Journal of Computational Methods in Engineering, 2024, 42(2), 69-87; DOI: 10.47176/jcme.42.2.9861

JOURNAL OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING

Journal of Computational Methods in Engineering

Journal homepage: https://jcme.iut.ac.ir/

ISSN: 2228-7698 EISSN: 2423-5741

Original Article

Free vibration analysis of polymer/graphene nanoplatelet/fiber truncated conical shells embedded in an elastic foundation

Amir Hossein Yousefi[1], Hossein Amir Abadi[2] and Farhad Kiani[3]*

1 -Department of Civil Engineering, Shahinshahr Branch, Islamic Azad University, Shahinshahr, Iran.
2- Department of Mechanical Engineering, Abadeh Branch, Islamic Azad University, Abadeh, Iran.
3-Department of Mechanical Engineering, Shahinshahr Branch, Islamic Azad University, Shahinshahr, Iran.

Abstract: In this paper, a semi-analytical solution is presented for the free vibration analysis of a three-phase polymer-based truncated conical shell reinforced with Graphene NanoPlatelets (GNPs) and glass fibers, embedded in an elastic foundation. The conical shell is modeled based on the First-order Shear Deformation Theory (FSDT), and the elastic foundation is modeled using the Pasternak model. The effective mechanical properties of the three-phase polymer/GNP/fiber composite are estimated utilizing the rule of mixture, Halpin-Tsai model, and the micromechanical relations. The set of the governing equations and associated boundary conditions are derived using Hamilton's principle, and are solved analytically in the circumferential direction using trigonometric functions and numerically in the meridional direction via the Differential Quadrature Method (DQM). The natural frequencies and corresponding mode shapes are derived for various boundary conditions, including different combinations of clamped, simply supported, and free edges at both ends of the shell. Convergence of the presented numerical solution is examined, the accuracy of the presented results is confirmed, and the effects of various parameters on the natural frequencies of the shell are investigated including the circumferential wave number, semi-vertex angle of the cone, weight fraction of the fibers, weight fraction of the GNPs, and the boundary conditions.

Keywords: Free vibration; Three-phase structures; Truncated conical shell; Graphene nanoplatelet (GNPs); Pasternak foundation.

Received: Jul. 01, 2022; Revised: Jul. 01, 2022; Accepted: Nov. 13, 2022; Published Online: Feb 20, 2024.

* Corresponding Author: kiani@shaiau.ac.ir

How to Cite: Yousefi Amir Hossein, Amir Abadi Hossein and Kiani Farhad, Free vibration analysis of polymer/graphene nanoplatelet/fiber truncated conical shells embedded in an elastic foundation, Journal of Computational Methods in Engineering; 2024, 42(2), 69-87; DOI: 10.47176/jcme.42.2.9861.

نشریه علمی - پژوهشی روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی

صفحه خانگی نشریه: https://jcme.iut.ac.ir/

شاپا: ٧٦٩٨-٢٢٢٨ شاپا الکترونیکی: ٥٧٤١-٢٤٢٣

مقاله پژوهشی

تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی ناقص سه‌فازی پلیمر-نانوپلاکت‌گرافنی-الیاف مستقر بر یک بستر الاستیک

امیرحسین یوسفی[1]، حسین امیرآبادی[2] و فرهاد کیانی[3]*

۱- گروه مهندسی عمران، واحد شاهین‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهین‌شهر، ایران

۲- گروه مهندسی مکانیک، واحد آباده، دانشگاه آزاد اسلامی، آباده، ایران

۳- گروه مهندسی مکانیک، واحد شاهین‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهین‌شهر، ایران

چکیده- در این مقاله یک حل نیمه تحلیلی برای مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی سه‌فازی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی[1] و الیاف شیشه‌ای، مستقر بر یک بستر الاستیک ارائه می‌شود. پوسته‌ی مخروطی بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول[2] مدل‌سازی می‌گردد و رفتار بستر الاستیک که پوسته را احاطه کرده است بر اساس مدل پاسترناک[3] تخمین زده می‌شود. به منظور محاسبه خواص مکانیکی مؤثر ساختار سه‌فازی پلیمر-نانوپلاکت‌گرافنی-الیاف در کنار قانون اختلاط از مدل هالپین-تسای[4] و روابط میکرومکانیکی استفاده می‌شود. معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر با بهره‌گیری از اصل هامیلتون[5] استخراج می‌شوند، پس از ارائه‌ی یک حل دقیق در راستای پیرامونی پوسته با استفاده از توابع مثلثاتی مناسب، یک حل تقریبی در راستای طولی پوسته با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی[6] ارائه می‌شود. فرکانس‌های طبیعی پوسته در مودهای ارتعاشی گوناگون و شکل مودهای متناظر برای شرایط مرزی مختلف شامل ترکیبات مختلفی از لبه‌های گیردار، ساده و آزاد در دو لبه‌ی پوسته استخراج می‌شوند. پس از تأیید همگرایی حل عددی انجام شده در راستای طولی و سنجش میزان اعتبار نتایج ارائه‌شده، تأثیر مشخصات گوناگون بر روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار می‌گیرد که از آن جمله می‌توان به عدد موج پیرامونی، زاویه نیم‌رأس مخروط، کسر جرمی الیاف، کسر جرمی نانوپلاکت‌های گرافنی و شرایط مرزی در دو لبه‌ی پوسته اشاره نمود.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، ساختارهای سه‌فازی، پوسته‌ی مخروطی ناقص، نانوپلاکت‌های گرافنی، بستر پاسترناک.

دریافت مقاله: ١٤٠١/٠٤/١٠، بازنگری: ١٤٠١/٠٤/١٠، پذیرش: ١٤٠١/٠٨/٢٢، اولین انتشار: ١٤٠٢/١٢/١

*: نویسنده مسئول، رایانامه: kiani@shaiau.ac.ir

فهرست علائم

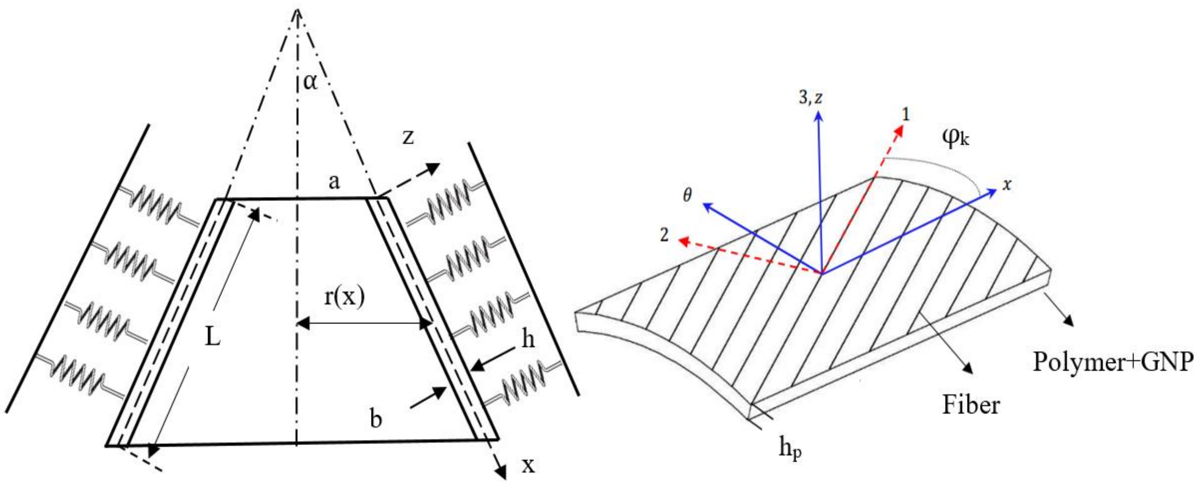
$[A]$	ماتریس ضرایب وزنی متناظر برای مشتق اول	$W_{n.c.}$	کار نیروهای خارجی ناپایستار
a	شعاع کوچک پوسته	w	جابجایی سطح میانی پوسته در راستای z
$[B]$	ماتریس ضرایب وزنی متناظر برای مشتق دوم	V	حجم پوسته
b	شعاع بزرگ پوسته	V_F	کسر حجمی الیاف
E	مدول الاستیسیته	V_M	کسر حجمی زمینه پلیمری
G	مدول برشی	V_{GNP}	کسر حجمی نانوپلاکت گرافنی
h	ضخامت پوسته	W_F	کسر جرمی الیاف
h_{GNP}	ضخامت نانوپلاکت گرافنی	W_{GNP}	کسر جرمی نانوپلاکت گرافنی
I_0 و I_2	لختی انتقالی (جرم) و لختی دورانی پوسته بر واحد سطح	w_{GNP}	پهنای نانوپلاکت گرافنی
$[K]$	ماتریس سفتی	**علائم یونانی**	
k_s	ضریب تصحیح تنش برشی	α	زاویه نیم‌رأس مخروط
k_w	ضریب الاستیک بستر	γ_{ij}	مولفه‌های برشی تانسور کرنش
k^*_w	ضریب الاستیک بستر در شکل بدون بعد	δ	عملگر تغییرات (وریشن)
k_p	ضریب برشی بستر	ε_{ij}	مولفه‌های عمودی تانسور کرنش
k^*_p	ضریب برشی بستر در شکل بدون بعد	λ	فرکانس طبیعی پوسته در شکل بدون بعد
L	طول پوسته	ν	نسبت پواسون
l_{GNP}	طول نانوپلاکت گرافنی	ρ	چگالی
$[M]$	ماتریس جرم	σ_{ij}	تانسور تنش
N	تعداد نقاط شبکه در حل به روش مربعات دیفرانسیلی	φ_x و φ_θ	چرخش حول محورهای θ و x
n	عنوان عدد موج پیرامونی	ω	فرکانس طبیعی
S	سطح پوسته	**زیرنویس‌ها و بالانویس‌ها**	
$\{s\}$	بردار جابجایی کل	b	نقاط مرزی
T	انرژی جنبشی	d	نقاط میانی
$[T]$	ماتریس شرایط مرزی	F	خواص مکانیکی الیاف
U_s	انرژی کرنشی پوسته	GM	خواص مکانیکی ساختار دو فازی پلیمر-نانوپلاکت گرافنی
U_f	انرژی پتانسیل بستر	GNP	خواص مکانیکی نانوپلاکت گرافنی
u	جابجایی سطح میانی پوسته در راستای x	M	خواص مکانیکی زمینه پلیمری
u_1، u_2 و u_3	جابجایی راستاهای x، y و z	m	ترتیب فرکانس‌های طبیعی در راستای طولی
v	جابجایی سطح میانی پوسته در راستای θ		

