{\times x} \boxed{(LL)x \leq z = xy \leq (UU)x} \quad (12)$$

$$2) LL \leq y \leq UU \xrightarrow{\times (1-x)}$$

$$LL(1-x) \leq y - z \leq UU(1-x) \xrightarrow{\times (-1)}$$

$$-LL(1-x) \geq z - y \geq -UU(1-x) \xrightarrow{+y}$$

$$\boxed{y - LL(1-x) \geq z \geq y - UU(1-x)}$$

در رابطه فوق، LL و UU به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار مجاز برای متغیر y می‌باشند، که می‌توان به فرم ریاضی به این صورت معرفی کرد.

$$LL = \min \{y : y \in \mathbb{R}\} \quad (13)$$

$$UU = \max \{y : y \in \mathbb{R}\}$$

همان طور که مشاهده می‌شود رابطه‌ی $\{f\} = [A_d] \{\sigma\}$ به دلیل مجهول بودن تمام متغیرها رابطه‌ای غیرخطی می‌باشد. لذا

$$\text{Min } 360((A_1 + A_4 + A_5 + A_6 + A_{10}) + \sqrt{2}(A_2 + A_3 + A_7 + A_8))$$

s.t.

$$\begin{cases} F_{x,3} = 0 \\ F_{y,3} = 0 \\ F_{x,4} = 0 \\ F_{y,4} = 0 \\ F_{x,5} = 0 \\ F_{y,5} = 0 \\ F_{x,6} = 0 \\ F_{y,6} = -100 \end{cases} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{\min} \leq \sigma_i \leq \sigma_{\max} \rightarrow -25 \leq \sigma_i \leq 25$$

اگر دو طرف همه قیود تنش در سطح مقطع مربوطه ضرب شود فرمولبندی بالا به صورت زیر در می آید.

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & & & & & & \\ & A_2 & & & & & & & & \\ & & A_3 & & & & & & & \\ & & & A_4 & & & & & & \\ & & & & A_5 & & & & & \\ & & & & & A_6 & & & & \\ & & & & & & A_7 & & & \\ & & & & & & & A_8 & & \\ & & & & & & & & A_9 & \\ & & & & & & & & & A_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \sigma_{\min} \leq$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{Bmatrix} \leq \begin{bmatrix} A_1 & & & & & & & & & \\ & A_2 & & & & & & & & \\ & & A_3 & & & & & & & \\ & & & A_4 & & & & & & \\ & & & & A_5 & & & & & \\ & & & & & A_6 & & & & \\ & & & & & & A_7 & & & \\ & & & & & & & A_8 & & \\ & & & & & & & & A_9 & \\ & & & & & & & & & A_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \sigma_{\max}$$

$$A_i \geq 0$$

$$\{F\} = [C]\{f\} \quad \text{ادامه (۱۹)}$$

$$[L_d]\{\sigma\} = E[C^T]\{u\}$$

$$f_i = \sum_{k=1}^q \xi_{ik} \cdot A_{ik}$$

$$\sigma_i^{\min} \leq \sigma_i \leq \sigma_i^{\max} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$u_j^{\min} \leq u_j \leq u_j^{\max} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sigma_i^{\min} \cdot b_{ik} \leq \xi_{ik} \leq \sigma_i^{\max} \cdot b_{ik}$$

$$\sigma_i - \sigma_i^{\max}(1 - b_{ik}) \leq \xi_{ik} \leq \sigma_i - \sigma_i^{\min}(1 - b_{ik})$$

$$\sum_{k=1}^q b_{ik} \leq 1$$

$$b_{ik} \in \{0, 1\}$$

$$A_i \in \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}\}$$

در فرمولبندی ارائه شده، ρ چگالی اعضاء، m تعداد اعضاء خرپا و n تعداد درجات آزادی هر گره می باشد. در ادامه با توجه به فرمولبندی ارائه شده در این تحقیق، چند نمونه سازه‌ی خرابایی در حالت‌های دو بعدی و سه بعدی با استفاده از برنامه تولید شده، حل می شود. ابتدا برای نشان دادن سادگی روش در بدست آوردن توپولوژی بهینه فقط با قیود تنش، یک خرپای ده عضوی بهینه سازی می شود. همچنین برای نشان دادن رفع مشکل ناپایداری سینماتیکی از این مثال کمک گرفته می شود.

مثال: خرپای ۱۰ عضوی دو بعدی

در این مثال هدف طراحی و بهینه سازی توپولوژی یک خرپای ۱۰ عضوی مطابق شکل (۳) است. این خرپا تحت یک بار عمودی در گره ۶ قرار گرفته است و برای تحمل این نیرو بهینه می شود.