۱-مقدمه

مشخصه‌های مکانیکی منحصربه‌فرد نانوپلاکت‌های گرافنی مانند مدول الاستیسیته‌ی بسیار بالا (نزدیک به ۵ برابر فولاد) و چگالی بسیار پایین (در حدود آب) کاربرد این دسته از مواد را به عنوان گزینه‌ای جذاب برای تقویت سازه‌ها افزایش داده است. از دیگر مشخصه‌های نانوپلاکت‌های گرافنی می‌توان به این موارد اشاره نمود که تقویت سازه‌ها با این نوع از تقویت‌کننده‌ها به‌میزان قابل توجهی استحکام نهایی و چقرمگی شکست را افزایش می‌دهد و نرخ رشد ترک به ازای هر سیکل از بارگذاری متناوب در سازه را کاهش می‌دهد که این مشخصه منجر به بهبود رفتار سازه در مواجهه با بارگذاری دینامیکی و تحمل پدیده خستگی می‌شود [۱]. مشخصات منحصربه‌فرد یادشده برای نانوپلاکت‌های گرافنی محققین بسیاری را به انجام تحقیق در مورد تأثیر این دسته از تقویت‌کننده‌ها بر روی

مشخصات مکانیکی سازه‌ها ترغیب نموده است. با استفاده از روش اجزا محدود، تام و همکاران [۲] یک تحلیل غیرخطی برای خمش استاتیکی تیرهای ترک‌دار تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی زیر میدان حرارتی ارائه نمودند. آنها نتیجه گرفتند که توزیع نانوپلاکت‌های گرافنی در نزدیکی سطوح زیرین و بالایی تیر به میزان قابل‌توجهی خیز تیر را کاهش می‌دهد. افشاری و ادب [۳] تئوری شبه‌سه‌بعدی ورق‌ها را به‌کار گرفتند و با استفاده از روش ناویر حل‌های دقیقی را برای تحلیل‌های کمانش و ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی ارائه نمودند. آنها نتیجه گرفتند که با هدف افزایش هر چه بیشتر بار بحرانی و فرکانس‌های طبیعی ورق بهتر است که نانوپلاکت‌های گرافنی در نزدیکی سطوح زیرین و بالایی ورق توزیع شوند. مطالعه تجربی تأثیر استفاده از نانوپلاکت‌های گرافنی بر پاسخ دینامیکی ورق‌های کامپوزیتی به بارگذاری ضربه‌ای توسط الماراکبی و همکاران [٤] مورد بررسی قرار گرفت. آنها نشان دادند که بهره‌گیری از نانوپلاکت‌های گرافنی به شکل قابل‌توجهی قابلیت ورق‌های کامپوزیتی را در جذب انرژی بهبود می‌بخشد. افشاری [۵] تاثیر نانوپلاکت‌های گرافنی را بر ارتعاشات پوسته‌های مخروطی دوار بررسی نمود. او نتیجه گرفت که به منظور بهبود اثر تقویت‌کنندگی نانوپلاکت‌های گرافنی بهتر است از نانوپلاکت‌های گرافنی با سطح بزرگتر و ضخامت کمتر استفاده شود. شه و همکاران [٦] به تحلیل ارتعاشات آزاد میکروتیرهای خمیده تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی پرداختند. آنها تأثیر مشخصات هندسی تیر و کسر جرمی نانوپلاکت‌های گرافنی بر روی فرکانس‌های طبیعی میکروتیرهای خمیده را مورد بررسی قرار دادند. هووانگ و همکاران [۷] به مطالعه‌ی رفتار دینامیکی غیرخطی ورق‌های موج‌دار تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی مستقر بر بستر الاستیک پرداختند. آنها پاسخ غیرخطی ورق با تکیه‌گاه‌های ساده را زیر شرایط گوناگون ارائه نمودند. با انجام یک تحلیل سه‌بعدی، لیو و همکاران [۸] حل‌های دقیقی را برای تحلیل خمش استاتیکی و ارتعاشات آزاد پوسته‌های کروی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی ارائه نمودند. در تحلیل خمش استاتیکی، آنها دریافتند که با هدف کاهش خیز استاتیکی پوسته بهتر است نانوپلاکت‌های گرافنی در نزدیکی سطوح داخلی و خارجی پوسته توزیع شوند، اما برای کاهش شدت تنش در پوسته بهتر است کسر جرمی نانوپلاکت‌های گرافنی در نزدیکی سطح داخلی کاهش و در نزدیکی سطح بیرونی افزایش یابد. در تحلیل ارتعاشات آزاد نیز آنها نتیجه گرفتند که به منظور افزایش فرکانس‌های طبیعی، انتخاب بهترین الگوی توزیع برای نانوپلاکت‌های گرافنی به‌شدت به مود ارتعاشی بستگی دارد. ژانگ و همکاران [۹] به تحلیل ارتعاشات اجباری و به شکل خاص، پاسخ ضربه برای پنل‌های دوانحنایی[۷] تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی پرداختند. نتایج تحقیق آنها نشان داد که با تقویت پنل به کمک نانوپلاکت‌های گرافنی، انرژی وارد شده به پنل در اثر ضربه در مدت زمان کم‌تری جذب می‌شود.

هرچند مشخصات مکانیکی مطلوب نانوپلاکت‌های گرافنی منجر به بهبود قابل‌توجه رفتار مکانیکی سازه‌ها می‌شود، اما با توجه به قیمت بالای این نوع از تقویت‌کننده‌ها، استفاده از آنها تا هر مقدار دلخواه از نظر اقتصادی توجیه‌پذیر نمی‌باشد. از همین‌رو، در سال‌های اخیر برخی از محققین استفاده از ساختارهای سه‌فازی را پیشنهاد نموده‌اند که شامل زمینه پلیمری تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی و در کنار آنها الیاف شیشه‌ای یا کربنی می‌باشد. الیاف شیشه‌ای یا کربنی در مقایسه با نانوپلاکت‌های گرافنی از مشخصه‌های مکانیکی ضعیف‌تری برخوردارند، اما قیمت ارزان‌تری نیز دارند و به‌همین دلیل استفاده از دو نوع تقویت‌کننده می‌تواند گزینه‌های بیشتری را در اختیار طراح قرار دهد تا با توجه به هزینه تمام‌شده و اهداف مدنظر از طرح خود بتواند طرح مطلوبی را ارائه نماید. البته نوع دیگری از ساختارهای سه فازی نیز در سال های اخیر مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند که شامل زمینه پلیمری تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی و در کنار آنها الیاف شیشه‌ای یا کربنی می‌باشد. تحقیقاتی نسبتا گسترده بر روی رفتار مکانیکی سازه‌های ساخته شده از این مواد صورت گرفته است [۱۳-۱۰]. با توجه به به‌روز بودن موضوع، مطالعات چندانی بر روی رفتار



شکل ۱- هندسه مسأله

مکانیکی ساختارهای سه‌فازی پلیمر–نانوپلاکت‌گرافنی–الیاف انجام نشده است و تعداد محدودی پژوهش در این زمینه یافت می‌شود. رفیعی و همکاران [۱۴] به بررسی غیرخطی خمش، پساکمانش[۸] حرارتی و ارتعاشات تیرهای ساخته‌شده از ساختار سه‌فازی پلیمر–نانوپلاکت‌گرافنی–الیاف پرداختند. آنها دریافتند که افزودن نانوپلاکت‌های گرافنی منجر به کاهش خیز استاتیکی و افزایش فرکانس‌های طبیعی تیر می‌شود اما پایداری حرارتی آن را کاهش می‌دهند. کرمی‌اصل و همکاران [۱۵] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانوپوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه ساخته‌شده از ساختار سه‌فازی پلیمر–نانوپلاکت‌گرافنی–الیاف در برخی لایه‌ها و ساختار سه‌فازی پلیمر–نانولوله‌کربنی–الیاف در برخی دیگر از لایه‌ها پرداختند. آنها دریافتند که هر چه نانوپلاکت‌های گرافنی و نانولوله‌های‌کربنی[۹] در فاصله دورتری از سطح میانی نانوپوسته قرار گیرند اثر تقویت‌کنندگی بهتری از خود نشان می‌دهند و فرکانس‌های طبیعی نانوپوسته افزایش می‌یابد. تحلیل ارتعاشات آزاد و بهینه‌سازی ورق‌های کامپوزیتی ساخته‌شده از ساختار سه‌فازی پلیمر–نانوپلاکت‌گرافنی–الیاف توسط جیوون و همکاران مورد بررسی قرار گرفت [۱۶]. آنها کسر جرمی الیاف و نانوپلاکت‌های گرافنی را در لایه‌های مختلف ورق به گونه‌ای بهینه‌سازی نمودند که فرکانس اصلی ورق تا حد ممکن افزایش یابد و بیشترین تقویت‌کنندگی از سوی هر دو فاز تقویت‌کننده حاصل گردد.