تنش مجاز اعضاء در حالت کشش و فشار یکسان و برابر σ_a می باشد و همچنین مشخصات خرپا و بارگذاری بصورت زیر است:

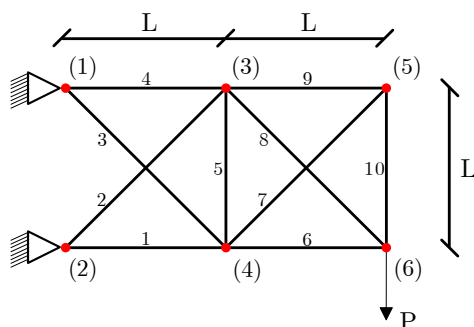
$$P = 100 \text{ Kips}$$

$$\sigma_a = 25 \text{ ksi}$$

$$L = 30 \text{ ft}$$

$$\rho = 0.1 \frac{\text{lb}}{\text{in}^3}$$

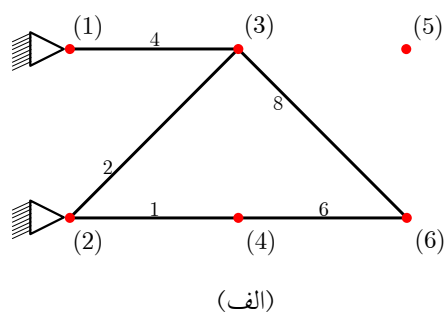
صورت مسئله بهینه سازی توپولوژی برای این خرپا در صورت عدم وجود قید جابجایی چنین نوشته می شود:



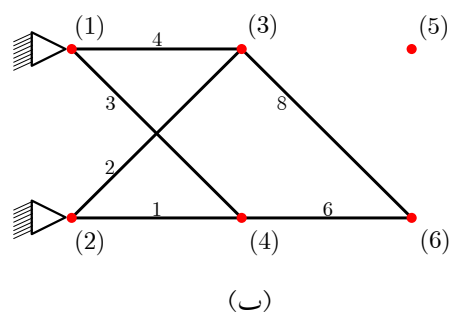
شکل ۳- خرپای ده عضوی

جدول ۱- بهینه‌سازی توپولوژی خرپای ۱۰ عضوی

اعضاء	طول (ft)	قبل از پایدارسازی سینماتیکی			پس از پایدارسازی سینماتیکی		
		نیروی داخلی (kips)	مساحت (in ²)	وزن (lb)	نیروی داخلی (kips)	مساحت (in ²)	وزن (lb)
۱	۳۰	-۱۰۰	۴	۱۴۴	-۱۰۰	۴	۱۴۴
۲	۴۲/۴۲۶	-۱۴۱/۴۲	۵/۶۵۷	۲۸۸	-۱۴۱/۴۲	۵/۶۵۷	۲۸۸
۳	۴۲/۴۲۶	۰	۰	۰	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۰۰۵۶	۰/۰۰۰۲۸
۴	۳۰	۲۰۰	۸	۲۸۸	۲۰۰	۸	۲۸۸
۵	۳۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۶	۳۰	-۱۰۰	۴	۱۴۴	-۱۰۰	۴	۱۴۴
۷	۴۲/۴۲۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۸	۴۲/۴۲۶	۱۴۱/۴۲	۵/۶۵۷	۲۸۸	۱۴۱/۴۲	۵/۶۵۷	۲۸۸
۹	۳۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱۰	۳۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
وزن سازه (lb)				۱۱۵۲	۱۱۵۲		



(الف)



(ب)

شکل ۴. خرپای ۱۰ عضوی: (الف) قبل از پایدار سازی و (ب) بعد از پایدارسازی

حل این مسئله برنامه‌ریزی خطی با الگوریتم سیمپلکس به شکل خرپای بهینه‌سازی شده (از نظر توپولوژی) بصورت شکل جواب‌های جدول (۱) می‌انجامد:

(۴) در می‌آید.

اگر $kk=m$ باشد و ماتریس $[C]$ منفرد نباشد رابطه‌ی $\{F\} = [C]\{f\}$ فقط یک جواب برای بردار $\{f\}$ دارد. اگر $m > kk$ باشد، آنگاه رابطه تعادل به لحاظ ریاضی جواب‌های متعدد می‌تواند داشته باشد. اگر $m < kk$ باشد، معادله تعادل به لحاظ ریاضی یا جواب ندارد یا فقط یک جواب دارد. حالتی که مسئله دارای جواب‌های متعدد است، نشان از ناپایداری سازه خرابایی است.

$$d \times nn - r = kk$$

روش پیشنهادی در این تحقیق برای تامین پایداری سینماتیکی مشابه ایده‌ای است که رزوانی در سال ۱۹۹۶ ارائه داد. با افزودن یک "قید پایداری" به مسئله برای سیستم سازه‌ای، پایداری سینماتیکی تامین خواهد شد. رزوانی قید پایداری سیستم را به عنوان تعادل نیروهای ناشی از جابجایی‌های گره‌ای کوچک تعیین کرد [۱۹]. در تحقیق حاضر، پس از آنکه توپولوژی بهینه بدست آمد، به جای جابجایی‌های کوچک، در گره‌هایی که حداقل یک عضو به آنها متصل است، نیروهای کوچکی در راستای محورهای مختصات جهت تضمین پایداری گره اعمال می‌شود. بر گره‌هایی که هیچ عضوی به آنها متصل نیستند، این عمل صورت نمی‌گیرد. در مورد این مثال، در راستای قائم گره ۴ نیروی کوچک (۰/۰۰۱) وارد می‌شود تا جلوی ناپایداری سینماتیکی گرفته شود. نتایج مربوط به این عملیات در سه ستون آخر جدول ۱ (پس از پایدارسازی) نوشته شده است. همچنان که ملاحظه می‌شود، جواب بدست آمده با نظریه سوود و گینوس [۲۰] که معتقد بودند بهینه‌سازی توپولوژی خراباها سازه‌ای معین بدست می‌دهد، هماهنگ است. البته ذکر این نکته در اینجا حائز اهمیت است که این کار صرفاً جهت پایدارسازی سینماتیکی از لحاظ تئوری (نه برای مقاصد اجرایی) در نظر گرفته شده است. برای مقاصد اجرایی علاوه بر پایداری سینماتیکی کماتش اعضا نیز باید کنترل شوند.

۵- مثال‌های دیگر

در این بخش برای نشان دادن کارایی الگوریتم مورد مطالعه در سازه‌های خرابایی، چند نمونه خرابا با مشخصات و بارگذاری‌های

همانطور که در شکل (۴-الف) مشخص است پنج عضو از خرابا حذف شده‌اند و گره ۴ در جهت قائم از لحاظ پایداری سینماتیکی، ناپایدار است، بعلاوه هیچ عضوی به گره ۵ متصل نیست. چنانچه گره ۵ جزء گره‌های خرابا به حساب آید در هر دو راستای X و Y ناپایدار می‌شود، لذا برای پایداری سازه (شکل ۴-ب) باقیمانده از نظر سینماتیکی فکری اندیشید که در ادامه تشریح می‌شود.

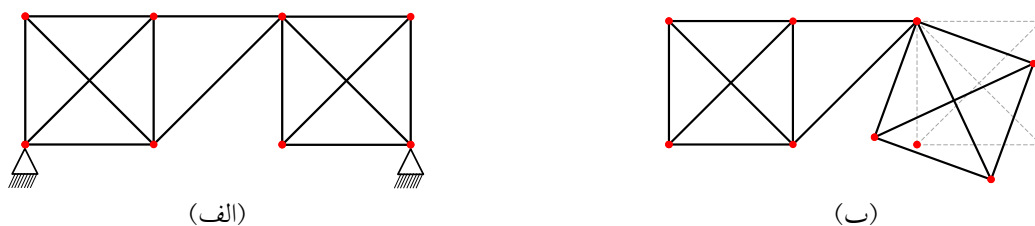
۴- پایداری سینماتیکی

در ابتدا دو مفهوم اساسی، پایداری داخلی و خارجی یادآوری می‌گردد. اگر سازه بتواند شکل خود را در حالت بدون وجود تکیه‌گاه‌ها حفظ کند، سازه به صورت داخلی پایدار است. با در نظر گرفتن شرایطی که شامل تعداد عضو و گره برای پایداری داخلی و تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برای پایداری خارجی است، می‌توان رابطه‌ی زیر را که توسط چبی شِف-گروبلر-کوچ‌باخ (CGK) ارائه شد، به عنوان یک ضابطه‌ی مقدماتی برای پایداری سینماتیکی سازه‌ی خرابایی بکار برد. در حالت کلی اگر d بعد (دو یا سه بعدی) سازه باشد. خرابای حاصل را با رعایت نامساوی زیر پایدار داخلی می‌نامند [۱۸]:

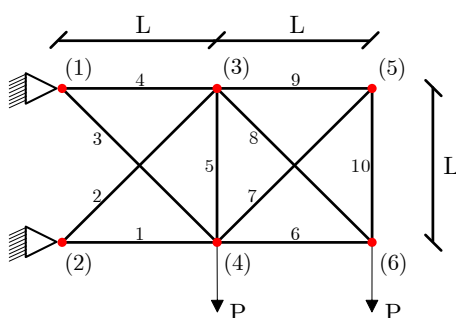
$$m \geq d \times nn - r \quad (20)$$

در رابطه‌ی (۲۰)، d بعد خرابا، m تعداد اعضا، nn تعداد گره‌ها و R تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی می‌باشد. با این حال، موارد بسیاری وجود دارند که در آن‌ها سازه به طور داخلی ناپایدار است، اگر چه شرایط ذکر شده را ارضاء می‌کند. شکل (۵) بیانگر مثالی برای این مهم است. رابطه (۲۰) یک شرط لازم برای شرایط پایداری است اما برای پایداری سینماتیکی شرط کافی نیست.