بررسی‌های انجام‌شده توسط نویسندگان این مقاله نشان می‌دهد که تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی و الیاف مورد بررسی قرار نگرفته است. از همین‌رو، پژوهش پیش‌رو به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی ساخته‌شده از ساختار سه‌فازی پلیمر–نانوپلاکت‌گرافنی–الیاف در حالی که توسط یک بستر الاستیک احاطه شده اختصاص یافته است. پس از تأیید همگرایی و سنجش اعتبار نتایج بدست آمده، تأثیرات مشخصه‌های مختلفی همچون عدد موج پیرامونی، زاویه نیم‌رأس مخروطی، کسر جرمی الیاف، کسر جرمی نانوپلاکت‌های گرافنی و شرایط مرزی بر روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲- معادلات حاکم

در این بخش، ابتدا هندسه‌ی مسأله مورد بررسی تشریح می‌شود، سپس مشخصات مکانیکی مؤثر محاسبه می‌شوند و در نهایت معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد پوسته و شرایط مرزی متناظر استخراج می‌شوند. شکل (۱) یک پوسته‌ی مخروطی ناقص با شعاع کوچک a، شعاع بزرگ b، طول L، زاویه نیم‌رأس α و ضخامت h که با یک بستر الاستیک احاطه شده را نشان می‌دهد.

در صورتی که راستای الیاف در لایه‌های پوسته مقداری

مخالف صفر و نود درجه باشد، با حذف جفت‌شدگی بین کشش و برش رابطه مؤلفه‌های تانسور تنش (σ_{ij}) با تانسور کرنش (ε_{ij}) در حالت تنش صفحه‌ای ($\sigma_{zz}=0$) به شکل زیر می‌باشد ($\gamma_{ij}=\varepsilon_{ij}$) [۱۷]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{x\theta}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{\theta z}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_s\bar{Q}_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_s\bar{Q}_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \gamma_{x\theta}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{\theta z}\end{Bmatrix}, \quad (۱)$$

که در این رابطه $k_s=5/6$ به عنوان ضریب تصحیح تنش برشی شناخته می‌شود [۱۸] و

$$\begin{aligned}&\bar{Q}_{11}=Q_{11}m_k^4+2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)n_k^2m_k^2+Q_{22}n_k^4,\\ &\bar{Q}_{12}=Q_{12}\left(n_k^4+m_k^4\right)+\left(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66}\right)n_k^2m_k^2,\\ &\bar{Q}_{22}=Q_{22}m_k^4+2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)n_k^2m_k^2+Q_{11}n_k^4,\\ &\bar{Q}_{66}=\left(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66}\right)n_k^2m_k^2+Q_{66}\left(n_k^4+m_k^4\right),\\ &\bar{Q}_{44}=Q_{44}m_k^2+Q_{55}n_k^2,\quad \bar{Q}_{55}=Q_{55}m_k^2+Q_{44}n_k^2,\end{aligned} \quad (۲)$$

که در این رابطه $m_k=\cos(\varphi_k)$ و $n_k=\sin(\varphi_k)$ و

$$\begin{aligned}&Q_{11}=\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\quad Q_{22}=\frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\quad Q_{12}=\nu_{12}Q_{22},\\ &Q_{44}=G_{23}.\qquad Q_{55}=G_{13},\qquad Q_{66}=G_{12},\end{aligned} \quad (۳)$$

که E_{ij}، G_{ij} و ν_{ij} به‌ترتیب بیانگر مقادیر مؤثر مدول الاستیسیته، مدول برشی و نسبت پواسون در دستگاه مختصات ۱-۲-۳ می‌باشد (شکل ۱).

پیش از محاسبه مقادیر مؤثر مشخصات مکانیکی ساختار سه‌فازی پلیمر-نانوپلاکت گرافنی-الیاف، بهتر است ابتدا مقادیر مؤثر مشخصات مکانیکی برای ساختار دو فازی پلیمر-نانوپلاکت گرافنی محاسبه شوند و پس از آن، مقادیر این مشخصات در حضور الیاف محاسبه شوند. گفتنی است که در این بخش، زیرنویس‌ها و بالانویس‌های M، GNP و F به‌ترتیب بیانگر خواص مکانیکی در زمینه پلیمری، نانوپلاکت گرافنی و الیاف است و زیرنویس GM بیانگر خواص مکانیکی ساختار دو فازی پلیمر-نانوپلاکت گرافنی می‌باشد. ساختار دو فازی پلیمر-نانوپلاکت گرافنی یک رفتار همسانگرد از خود نشان می‌دهد و بر اساس اصل هالپین-تسای مدول الاستیسیته آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۹]:

$$E_{GM}=\left(\frac{3}{8}\frac{1+\xi_L\eta_L V_{GNP}}{1-\eta_L V_{GNP}}+\frac{5}{8}\frac{1+\xi_w\eta_w V_{GNP}}{1-\eta_w V_{GNP}}\right)E_M, \quad (۴)$$

که در این رابطه

$$\begin{aligned}&\xi_L=2\frac{l_{GNP}}{h_{GNP}},\quad \xi_w=2\frac{w_{GNP}}{h_{GNP}},\\ &\eta_L=\frac{\eta-1}{\eta+\xi_L},\quad \eta_w=\frac{\eta-1}{\eta+\xi_w},\quad \eta=\frac{E_{GNP}}{E_m},\end{aligned} \quad (۵)$$

به طوری که l_{GNP}، w_{GNP} و h_{GNP} به‌ترتیب طول، پهنا و ضخامت نانوپلاکت گرافنی هستند و V_{GNP} بیانگر کسر حجمی نانوپلاکت گرافنی در ساختار دوفازی می‌باشد که می‌توان آن را از رابطه زیر بر حسب کسر جرمی آنها (W_{GNP}) محاسبه نمود [۱۰]:

$$V_{GNP}=\frac{1}{1+\frac{\rho_{GNP}}{\rho_M}\left(\frac{1}{W_{GNP}}-1\right)}, \quad (۶)$$

کسر حجمی زمینه پلیمری نیز از رابطه بدیهی زیر قابل محاسبه است:

$$V_M=1-V_{GNP}. \quad (۷)$$

همچنین، با توجه به رفتار همسانگرد ساختار دو فازی پلیمر-نانوپلاکت گرافنی، می‌توان مدول برشی آن را از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$G_{GM}=\frac{E_{GM}}{2\left(1+\nu_{GM}\right)}. \quad (۸)$$

با استفاده از قانون اختلاط می‌توان چگالی (ρ) و نسبت پواسون را در ساختار دو فازی پلیمر-نانوپلاکت گرافنی از روابط زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned}&\rho_{GM}=\rho_{GNP}V_{GNP}+\rho_M V_M,\\ &\nu_{GM}=\nu_{GNP}V_{GNP}+\nu_M V_M,\end{aligned} \quad (۹)$$

با استفاده از روابط میکرومکانیکی، می‌توان مدول‌های الاستیسیته و برشی و هم‌چنین نسبت‌های پواسون را در ساختار سه‌فازی ناهمسانگرد پلیمر-نانوپلاکت گرافنی-الیاف از روابط زیر محاسبه نمود [۱۶]:

$$E_{11} = E_{11}^{F} V_F + E_{GM} V_{GM},$$

$$E_{22} = \left[\frac{E_{22}^{F} + E_{GM} + \left(E_{22}^{F} - E_{GM}\right) V_F}{E_{22}^{F} + E_{GM} - \left(E_{22}^{F} - E_{GM}\right) V_F} \right] E_{GM},$$

$$\nu_{12} = \nu_{12}^{F} V_F + \nu_{GM} V_{GM},$$

$$\nu_{23} = \nu_{12}^{F} V_F + \nu_{GM} V_{GM} \left(\frac{1 + \nu_{GM} + \nu_{12} \frac{E_{GM}}{E_{11}}}{1 - \nu_{GM}^{2} + \nu_{12} \nu_{GM} \frac{E_{GM}}{E_{11}}} \right), \tag{١٠}$$

$$G_{12} = G_{13} = \left[\frac{G_{12}^{F} + G_{GM} + \left(G_{12}^{F} - G_{GM}\right) V_F}{G_{12}^{F} + G_{GM} - \left(G_{12}^{F} - G_{GM}\right) V_F} \right] G_{GM},$$

$$G_{23} = \frac{E_{22}}{2\left(1 + \nu_{23}\right)}$$

که در این رابطه V_F بیانگر کسر حجمی الیاف است که به شکل زیر بر حسب کسر جرمی آنها (W_F) قابل محاسبه است [۱۰]:

$$V_F = \frac{1}{1 + \frac{\rho_F}{\rho_{GM}} \left(\frac{1}{W_F} - 1 \right)}. \tag{١١}$$

هم‌چنین V_{GNP} نشان دهنده کسر حجمی ساختار دو فازی پلیمر–نانوپلاکت گرافنی می‌باشد که از رابطه بدیهی زیر قابل محاسبه است:

$$V_{GM} = 1 - V_F. \tag{١٢}$$

در پایان می‌توان با استفاده از قانون اختلاط چگالی ساختار سه‌فازی پلیمر–نانوپلاکت گرافنی–الیاف را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\rho = \rho_F V_F + \rho_{GM} V_{GM}, \tag{١٣}$$

با توجه به روند ارائه‌شده، یادآوری این نکته ضروری به‌نظر می‌رسد که کسر جرمی الیاف به‌صورت نسبت وزن الیاف به وزن کل پوسته (ساختار سه‌فازی) تعریف می‌شود، اما کسر جرمی نانوپلاکت گرافنی به‌صورت نسبت وزن نانوپلاکت گرافنی به وزن ساختار دو فازی پلیمر–نانوپلاکت گرافنی (و نه وزن کل پوسته) تعریف شده است.

بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی در پوسته به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$\begin{aligned} u_1(x,\theta,z,t) &= u(x,\theta,t) + z\varphi_x(x,\theta,t), \\ u_2(x,\theta,z,t) &= v(x,\theta,t) + z\varphi_\theta(x,\theta,t), \\ u_3(x,\theta,z,t) &= w(x,\theta,t). \end{aligned} \tag{١٤}$$

که در این رابطه u_1، u_2 و u_3 به‌ترتیب بیانگر مؤلفه‌های جابجایی در هر نقطه دلخواه در راستاهای x، θ و z هستند و u، v و w مؤلفه‌های متناظر جابجایی را بر روی صفحه میانی پوسته ($z=0$) نشان می‌دهند. هم‌چنین φ_x و φ_θ به‌ترتیب بیانگر چرخش حول محورهای θ و x می‌باشند. برای یک پوسته مخروطی روابط کرنش–جابجایی به شکل زیر است [۲۱ و ۲۲]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x},\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{r} u_1 + \frac{\cos\alpha}{r} u_3, \\ &\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ &\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - \frac{\cos\alpha}{r} u_2,\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x}, \\ &\gamma_{x\theta} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\sin\alpha}{r} u_2, \end{aligned} \tag{١٥}$$

با جایگذاری رابطه (۱٤) در رابطه (۱۵) و $\varepsilon_{zz}=0$ می‌توان برای مؤلفه‌های کرنش در پوسته‌های کم عمق[۱۰] ($1\pm z/r\approx 1$) به روابط زیر رسید [۲۳ و ۲٤]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ &\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sin\alpha}{r} u + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos\alpha}{r} w + z\left(\frac{\sin\alpha}{r}\varphi_x + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right), \\ &\gamma_{\theta z} = -\frac{\cos\alpha}{r} v + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \varphi_\theta,\quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x, \\ &\gamma_{x\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\sin\alpha}{r} v + z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} - \frac{\sin\alpha}{r}\varphi_\theta \right), \end{aligned} \tag{١٦}$$

بر اساس اصل هامیلتون، با در نظر گرفتن δ به عنوان عملگر تغییرات و $[t_1,t_2]$ به عنوان یک بازه زمانی دلخواه، می‌توان معادلات حاکم بر ارتعاشات یک سیستم را از رابطه زیر استخراج نمود [۲۵]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T - \delta U_s - \delta U_f + \delta W_{n.c.} \right) dt = 0, \tag{١٧}$$

که در این رابطه $W_{n.c.}$ بیانگر کار نیروهای خارجی ناپایستار[۱۱] است که در تحلیل ارتعاشات آزاد کار نیروهای خارجی ناپایستار برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود و هم‌چنین T، U_s و U_f به‌ترتیب بیانگر انرژی جنبشی و انرژی کرنشی پوسته و

انرژی پتانسیل بستر هستند که از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$T=\frac{1}{2}\iiint_V \rho\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right]dV, \tag{18}$$

$$U_s=\frac{1}{2}\iiint_V\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta}+\sigma_{\theta z}\gamma_{\theta z}+\sigma_{xz}\gamma_{xz}+\sigma_{x\theta}\gamma_{x\theta}\right)dV,$$

$$U_f=\frac{1}{2}\iint_S\left\{k_w w^2+k_p\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right]\right\}dS,$$

به طوری که V و S به‌ترتیب بیانگر حجم پوسته و سطح آن هستند و k_w و k_p به‌ترتیب ضرایب الاستیک و برشی بستر را نشان می‌دهند.

با جایگذاری روابط (۱۴)، (۱۶) و (۱۸) در رابطه (۱۷) می‌توان معادلات حاکم را به شکل زیر استخراج نمود:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\sin\alpha}{r}\left(N_{xx}-N_{\theta\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta}-I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{19}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{2\sin\alpha}{r}N_{x\theta}+\frac{\cos\alpha}{r}Q_{\theta z}-I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x}+\frac{\sin\alpha}{r}Q_{xz}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta}-\frac{\cos\alpha}{r}N_{\theta\theta}-k_w w+$$

$$k_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\sin\alpha}{r}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)-I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\sin\alpha}{r}\left(M_{xx}-M_{\theta\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta}-Q_{xz}-I_2\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}+\frac{2\sin\alpha}{r}M_{x\theta}-Q_{\theta z}-I_2\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2}=0.$$

که در این روابط لختی انتقالی (جرم) و لختی دورانی پوسته بر واحد سطح به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$I_0=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho\,dz=\rho h,\quad I_2=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho z^2dz=\frac{\rho h^3}{12}, \tag{20}$$

و منتجه‌های تنش نیز به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix}N_{xx}\\N_{\theta\theta}\\N_{x\theta}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{\theta\theta}\\\sigma_{x\theta}\end{Bmatrix}dz,\quad \begin{Bmatrix}M_{xx}\\M_{\theta\theta}\\M_{x\theta}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{\theta\theta}\\\sigma_{x\theta}\end{Bmatrix}z\,dz, \tag{21}$$

$$\begin{Bmatrix}Q_{xz}\\Q_{\theta z}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\\sigma_{\theta z}\end{Bmatrix}dz.$$

منتجه‌های تنش بیان شده در رابطه (۲۱) را می‌توان با کمک روابط (۱) و (۱۶) به شکل زیر بیان نمود:

$$N_{xx}=A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{A_{12}\sin\alpha}{r}u+\frac{A_{12}}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{A_{12}\cos\alpha}{r}w+ \tag{22}$$

$$B_{11}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}+\frac{B_{12}\sin\alpha}{r}\varphi_x+\frac{B_{12}}{r}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta},$$

$$N_{\theta\theta}=A_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{A_{22}\sin\alpha}{r}u+\frac{A_{22}}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{A_{22}\cos\alpha}{r}w+$$

$$B_{12}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}+\frac{B_{22}\sin\alpha}{r}\varphi_x+\frac{B_{22}}{r}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta},$$

$$M_{xx}=B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{B_{12}\sin\alpha}{r}u+\frac{B_{12}}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{B_{12}\cos\alpha}{r}w+$$

$$D_{11}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}+\frac{D_{12}\sin\alpha}{r}\varphi_x+\frac{D_{12}}{r}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta},$$

$$M_{\theta\theta}=B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{B_{22}\sin\alpha}{r}u+\frac{B_{22}}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{B_{22}\cos\alpha}{r}w+$$

$$D_{12}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}+\frac{D_{22}\sin\alpha}{r}\varphi_x+\frac{D_{22}}{r}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta},$$

$$N_{x\theta}=\frac{A_{66}}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+A_{66}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{A_{66}\sin\alpha}{r}v+\frac{B_{66}}{r}\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta}+$$

$$B_{66}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x}-\frac{B_{66}\sin\alpha}{r}\varphi_\theta,$$

$$M_{x\theta}=\frac{B_{66}}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+B_{66}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{B_{66}\sin\alpha}{r}v+\frac{D_{66}}{r}\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta}+$$

$$D_{66}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x}-\frac{D_{66}\sin\alpha}{r}\varphi_\theta,$$

$$Q_{\theta z}=A_{44}\left(-\frac{\cos\alpha}{r}v+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\varphi_\theta\right),\ Q_{xz}=A_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi_x\right)$$

که در این رابطه

$$\begin{Bmatrix}A_{ij}\\B_{ij}\\D_{ij}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{ij}(z)\begin{Bmatrix}1\\z\\z^2\end{Bmatrix}dz,\quad i,j=1,2,6. \tag{23}$$

$$A_{44}=k_s\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{44}(z)dz,\quad A_{55}=k_s\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{55}(z)dz.$$

در این مقاله بر روی هر لبه از پوسته سه حالت مختلف را می‌توان برای شرایط مرزی در نظر گرفت که شامل حالات گیردار (C)، ساده (S) و آزاد (F) می‌باشد. در این سه حالت شرایط مرزی به شکل زیر می‌باشد:

گیردار:

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad \varphi_x=0,\quad \varphi_\theta=0. \tag{۲۴-الف}$$

ساده:

$$N_{xx}=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad M_{xx}=0,\quad \varphi_\theta=0. \tag{۲۴-ب}$$

آزاد:

$$N_{xx}=0,\quad N_{x\theta}=0,\quad Q_{xz}=0,\qquad\qquad (۲٤\text{–ج})$$
$$M_{xx}=0,\quad M_{x\theta}=0.$$