رابطه (۲۰) را می‌توان با معادله $\{F\} = [C]\{f\}$ توضیح داد. چنانچه تعداد درایه‌های بردار $\{F\}$ برابر با تعداد درجات آزادی پس از کسر تعداد درجات بسته تکیه‌گاه‌ها باشد و آن را با kk نشان دهیم و تعداد اعضای سازه m عضو خرابایی باشد، ماتریس $[C]$ یک ماتریس $kk \times m$ خواهد بود. از نظر ریاضی



شکل ۵- ناپایداری داخلی خرپا درحالی که رابطهی $m \geq d \times n n-r$ ارضاء شده است: الف) سازه با تکیه‌گاه، ب) سازه بدون تکیه‌گاه



شکل ۶- خرپای ده عضوی

$$E = 6.895 \times 10^{10} \text{ Pa} (10^4 \text{ ksi})$$

$$\sigma_i^{\max} = |\sigma_i^{\min}| = 1.724 \times 10^8 \text{ Pa} (25 \text{ ksi})$$

$$u_{\max} = 0.0508 \text{ m} (2 \text{ in})$$

$$6.4516 \text{ cm}^2 (1 \text{ in}^2) \leq A^{\text{optimum}} \leq 193.5 \text{ cm}^2 (30 \text{ in}^2)$$

سطح مقطع بهینه از میان مقطعی با ضریبی از ۶/۴۵۱۶ سانتیمتر مربع (۱ اینچ مربع) بین کران‌های معرفی شده باید انتخاب شود.

نتایج حاصل از طراحی و بهینه‌سازی خطی صفر و یک این خرپا توسط الگوریتم پیشنهادی در این تحقیق در شکل (۷) و جدول (۲) نشان داده شده و با مطالعات پیشین مقایسه شده است. در مثال‌های حل شده پیشین مساحت اعضاء ضریبی از یک اینچ مربع (۶/۵۴ سانتی‌متر مربع) می‌باشند.

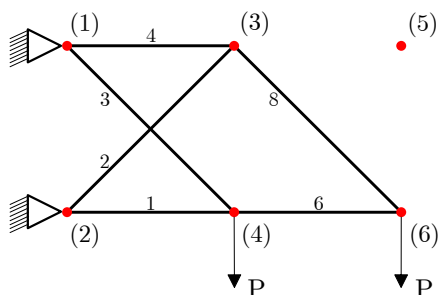
همانطور که در جدول (۲) مشاهده می‌شود بهینه‌سازی توپولوژی خرپا به روش (SOGA) وزن کمتر بدست آورده است اما، هنگامی که جواب‌های این بهینه‌سازی با نرم افزار SAP2000 تحلیل شد، ملاحظه شد که مقدار تغییر مکان بدست آمده در راستای Y برای گره شماره ۶ قید جابجایی را نقض می‌کند. الگوریتم پیشنهادی در این مقاله که بر پایه روش نرمی و برنامه‌ریزی خطی صفر و یک مختلط است، به جواب بهینه با

مختلف تحت قیود تنش و جابجایی که در گذشته مورد تحقیق قرار گرفته‌اند، با روش پیشنهادی بهینه‌سازی می‌شوند. تعدادی از پژوهشگران برای اثبات دیدگاه خود، از این مثال‌ها استفاده کرده و مسئله را با روش‌های خود حل کرده‌اند. در اینجا همان مثال‌ها با استفاده از الگوریتم پیشنهادی در این تحقیق (به روش برنامه‌ریزی خطی صفر و یک (دودویی) و با بکارگیری مجموعه‌ای گسسته از سطح مقاطع موجود در جدول پروفیل‌های فولادی) بهینه‌سازی شده و با مطالعات پیشین مقایسه می‌شوند.

۵-۱- خرپای ده عضوی دو بعدی

در این بخش هدف طراحی و بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپای ۱۰ عضوی مطابق شکل (۶) است. این خرپا که توسط تعدادی از محققین از جمله ریچارسون و همکاران و نیز هاجلا مورد بهینه‌سازی توپولوژی قرار گرفته است، تحت دو بار عمودی در گره‌های ۴ و ۶ قرار گرفته و برای تحمل این نیروها بهینه شده است.

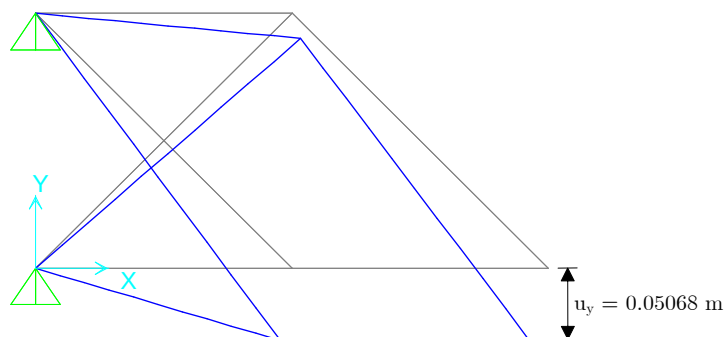
طول L و نیروی P به ترتیب برابر ۹/۱۴۴ متر و ۴۴۸/۲ کیلو نیوتن می‌باشند. چگالی همه اعضاء ثابت و برابر $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ۲۷۶۸ است. قیود رفتاری مسئله شامل جابجایی مجاز برای گره شماره ۶ در جهت Y برابر $u_{\max}$ می‌باشد.