با جایگذاری رابطه (۲۲) در معادلات حاکم (۱۹) و در نظر گرفتن حل زیر [۲۱]:

$$\begin{Bmatrix} u(x,\theta,t)\\ v(x,\theta,t)\\ w(x,\theta,t)\\ \varphi_x(x,\theta,t)\\ \varphi_\theta(x,\theta,t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} U(x)\cos(n\theta)\\ V(x)\sin(n\theta)\\ W(x)\cos(n\theta)\\ X(x)\cos(n\theta)\\ \Theta(x)\sin(n\theta)\end{Bmatrix}e^{i\omega t},\quad \begin{matrix} i=\sqrt{-1}\\ n=1,2,3,\ldots\end{matrix}\qquad (۲۵)$$

که در آن ω بیانگر فرکانس طبیعی پوسته است و n به عنوان عدد موج پیرامونی[۱۲] شناخته می‌شود، می‌توان معادلات حاکم را به‌صورت کلی زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}
&A_{11}U''+\frac{A_{11}\sin\alpha}{r}U'-\frac{A_{22}\sin^2\alpha+A_{66}n^2}{r^2}U+\\
&\frac{n\left(A_{12}+A_{66}\right)}{r}V'-\frac{n\left(A_{22}+A_{66}\right)\sin\alpha}{r^2}V\\
&+\frac{A_{12}\cos\alpha}{r}W'-\frac{A_{22}\sin 2\alpha}{2r^2}W+B_{11}X''+\\
&\frac{B_{11}\sin\alpha}{r}X'-\frac{B_{22}\sin^2\alpha+B_{66}n^2}{r^2}X\\
&+\frac{n\left(B_{12}+B_{66}\right)}{r}\Theta'-\frac{n\left(B_{22}+B_{66}\right)\sin\alpha}{r^2}\Theta+I_0\omega^2U=0,
\end{aligned}\qquad (۲٦)$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{n\left(A_{12}+A_{66}\right)}{r}U'-\frac{n\left(A_{22}+A_{66}\right)\sin\alpha}{r^2}U+A_{66}V''+\\
&\frac{A_{66}\sin\alpha}{r}V'-\frac{A_{22}n^2+A_{44}\cos^2\alpha+A_{66}\sin^2\alpha}{r^2}V-\\
&\frac{n\left(A_{22}+A_{44}\right)\cos\alpha}{r^2}W-\frac{n\left(B_{12}+B_{66}\right)}{r}X'-\\
&\frac{n\left(B_{22}+B_{66}\right)\sin\alpha}{r^2}X+B_{66}\Theta''+\frac{B_{66}\sin\alpha}{r}\Theta'+\\
&\left(\frac{A_{44}\cos\alpha}{r}-\frac{B_{22}n^2+B_{66}\sin^2\alpha}{r^2}\right)\Theta+I_0\omega^2V=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{A_{12}\cos\alpha}{r}U'-\frac{A_{22}\sin 2\alpha}{2r^2}U-\frac{n\left(A_{22}+A_{44}\right)\cos\alpha}{r^2}V+\\
&\left(A_{55}+k_p\right)W''+\frac{\left(A_{55}+k_p\right)\sin\alpha}{r}W'-\\
&\left[\frac{A_{22}\cos^2\alpha+\left(A_{44}+k_p\right)n^2}{r^2}+k_w\right]W+\\
&\left(A_{55}-\frac{B_{12}\cos\alpha}{r}\right)X'+\left(\frac{A_{55}\sin\alpha}{r}-\frac{B_{22}\sin 2\alpha}{2r^2}\right)X+\\
&n\left(\frac{A_{44}}{r}-\frac{B_{22}\cos\alpha}{r^2}\right)\Theta+I_0\omega^2W=0,
\end{aligned}\qquad \text{ادامه } (۲٦)$$

$$\begin{aligned}
&B_{11}U''+\frac{B_{11}\sin\alpha}{r}U'-\frac{B_{22}\sin^2\alpha+B_{66}n^2}{r^2}U+\\
&\frac{n\left(B_{12}+B_{66}\right)}{r}V'-\frac{n\left(B_{22}+B_{66}\right)\sin\alpha}{r^2}V-\\
&\left(A_{55}-\frac{B_{12}\cos\alpha}{r}\right)W'-\frac{B_{22}\sin 2\alpha}{2r^2}W+\\
&D_{11}X''+\frac{D_{11}\sin\alpha}{r}X'-\left(A_{55}+\frac{D_{22}\sin^2\alpha+D_{66}n^2}{r^2}\right)X+\\
&\frac{n\left(D_{12}+D_{66}\right)}{r}\Theta'-\frac{n\left(D_{22}+D_{66}\right)\sin\alpha}{r^2}\Theta+I_2\omega^2X=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{n\left(B_{12}+B_{66}\right)}{r}U'-\frac{n\left(B_{22}+B_{66}\right)\sin\alpha}{r^2}U+B_{66}V''+\\
&\frac{B_{66}\sin\alpha}{r}V'+\left(\frac{A_{44}\cos\alpha}{r}-\frac{B_{22}n^2+B_{66}\sin^2\alpha}{r^2}\right)V+\\
&n\left(\frac{A_{44}}{r}-\frac{B_{22}\cos\alpha}{r^2}\right)W-\frac{n\left(D_{12}+D_{66}\right)}{r}X'-\\
&\frac{n\left(D_{22}+D_{66}\right)\sin\alpha}{r^2}X+D_{66}\Theta''+\frac{D_{66}\sin\alpha}{r}\Theta'-\\
&\left(A_{44}+\frac{D_{22}n^2+D_{66}\sin^2\alpha}{r^2}\right)\Theta+I_2\omega^2\Theta=0.
\end{aligned}$$

به‌روشی مشابه و با استفاده از روابط (۲۲)، (۲٤) و (۲۵)، شرایط مرزی به شکل زیر نوشته می‌شود:

گیردار:

$$U=0,\quad V=0,\quad W=0,\quad X=0,\quad \Theta=0,\qquad (۲۷\text{–الف})$$

ساده:

$$\begin{aligned}
&V=0,\quad W=0,\quad \Theta=0,\\
&A_{11}U'+\frac{A_{12}\sin\alpha}{r}U+B_{11}X'+\frac{B_{12}\sin\alpha}{r}X=0,\\
&B_{11}U'+\frac{B_{12}\sin\alpha}{r}U+D_{11}X'+\frac{D_{12}\sin\alpha}{r}X=0,
\end{aligned}\qquad (۲۷\text{–ب})$$

آزاد:

$$A_{11}U' + B_{11}X' + \frac{A_{12}}{r}\left(U\sin\alpha + nV + W\cos\alpha\right. \qquad \text{(۲۷-ج)}$$
$$\frac{B_{12}}{r}\left(X\sin\alpha + n\Theta\right) = 0,$$
$$A_{66}\left(-\frac{n}{r}U + V' - \frac{\sin\alpha}{r}V\right) +$$
$$B_{66}\left(-\frac{n}{r}X + \Theta' - \frac{\sin\alpha}{r}\Theta\right) = 0,$$
$$W' + X = 0,$$
$$B_{11}U' + D_{11}X' + \frac{B_{12}}{r}\left(U\sin\alpha + nV + W\cos\alpha\right) +$$
$$\frac{D_{12}}{r}X\left(\sin\alpha + n\Theta\right) = 0,$$
$$B_{66}\left(-\frac{n}{r}U + V' - \frac{\sin\alpha}{r}V\right) +$$
$$D_{66}\left(-\frac{n}{r}X + \Theta' - \frac{\sin\alpha}{r}\Theta\right) = 0.$$

۳- حل معادلات

با توجه به پیچیدگی‌های موجود در معادلات حاکم (۲۶) و شرایط مرزی (۲۷) وجود حل دقیق دست نیافتنی یا مشکل به‌نظر می‌رسد و از همین‌رو در این بخش یک حل عددی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی ارائه می‌شود.

فرض کنید مقادیر یک تابع مانند $f(x)$ در نقاط $x_1,x_2,\ldots,x_N$ به شکل زیر در قالب یک بردار ستونی در نظر گرفته شوند:

$$\{f\}_i = f\left(x_i\right), \quad i = 1,2,\ldots,N. \qquad (۲۸)$$

دو مشتق اول این تابع در نقاط مذکور را می‌توان به شکل زیر بر حسب مقادیر تابع تقریب زد [۲۶]:

$$\left\{\frac{df}{dx}\right\} = [A]\{f\}, \quad \left\{\frac{d^2f}{dx^2}\right\} = [B]\{f\}, \qquad (۲۹)$$

که در این رابطه

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq i,j}}^{N}\left(x_i - x_m\right)}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N}\left(x_j - x_m\right)}, & i,j = 1,2,3,\ldots,N; i\neq j \\ \sum\limits_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{N}\dfrac{1}{x_i - x_m}, & i = j = 1,2,3,\ldots,N \end{cases}, \quad [B] = [A]^2 \qquad (۳۰)$$

همانند سایر روش‌های عددی که بر اساس شبکه‌بندی فضای حل مسأله عمل می‌کنند، در روش مربعات دیفرانسیلی با افزایش تعداد نقاط، همگرایی نتایج حاصل می‌شود. اما اساسی‌ترین نکته در افزایش سرعت همگرایی در این روش، الگوی انتخاب شده برای توزیع نقاط می‌باشد. در حال حاضر یکی از بهترین انواع توزیع نقاط توزیع چبیشف-گاوس-لوباتو است که برای بازه‌ی $[0,L]$ به شکل زیر محاسبه می‌شود [۲۶]:

$$x_i = \frac{L}{2}\left\{1 - \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{N-1}\right]\right\}, \quad i = 1,2,3,\ldots,N. \qquad (۳۱)$$