شکل ۷- بهینه سازی توپولوژی خرپای ۱۰ عضوی

جدول ۲- توپولوژی بهینه خرپای ۱۰ عضوی

اعضاء	مساحت اعضاء به سانتی مترمربع		
	هاجلا و همکاران ^{۱۱}	ریچاردسون و همکاران ^{۱۰}	تحقیق حاضر ^۹
۱	۱۵۴/۸	۱۵۴/۸	۱۴۲
۲	۱۳۵/۵	۱۲۲/۵۸	۱۴۲
۳	۳۸/۷	۳۸/۷	۳۸/۷
۴	۱۸۰/۶	۱۹۳/۵۵	۱۹۳/۵۵
۶	۱۰۳	۹۶/۷۷	۱۰۳
۸	۱۴۲	۱۴۸/۴	۱۳۵/۵
وزن سازه	۲۲۴۱/۹۷ کیلوگرم	۲۲۳۵/۲ کیلوگرم	۲۲۴۱/۹۷ کیلوگرم



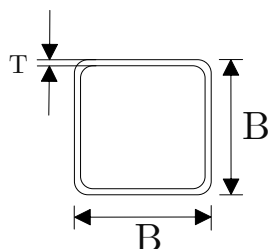
شکل ۸- تحلیل خرپای ۱۰ عضوی بهینه شده

SAP2000 تحلیل شد. شکل (۸) تحلیل خرپای بهینه شده با برنامه ریزی خطی صفر و یک را نشان می دهد. چنانچه بهینه سازی توپولوژی بجای در نظر گرفتن مساحت های فرضی، در چارچوب مقاطع در دسترس (مثلاً مقاطع موجود در جدول اشتال) انجام شود، جواب های دیگری بدست می آید. در اینجا با انتخاب مقاطع توخالی مربعی (شکل ۹) برای مجموعه جواب های گسسته نتایج بهینه سازی با

مشابهت وزنی تحقیقات هاجلا (۱۹۹۳) شده است. باید دانست که خرپای حاصل از بهینه سازی خرپای معین است و نیروهای داخلی اعضاء تابع مساحت اعضاء نیستند. تفاوت طرح های مختلف با وزن نهایی یکسان ولی اعضاء متفاوت در نحوه مشارکت اعضاء برای محدود کردن جابجایی است. جهت صحت سنجی نتایج بدست آمده از بهینه سازی، خرپاهای بهینه با فرمول بندی معرفی شده در این تحقیق، از طریق نرم افزار

جدول ۳- بهینه‌سازی توپولوژی خرپای ۱۰ عضوی با مقاطع موجود با برنامه‌ریزی خطی دودویی

اعضاء	سطح مقطع بهینه (سانتی‌متر مربع)	B (میلی‌متر)	T (میلی‌متر)	نیروی داخلی (کیلو نیوتن)
۱	۱۴۲	۳۰۰	۱۲/۵	-۸۹۶/۴
۲	۱۴۲	۳۰۰	۱۲/۵	-۶۳۳/۸۵
۳	۳۸/۳	۱۶۰	۶/۳	۶۳۳/۸۵
۴	۱۹۲	۴۰۰	۱۲/۵	۸۹۶/۴
۶	۹۴/۹	۲۵۰	۱۰	-۴۴۸/۲
۸	۱۴۲	۳۰۰	۱۲/۵	۶۳۳/۸۵
وزن سازه	۲۲۳۹/۲۳ کیلوگرم	-----	-----	-----



شکل ۹- پروفیل توخالی مربع

جدول ۴- طبقه‌بندی اعضاء خرپای ۲۵ عضوی

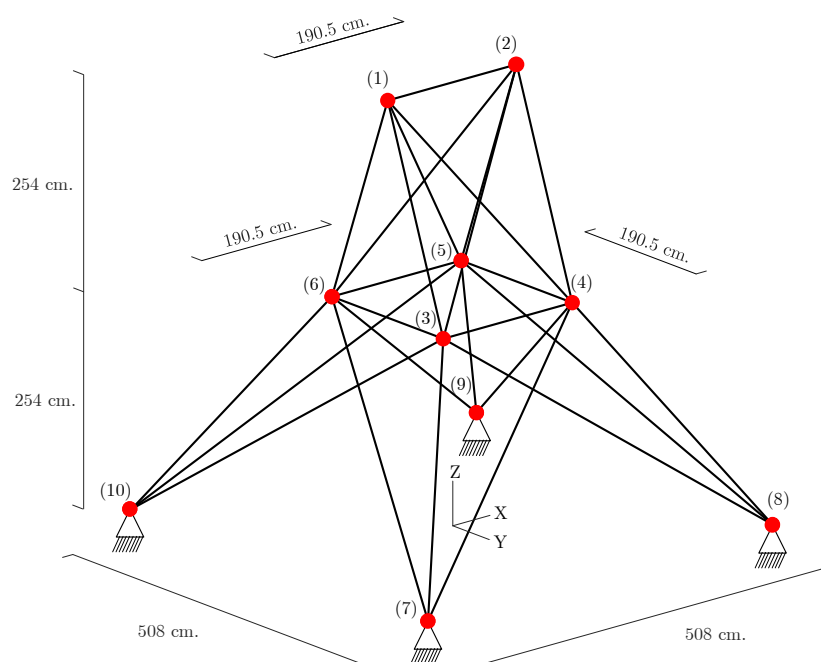
شماره گروه	دو انتها (i و j) هر عضو
(۱)	۱-۲
(۲)	۲-۶، ۱-۵، ۲-۳، ۱-۴
(۳)	۱-۶، ۱-۳، ۲-۴، ۲-۵
(۴)	۴-۵، ۳-۶
(۵)	۵-۶، ۳-۴
(۶)	۵-۸، ۴-۹، ۶-۷، ۳-۱۰
(۷)	۵-۱۰، ۶-۹، ۴-۷، ۳-۸
(۸)	۶-۱۰، ۵-۹، ۴-۸، ۳-۷