با استفاده از رابطه (۲۹) معادلات حاکم (۲۶) را می‌توان به شکل زیر در قالب معادلات جبری بیان نمود:

$$[K]\{s\} = \omega^2[M]\{s\}, \qquad (۳۲)$$

که در این رابطه $[K]$ و $[M]$ به‌ترتیب بیانگر ماتریس‌های سختی و جرم هستند که در کنار بردار جابجایی کل $\{s\}$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\{s\}_{5N\times1} = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \\ \{W\} \\ \{X\} \\ \{\Theta\} \end{Bmatrix},$$
$$[M] = -\begin{bmatrix} I_0 I & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & I_0 I & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & I_0 I & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & I_2 I & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & I_2 I \end{bmatrix}, \qquad (۳۳)$$
$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix},$$

که در این رابطه $[0]$ و I به‌ترتیب بیانگر ماتریس صفر و ماتریس همانی از مرتبه N هستند و ماتریس‌های k_{11} تا k_{55} به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&k_{11}=A_{11}[B]+A_{11}\sin\alpha[a_1][A]-\left(A_{22}\sin^2\alpha+A_{66}n^2\right)[a_2],\\
&k_{12}=n\left(A_{12}+A_{66}\right)[a_1][A]-n\left(A_{22}+A_{66}\right)\sin\alpha[a_2],\\
&k_{13}=A_{12}\cos\alpha[a_1][A]-0.5A_{22}\sin 2\alpha[a_2],\\
&k_{14}=B_{11}[B]+B_{11}\sin\alpha[a_1][A]-\left(B_{22}\sin^2\alpha+B_{66}n^2\right)[a_2],\\
&k_{15}=n\left(B_{12}+B_{66}\right)[a_1][A]-n\left(B_{22}+B_{66}\right)\sin\alpha[a_2],\\
&k_{21}=-n\left(A_{12}+A_{66}\right)[a_1][A]-n\left(A_{22}+A_{66}\right)\sin\alpha[a_2],\\
&k_{22}=A_{66}[B]+A_{66}\sin\alpha[a_1][A]-\\
&\left(A_{22}n^2+A_{44}\cos^2\alpha+A_{66}\sin^2\alpha\right)[a_2],\qquad (٣٤)\\
&k_{23}=-n\left(A_{22}+A_{44}\right)\cos\alpha[a_2],\\
&k_{24}=-n\left(B_{12}+B_{66}\right)[a_1][A]-n\left(B_{22}+B_{66}\right)\sin\alpha[a_2],\\
&k_{25}=B_{66}[B]+B_{66}\sin\alpha[a_1][A]+\\
&A_{44}\cos\alpha[a_1]-\left(B_{22}n^2+B_{66}\sin^2\alpha\right)[a_2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&k_{31}=-A_{12}\cos\alpha[a_1][A]-0.5A_{22}\sin 2\alpha[a_2],\\
&k_{32}=-n\left(A_{22}+A_{44}\right)\cos\alpha[a_2],\\
&k_{33}=\left(A_{55}+k_p\right)\left([B]+\sin\alpha[a_1][A]\right)-\\
&\left[A_{22}\cos^2\alpha+\left(A_{44}+k_p\right)n^2\right][a_2]+k_wI,\\
&k_{34}=\left(A_{55}I-B_{12}\cos\alpha[a_1]\right)[A]+A_{55}\sin\alpha[a_1]-\\
&0.5B_{22}\sin 2\alpha[a_2],\\
&k_{35}=n\left(A_{44}[a_1]-B_{22}\cos\alpha[a_2]\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&k_{41}=B_{11}[B]+B_{11}\sin\alpha[a_1][A]-\left(B_{22}\sin^2\alpha+B_{66}n^2\right)[a_2],\\
&k_{42}=n\left(B_{12}+B_{66}\right)[a_1][A]-n\left(B_{22}+B_{66}\right)\sin\alpha[a_2],\\
&k_{43}=-A_{55}[A]+B_{12}\cos\alpha[a_1][A]-0.5B_{22}\sin 2\alpha[a_2],\\
&k_{44}=D_{11}[B]+D_{11}\sin\alpha[a_1][A]-A_{55}I-\\
&\left(D_{22}\sin^2\alpha+D_{66}n^2\right)[a_2],\\
&k_{45}=n\left(D_{12}+D_{66}\right)[a_1][A]-n\left(D_{22}+D_{66}\right)\sin\alpha[a_2],
\end{aligned}
$$

و در این رابطه نیز دو ماتریس قطری به صورت زیر هستند:

$$[a_1]_{ii}=\frac{1}{r_i},\quad [a_2]_{ii}=\frac{1}{r_i^2}. \qquad (٣٥)$$

به‌روشی مشابه و با استفاده از روابط (٢٧) و (٢٩) شرایط مرزی را می‌توان به شکل زیر و در قالب معادلات جبری بیان نمود:

$$[T]\{s\}=\{0\}, \qquad (٣٦)$$

که در این رابطه ماتریس [T] با توجه به نوع شرایط مرزی در دو انتهای پوسته تعیین می‌شود. این ماتریس در حالت کلی به شکل زیر می‌باشد:

$$[T]_{10\times 5N}=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ T_{101} & T_{102} & T_{103} & T_{104} & T_{105}\end{bmatrix}, \qquad (٣٧)$$

به طوری که، T_{11} تا T_{55} برای بیان شرایط مرزی در لبه‌ی x=0 به‌کار رفته، به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{Clamped}(C):\quad T_{11}=T_{22}=T_{33}=T_{44}=T_{55}=I_1, \qquad (٣٨)$$

$$
\begin{aligned}
&T_{12}=T_{13}=T_{14}=T_{15}=T_{21}=T_{23}=T_{24}=T_{25}=T_{31}=\\
&T_{32}=T_{34}=T_{35}=T_{41}=T_{42}=T_{43}=T_{45}=T_{51}=T_{52}=\\
&T_{53}=T_{54}=\{0\}_{1\times N},
\end{aligned}
$$

$$\text{Simply Supported}(S):\quad T_{22}=T_{33}=T_{55}=I_1,$$

$$
\begin{aligned}
&T_{12}=T_{13}=T_{15}=T_{21}=T_{23}=T_{24}=T_{25}=T_{31}=\\
&T_{32}=T_{34}=T_{35}=T_{42}=T_{43}=T_{45}=T_{51}=T_{52}=\\
&T_{53}=T_{54}=\{0\}_{1\times N},\\
&T_{11}=A_{11}A_1+\frac{A_{12}\sin\alpha}{a}I_1,\\
&T_{14}=T_{41}=B_{11}A_1+\frac{B_{12}\sin\alpha}{a}I_1,\\
&T_{44}=D_{11}A_1+\frac{D_{12}\sin\alpha}{a}I_1,
\end{aligned}
$$

$$\text{Free}(F):$$

$$
\begin{aligned}
&T_{11}=A_{11}A_1+\frac{A_{12}\sin\alpha}{a}I_1,\ T_{12}=\frac{nA_{12}}{a}I_1,\ T_{13}=\frac{A_{12}\cos\alpha}{a}I_1,\\
&T_{14}=B_{11}A_1+\frac{B_{12}\sin\alpha}{a}I_1,\quad T_{15}=\frac{nB_{12}}{a}I_1,\\
&T_{21}=-\frac{nA_{66}}{a}I_1,\ T_{22}=A_{66}A_1-\frac{A_{66}\sin\alpha}{a}I_1,\ T_{23}=\{0\}_{1\times N},\\
&T_{24}=-\frac{nB_{66}}{a}I_1,\quad T_{25}=B_{66}A_1-\frac{B_{66}\sin\alpha}{a}I_1,\\
&T_{31}=T_{32}=T_{35}=\{0\}_{1\times N},\quad T_{33}=A_1,\quad T_{34}=I_1,\\
&T_{41}=B_{11}A_1+\frac{B_{12}\sin\alpha}{a}I_1,\ T_{42}=\frac{nB_{12}}{a}I_1,\ T_{43}=\frac{B_{12}\cos\alpha}{a}I_1,\\
&T_{44}=D_{11}A_1+\frac{D_{12}\sin\alpha}{a}I_1,\quad T_{45}=\frac{nD_{12}}{a}I_1,\\
&T_{51}=-\frac{nB_{66}}{a}I_1,\ T_{52}=B_{66}A_1-\frac{B_{66}\sin\alpha}{a}I_1,\ T_{53}=\{0\}_{1\times N},\\
&T_{54}=-\frac{D_{66}n}{a}I_1,\quad T_{55}=D_{66}A_1-\frac{D_{66}\sin\alpha}{a}I_1
\end{aligned}
$$