۲-۵- خرپای بیست و پنج عضوی سه بعدی

در این بخش هدف طراحی یک خرپای ۲۵ عضوی سه بعدی مطابق شکل (۱۰) تحت دو نوع بارگذاری به شرح جدول (۵) می‌باشد. این خرپا در مراجع [۲۱] و [۲۲] مورد تحقیق قرار

برنامه‌ریزی خطی صفر و یک به شرح جدول (۳) می‌باشد:

تابع هدف (وزن سازهی خرپایی) با برنامه‌ریزی خطی دودویی و انتخاب پروفیل توخالی مربعی مناسب و با رعایت قیود، برابر با ۲۲۳۹/۲۳ کیلوگرم است که در مقایسه با سطح مقطع‌های پیشنهاد شده در مطالعات گذشته ۲/۷۴ کیلوگرم سبکتر است.



شکل ۱۰- خرابای ۲۵ عضوی سه بعدی

جدول ۵- بارگذاری اعمال شده به خرابای ۲۵ عضوی سه بعدی

نیروهای خارجی (کیلو نیوتن)	بارگذاری ۱		بارگذاری ۲			
			گره			
	۱	۲	۱	۲	۳	۶
F_x	۰	۰	۴/۴۵	۰	۲/۲۲۵	۲/۲۲۵
F_y	-۸۹	۸۹	-۴۴/۵	-۴۴/۵	۰	۰
F_z	-۲۲/۲۵	-۲۲/۲۵	-۲۲/۲۵	-۲۲/۲۵	۰	۰

نمایش داده شده است. نتایج حاصل از طراحی و بهینه‌سازی بر اساس الگوریتم پیشنهادی در این تحقیق که بر پایه برنامه‌ریزی خطی صفر و یک است، با استفاده از مجموعه سطح مقاطع گسسته توسط الگوریتم پیشنهادی در جدول (۷) نشان داده شده است. فرض می‌شود که سطح مقطع اعضا یکی از مقادیر زیر را می‌تواند داشته باشد.

$$A_i \in \left\{ 0.774, 1.225, 2.142, 3.348, 4.065, 4.632, 6.542, 7.742, 9.032, 10.839, 12.671, 14.581, 21.483, 34.839, 44.516, 52.903, 60.258, 65.226 \right\}$$

گرفته است. سطح مقطع اعضا این خرابا به ۸ گروه طبق جدول (۴) طبقه‌بندی می‌شوند.

قیود رفتاری مسئله شامل تنش مجاز اعضا که در جدول (۶) ارائه شده است و حداکثر جابجایی مجاز گره ۱ و ۲ در جهات x و y برابر 0.889 سانتی‌متر می‌باشد، سایر ویژگی‌های سازهی خرابایی به شرح زیر است.

$$\rho = 2.71264 \times 10^{-2} \text{ N/cm}^3$$

$$E = 6897 \times 10^3 \text{ N/cm}^2$$

مجموعه جواب‌های موجود برای سطح مقطع اعضا با A_i

جدول ۶- تنش مجاز اعضاء فشاری و کششی در خرپای ۲۵ عضوی

$\sigma_{\min} \left(\frac{N}{cm^2} \right)$	گروه‌بندی	$\sigma_{\max} \left(\frac{N}{cm^2} \right)$
-۲۴۲۰۴	(۱)	۲۷۵۹۰
-۷۹۹۴	(۲)	۲۷۵۹۰
-۱۱۹۳۶	(۳)	۲۷۵۹۰
-۲۴۲۰۴	(۴)	۲۷۵۹۰
-۲۴۲۰۴	(۵)	۲۷۵۹۰
-۴۶۶۲	(۶)	۲۷۵۹۰
-۴۶۶۲	(۷)	۲۷۵۹۰
-۷۶۶۴	(۸)	۲۷۵۹۰

جدول ۷- مقایسه‌ی مطالعات پیشین برای بهینه‌سازی توپولوژی خرپا ۲۵ عضوی

اعضاء	ریچاردسون و همکاران	وو ^{۱۲} و همکاران	تحقیق حاضر
	مساحت اعضاء (cm ²)		
A ₁	۰	۰	۰
A ₂	۱۰/۸۳۹	۱۰/۸۳۹	۱۰/۸۳۹
A ₃	۲۱/۴۸۳	۲۱/۴۸۳	۲۱/۴۸۳
A ₄	۰	۰	۰
A ₅	۰	۰	۰
A ₆	۶/۵۴۲	۶/۵۴۲	۶/۵۴۲
A ₇	۱۲/۶۷۱	۱۲/۶۷۱	۱۲/۶۷۱
A ₈	۱۴/۵۸۱	۱۴/۵۸۱	۱۴/۵۸۱
وزن سازه (کیلوگرم)	۲۵۶/۶۹	۲۵۶/۶۹	۲۵۶/۶۹

پیشین (۲۵۶/۶۹ کیلوگرم) ۲/۸۵ درصد سبکتر است.

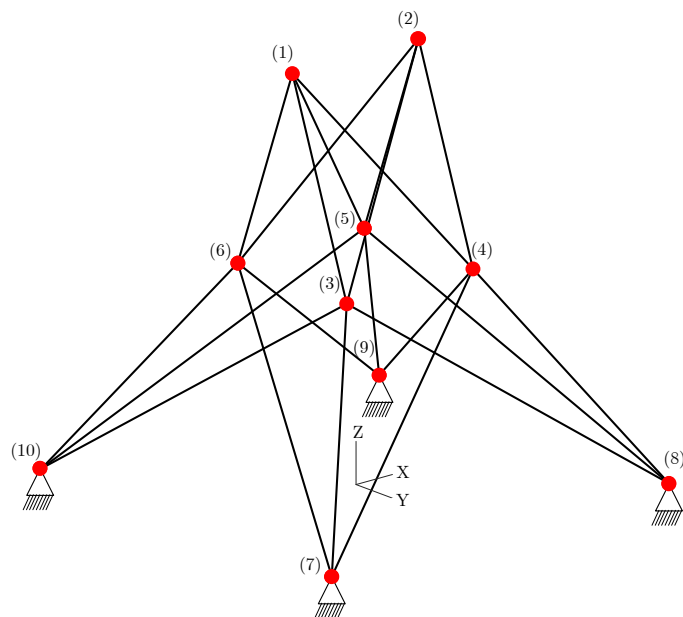
شکل (۱۱) نمایی از شکل بهینه‌سازی شده خرپای ۲۵ عضوی می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

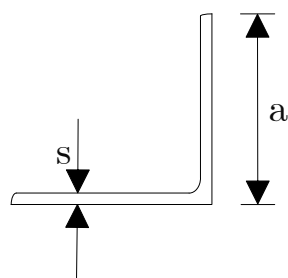
در این مقاله، روش جدیدی برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های خرپایی معرفی شد. روش ارائه شده قیود غیرخطی را به کمک مجموعه سطح مقاطع گسسته به قیود خطی صفر و یک تبدیل می‌کند. این امر کمک می‌کند که مسئله بهینه‌سازی توپولوژی خرپا به صورت برنامه ریزی خطی درآید و با روش سیمپلکس که روش قانونمند و مطمئنی است، حل شود. نتایج کلی حاصل از این تحقیق به این صورت می‌باشد.

با انتخاب مقطع نبشی لبه مساوی (شکل ۱۲) برای اعضاء خرپا از جدول اشتال، وزن سازه و اندازه مقاطع بهینه شده توسط فرمولبندی بر اساس برنامه‌ریزی خطی دودویی به شرح جدول (۸) می‌باشد.

تابع هدف (وزن سازه‌ی خرپایی) با برنامه‌ریزی خطی صفر و یک و انتخاب پروفیل نبشی لبه مساوی مناسب و با رعایت قیود برابر با ۲۴۹/۳۵ کیلوگرم است که در مقایسه با مقادیر بهینه‌ی بدست آمده از مجموعه جواب‌های موجود در مطالعات



شکل ۱۱- بهینه‌سازی توپولوژی خرپای ۲۵ عضوی



شکل ۱۲- پروفیل نبشی لبه مساوی

جدول ۸- بهینه‌سازی توپولوژی خرپای ۲۵ عضوی توسط برنامه‌ریزی خطی صفر و یک با مقطع نبشی لبه مساوی

اعضاء	سطح مقطع (سانتی متر مربع)	عرض بال (میلی متر)	ضخامت (میلی متر)
A ₁	۰	۰	۰
A ₂	۱۲/۳	۸۰	۸
A ₃	۱۹/۲	۱۰۰	۱۰
A ₄	۰	۰	۰
A ₅	۰	۰	۰
A ₆	۴/۸	۵۰	۵
A ₇	۱۱/۴	۷۵	۸
A ₈	۱۷/۱	۹۰	۱۰
وزن سازه (کیلوگرم)	۲۴۹/۳۵	-----	-----

۳- از آنجایی که یک توپولوژی بهینه برای هر خرپا تحت بارگذاری‌های مختلف حتماً وجود دارد، بنابراین بهینه‌سازی توپولوژی خرپا با استفاده از برنامه‌ریزی خطی دارای جوابی شدنی است و جواب نهایی، بهینه سراسری است.