که در این رابطه زیرنویس 1 به معنای سطر اول از هر ماتریس می‌باشد و T_{61} تا T_{105} برای بیان شرایط مرزی در لبه‌ی x=L می‌باشند و به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\text{Clamped}(\text{C}):\\
&T_{61}=T_{72}=T_{83}=T_{94}=T_{105}=I_N,\\
&T_{62}=T_{63}=T_{64}=T_{65}=T_{71}=T_{73}=\\
&T_{74}=T_{75}=T_{81}=T_{82}=T_{84}=\\
&T_{85}=T_{49}=T_{92}=T_{93}=T_{95}=T_{101}=\\
&T_{102}=T_{103}=T_{104}=\{0\}_{1\times N},\\
&\text{Simply Supported}(\text{S}):\\
&T_{72}=T_{83}=T_{105}=I_N,\\
&T_{62}=T_{63}=T_{65}=T_{71}=T_{73}=T_{74}=T_{75}=\\
&T_{81}=T_{82}=T_{84}=T_{85}=T_{92}=T_{93}=T_{95}=\\
&T_{101}=T_{102}=T_{103}=T_{104}=\{0\}_{1\times N},\\
&T_{61}=A_{11}A_N+\frac{A_{12}\sin\alpha}{b}I_N,\\
&T_{64}=T_{91}=B_{11}A_N+\frac{B_{12}\sin\alpha}{b}I_N,\\
&T_{94}=D_{11}A_N+\frac{D_{12}\sin\alpha}{b}I_N,\\
&\text{Free}(\text{F}):\\
&T_{61}=A_{11}A_N+\frac{A_{12}\sin\alpha}{b}I_N,\ T_{62}=\frac{nA_{12}}{b}I_N,\\
&T_{63}=\frac{A_{12}\cos\alpha}{b}I_N,\quad T_{64}=B_{11}A_N+\frac{B_{12}\sin\alpha}{b}I_N,\\
&T_{65}=\frac{nB_{12}}{b}I_N,\quad T_{71}=-\frac{nA_{66}}{b}I_N,\\
&T_{72}=A_{66}A_N-\frac{A_{66}\sin\alpha}{b}I_N,\ T_{73}=\{0\}_{1\times N},\\
&T_{74}=-\frac{nB_{66}}{b}I_N,\quad T_{75}=B_{66}A_N-\frac{B_{66}\sin\alpha}{b}I_N,\\
&T_{81}=T_{82}=T_{85}=\{0\}_{1\times N},\quad T_{83}=A_N,\ T_{84}=I_N,\\
&T_{91}=B_{11}A_N+\frac{B_{12}\sin\alpha}{b}I_N,\ T_{92}=\frac{nB_{12}}{b}I_N,\\
&T_{93}=\frac{B_{12}\cos\alpha}{b}I_N,\ T_{94}=D_{11}A_N+\frac{D_{12}\sin\alpha}{b}I_N,\\
&T_{45}=\frac{nD_{12}}{b}I_N,\ T_{101}=-\frac{nB_{66}}{b}I_N,\\
&T_{102}=B_{66}A_N-\frac{B_{66}\sin\alpha}{b}I_N,\ T_{103}=\{0\}_{1\times N},\\
&T_{104}=-\frac{D_{66}n}{b}I_N,\quad T_{105}=D_{66}A_N-\frac{D_{66}\sin\alpha}{b}I_N,
\end{aligned}
\tag{۳۹}
$$

که در این رابطه زیرنویس N به معنای سطر آخر از هر ماتریس می‌باشد.

به منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی پوسته کافی است معادلات جبری (۳۲) و (۳٦) به‌صورت هم‌زمان حل شوند. حل هم‌زمان این دو دستگاه معادلات جبری منجر به بیشتر شدن تعداد معادلات نسبت به تعداد مجهولات شده، ماتریس‌های موجود در مسأله مقدار ویژه نهایی از حالت مربعی خارج می‌شوند. با هدف رفع این مشکل، ابتدا نقاط حل مسئله به دو دسته نقاط مرزی (با زیرنویس b) و نقاط میانی (با زیرنویس d) تقسیم بندی شوند. با صرف‌نظر کردن از ارضای معادلات حاکم (۳۲) در نقاط مرزی می‌توان این رابطه را به شکل زیر نوشت:

$$\left[K^*\right]\{s\}=\omega^2\left[M^*\right]\{s\}, \tag{٤۰}$$

که در این رابطه بالانویس ستاره بیانگر ماتریس‌های غیرمربعی می‌باشد. با تفکیک ستون‌های ماتریس‌ها، معادلات (۳٦) و (٤۰) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left[K^*\right]_b\{s\}_b+\left[K^*\right]_d\{s\}_d=\\ \omega^2\left(\left[M^*\right]_b\{s\}_b+\left[M^*\right]_d\{s\}_d\right), \tag{٤۱-الف}$$

$$[T]_d\{s\}_d+[T]_b\{s\}_b=\{0\}, \tag{٤۱-ب}$$

با جایگذاری رابطه (٤۱-ب) در رابطه (٤۱-الف) می‌توان مسأله مقدار ویژه نهایی را به شکل زیر استخراج نمود:

$$\left[K^{**}\right]\{s\}_d=\omega^2\left[M^{**}\right]\{s\}_d, \tag{٤۲}$$

که در این رابطه

$$
\begin{aligned}
\left[K^{**}\right]&=\left[K^*\right]_d-\left[K^*\right]_b[T]_b^{-1}[T]_d,\\
\left[M^{**}\right]&=\left[M^*\right]_d-\left[M^*\right]_b[T]_b^{-1}[T]_d.
\end{aligned}
\tag{٤۳}
$$

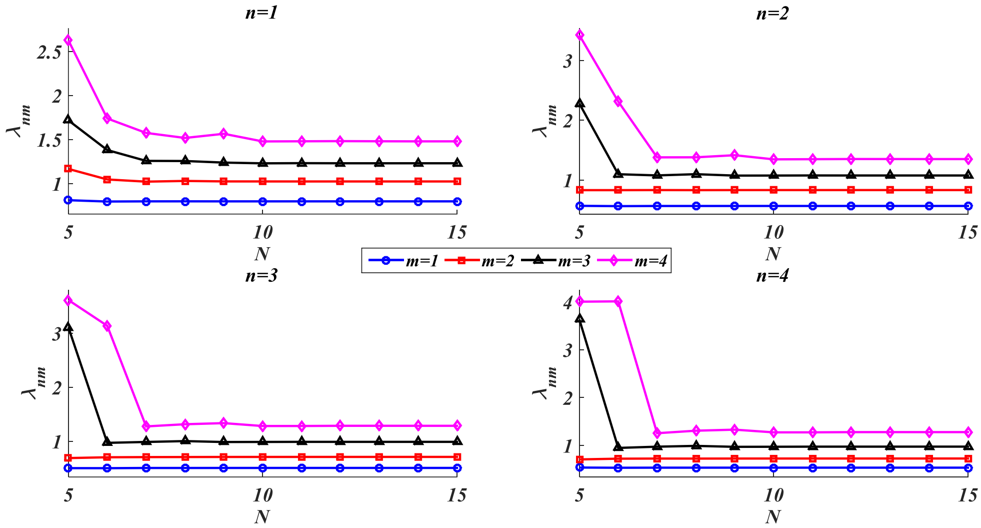
با حل مسأله مقدار ویژه (٤۳) فرکانس‌های طبیعی پوسته به عنوان مقادیر ویژه و شکل مودهای متناظر به عنوان بردارهای ویژه محاسبه می‌شوند. گفتنی است که شکل مودهای بدست آمده با استفاده از رابطه (٤۱-ب) تکمیل می‌شوند.

٤- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی برای تحلیل ارائه‌شده در بخش‌های پیشین ارائه می‌شود. با توجه به استفاده از یک روش عددی برای حل معادلات حاکم، لازم است که ابتدا همگرایی و اعتبار نتایج ارزیابی شود و سپس تأثیر مشخصات مسأله بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته مورد بررسی قرار گیرند. با هدف جامعیت بخشیدن به نتایج گزارش‌شده، نتایج عددی به شکل بدون بعد و با استفاده از تعاریف زیر برای فرکانس طبیعی و ضرایب بستر در حالت بدون بعد ارائه می‌شوند:

جدول ۱- مشخصات مکانیکی مواد [۱۰ و ۱٦]

اپوکسی	نانوپلاکت‌های گرافنی	الیاف شیشه
E_M=3 GPa ν_M=0.34 ρ_M=1200 kg/m^3	E_{GNP}=1010 GPa ν_{GNP}=0.186 ρ_{GNP}=1060 kg/m^3 l_{GNP}=2.5 µm w_{GNP}=1.5 µm h_{GNP}=1.5 nm	E^F_{11}=E^F_{22}=73.084 GPa G^F_{12}=30.130 GPa ν^F_{12}=0.22 ρ_F=2491.191 kg/m^3



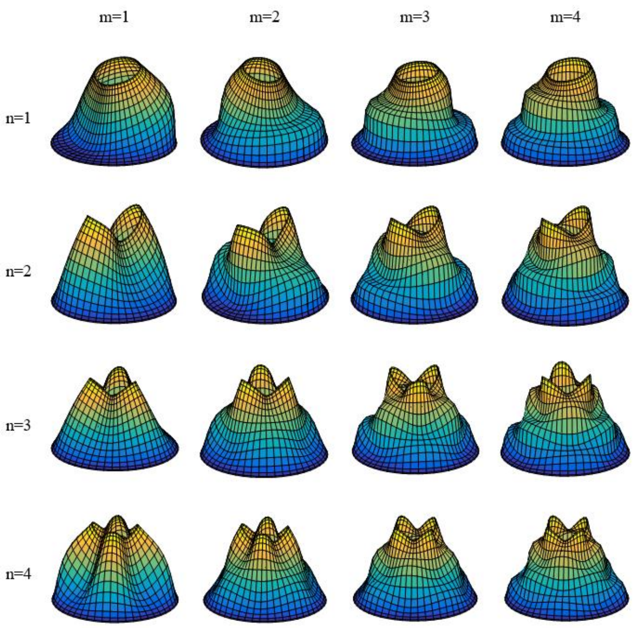
شکل ۲- تحلیل همگرایی

$$\lambda_{nm}=\omega_{nm}a\sqrt{\frac{\rho_M}{E_M}},\quad k^*_w=\frac{k_w a}{E_M},\quad k^*_p=\frac{k_p}{E_M a}. \tag{٤٤}$$

چنانکه در رابطه (٤٤) نیز نشان داده شده، فرکانس‌های طبیعی در مودهای مختلف با دو زیرنویس n و m مشخص می‌شوند، به طوری که متغیر m بیانگر ترتیب مودهای ارتعاشی در راستای طولی پوسته است و متغیر n زیر عنوان عدد موج پیرامونی شناخته می‌شود. شرایط مرزی نیز با دو حرف لاتین بزرگ نشان داده می‌شوند، به طوری که حرف اول از سمت چپ بیانگر شرایط مرزی در ابتدای پوسته (x=0) می‌باشد و حرف دوم از سمت چپ شرایط مرزی در انتهای پوسته (x=L) را نشان می‌دهد.