در انتها و بعنوان یک پیشنهاد برای پیشبرد تحقیقات آتی می‌توان محدودیت پایداری کمانشی $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$ را به مسائل مربوط به بهینه‌سازی توپولوژی خرپا اضافه نمود.

۱- از آنجا که هر مسئله برنامه‌ریزی خطی یک مسئله محدب می‌باشد و جواب برنامه‌ریزی خطی (در صورت وجود) بهینه سراسری می‌باشد، بنابراین جواب‌های بدست آمده برای توپولوژی خرپاها از روش پیشنهادی بهینه سراسری است.

۲- حل مسائل محک از مطالعات پیشین نشان داد که روش ارائه شده به خوبی فرمولبندی شده است و این الگوریتم قابل اعتماد برای اینگونه مسائل است.

واژه‌نامه

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|--|
| 1. Lagrange parameters | 5. stochastic search | 9. single objective genetic algorithm (SOGA) |
| 2. slack variables | 6. kinematic stability repair | 10. improved firefly algorithm (IFA) |
| 3. mixed integer programming | 7. balance Matrix | |
| 4. branch-and-bound | 8. Hook's law | |

References

- Klein, B., "Direct Use of Extremal Principles in Solving Certain Optimizing Problems Involving Inequalities", *Journal of the Operations Research Society of America* 3, No. 2 (1955): 168-175.
- Dorn, W. S., "Automatic Design of Optimal Structures", *J. de Mecanique*, 3:25-52, 1964.
- Farrell, J. J., "On The Analysis of Structural Design", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 25(2):285-295, 1969.
- Saka, M. P., "Shape Optimization of Trusses", *Journal of the Structural Division*, 106(5):1155-1174, 1980.
- Sakamoto, J., and Oda, J., "A Technique of Optimal Layout Design for Truss Structures Using Genetic Algorithm", In *34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, page 1582, 1993.
- Ohsaki, M., and Katoh, N., "Topology Optimization of Trusses with Stress and Local Constraints on Nodal Stability and Member Intersection", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 29(3):190-197, 2005.
- Faustino, A. M., Júdice, J.J., Ribeiro, I. M., and Neves, A. S., "An Integer Programming Model for Truss Topology Optimization", *Investigação Operacional*, 26(1):111-127, 2006.
- Stolpe, M., "On The Reformulation of Topology Optimization Problems as Linear or Convex Quadratic Mixed 0-1 Programs", *Optimization and Engineering*, 8(2):163-192, 2007.
- Hajela, P., Lee, E., and Lin, C. Y., "Genetic Algorithms in Structural Topology Optimization", *Springer Netherlands*, Dordrecht, pages 117-133, 1993.
- Kaveh, A., and Kalatjari, V., "Topology Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm, Force Method and Graph Theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(5):771-791, 2003.
- Richardson, J. N., Adriaenssens, S., Bouillard, P., and Coelho, R. F., "Multi Objective Topology Optimization of Truss Structures with Kinematic Stability Repair", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46(4):513-532, 2012.
- Wu, Y., Li, Q., Hu, Q., and Borgart, A., "Size and Topology Optimization for Trusses with Discrete Design Variables by Improved Firefly Algorithm", *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 2017.
- De Klerk, E., Roos, C., and Terlaky, T., "Semi-Definite Problems in Truss Topology Optimization", Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, 1995.
- Przemieniecki, J. S., "Theory of Matrix Structural Analysis", Courier Corporation, 1985.
- Petersen, C. C., "A Note on Transforming The Product of Variables to Linear Form in Linear Programs", Diskussionspapier, Purdue University, 1971.
- Glover, F., "Improved Linear Integer Programming Formulations of Nonlinear Integer Problems", *Management Science*, 22(4):455-460, 1975.
- Glover, F., "An Improved MIP Formulation for Products of Discrete and Continuous Variables", *Journal of Information and Optimization Sciences*, 5(1):69-71, 1984.
- Aslam, K., *Structural Analysis*. Cengage Learning, 2018.

منابع

19. Rozvany, G. I., "Difficulties in Truss Topology Optimization with Stress, Local Buckling and System Stability Constraints", *Structural Optimization*, 11(3), pp.213-217. 1996.
20. Sved, G., and Ginos, Z., "Structural Optimization Under Multiple Loading", *International Journal of Mechanical Sciences*, 10(10):803–805, 1968.
21. Haftka, R. T., and Gürdal, Z., "Elements of Structural Optimization", *Springer Science & Business Media*, 2012.
22. Rao, S. S., "Engineering Optimization: theory and practice", John Wiley & Sons, 2019.