در تمامی مثال‌های این بخش و به جز در مواردی که صراحتا بدان اشاره گردد یک پوسته‌ی مخروطی FC با مشخصات هندسی a=1 m، L/a=3، α=45° و h/a=0.05 مستقر بر یک بستر با مشخصات k^*_w=0.01 و k^*_p=0.001 در نظر گرفته شده است. مشخصات مکانیکی سه فاز تشکیل دهنده‌ی پوسته نیز در جدول ۱ ارائه شده‌اند، کسر وزنی نانوپلاکت‌های گرافنی برابر با W_{GNP}=0.01 و کسر وزنی الیاف برابر با W_F=0.85 در نظر گرفته شده است با این توضیح که پوسته از چهار لایه‌ی مختلف با ضخامت یکسان ساخته شده است و چیدمان الیاف در این لایه‌ها به شکل [0/90°/0/90°] می‌باشد.

در شکل (۲) همگرایی تحلیل ارائه شده در مودهای مختلف ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفته است و شکل مودهای متناظر به ازای N=15 در شکل (۳) نشان داده شده است. همانگونه که



شکل ۳- شکل مودهای ارتعاش پوسته

شکل (۲) نشان می‌دهد تحلیل ارائه شده از همگرایی بسیار خوبی برخوردار است و برای مودهای مورد بررسی (n,m=1,2,3,4) می‌توان تنها با استفاده از تعداد محدودی از نقاط پاسخ‌هایی همگرا بدست آورد. در ادامه تمامی نتایج پیش رو به ازای N=11 بدست آمده‌اند.

به منظور سنجش صحت تحلیل ارائه شده دو مثال ارائه می‌شوند. به عنوان اولین مثال، یک پوسته مخروطی همگن همسانگرد را با مشخصات a=1 m، h/a=0.01، L/a=2 و α=30° ساخته شده از Si_3N_4 با مشخصات مکانیکی E=322.27 GPa، ν=0.24 و $\rho=2370\ kg/m^3$ در نظر بگیرید که بر یک بستر الاستیک مستقر شده است. برای شرایط مرزی ساده در دو انتهای پوسته (SS) و به ازای مقادیر مختلف از ضرایب الاستیک و برشی بستر، کمترین فرکانس طبیعی پوسته (m=1) به شکل بدون بعد ($\omega^*=\omega b((1-\nu^2)\rho/E)^{0.5}$) و مقدار عدد موج محیطی متناظر آن در جدول ۲ در کنار مقادیر گزارش شده توسط سوفیو و شناک [۲۷] ارائه شده‌اند. مقایسه‌ی مقادیر ارائه شده در این جدول بیانگر این مطلب است که حل عددی ارائه شده از دقت بسیار بالایی برخوردار است. لازم به ذکر است که اختلاف ناچیز موجود بین نتایج گزارش شده در این مقاله با نتایج متناظر گزارش شده در مرجع [۲۷] در آن است که در این مقاله پوسته بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مدلسازی شده است که با تئوری استفاده شده در مرجع مذکور (تئوری کلاسیک پوسته‌ها) متفاوت و البته دقیق‌تر می‌باشد.

به عنوان دومین مثال یک پوسته‌ی مخروطی CS با مشخصات a=0.5 m، α=20°، L/a=4 و h/a=0.1 ساخته شده از اپوکسی و تقویت شده با نانوپلاکت‌های گرافنی با کسر وزنی $W_{GNP}=0.01$ و ابعاد $l_{GNP}=1\ \mu m$، $w_{GNP}=0.5\ \mu m$ و $h_{GNP}=0.5\ nm$ در نظر گرفته شده است. در جدول ۳ مقادیر فرکانس‌های طبیعی بر حسب (kHz) در کنار مقادیر گزارش شده توسط افشاری [۲۱] ارائه شده‌اند. مقایسه‌ی نتایج گزارش شده در این جدول صحت و دقت بالای تحلیل ارائه شده را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که به دلیل یکسان بودن تئوری‌های استفاده شده برای مدلسازی پوسته در این مقاله و مرجع [۲۱] اختلاف بین نتایج بسیار ناچیز می‌باشد.

برای چند مورد از شرایط مرزی منتخب، شکل (٤) تأثیر عدد موج پیرامونی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، برای تمامی شرایط مرزی و مودهای طولی مختلف (m=1,2,3,4) همواره مقدار مشخصی از عدد موج پیرامونی (n)

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ($\omega^*=\omega b((1-\nu 2)\rho/E)^{0.5}$) پوسته‌ی مخروطی SS همسانگرد مستقر بر بستر پاسترناک به ازای m=1

k_w (MN/m³)	k_p (MN/m)	n	تحلیل ارائه شده تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول	سوفیو و شناک [۲۷] تئوری کلاسیک پوسته‌ها
۰	۰	۷	۰/۱۷۹۶	۰/۱۷۶۳
۵	۰	۷	۰/۱۹۴۹	۰/۱۹۱۰
	۰/۱۰	۶	۰/۲۰۲۱	۰/۱۹۷۴
	۰/۲۵	۶	۰/۲۱۰۰	۰/۲۰۴۶
	۰/۵۰	۶	۰/۲۲۲۶	۰/۲۱۶۲
۱۰	۰	۷	۰/۲۰۹۱	۰/۲۰۴۷
	۰/۱۰	۶	۰/۲۱۵۷	۰/۲۱۰۶
	۰/۲۵	۶	۰/۲۲۳۲	۰/۲۱۷۵
	۰/۵۰	۶	۰/۲۳۵۱	۰/۲۲۸۴
۵۰	۰	۷	۰/۲۹۹۵	۰/۲۹۱۸
	۰/۱۰	۶	۰/۳۰۳۷	۰/۲۹۶۰
	۰/۲۵	۶	۰/۳۰۹۰	۰/۳۰۰۹
	۰/۵۰	۶	۰/۳۱۷۷	۰/۳۰۸۹

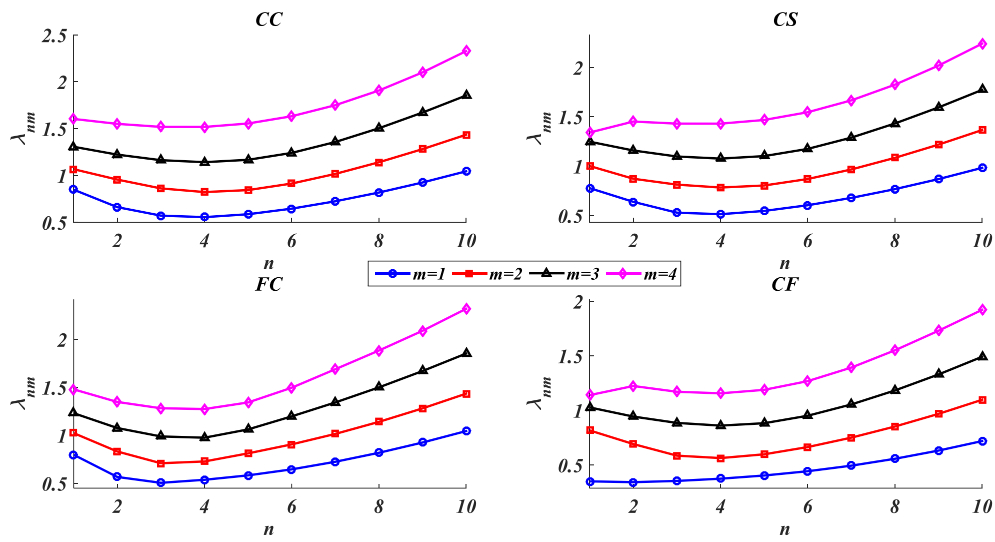
جدول ۳- فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی مخروطی پوسته‌ی مخروطی CS با مشخصات a=0.5 m، α=20°، L/a=4 و h/a=0.1 ساخته شده از اپوکسی و تقویت شده با نانوپلاکت‌های گرافنی بر حسب kHz

	n=1		n=2		n=3		n=4	
	تحلیل ارائه شده	افشاری [۲۱]	تحلیل ارائه شده	افشاری [۲۱]	تحلیل ارائه شده	افشاری [۲۱]	تحلیل ارائه شده	افشاری [۲۱]
m=1	۰/۳۱۰۵	۰/۳۱۰۵	۰/۱۸۰۷	۰/۱۸۰۷	۰/۱۵۱۷	۰/۱۵۱۸	۰/۱۸۹۹	۰/۱۹۰۱
m=2	۰/۳۸۹۲	۰/۳۸۹۲	۰/۳۶۹۴	۰/۳۶۹۴	۰/۳۱۳۶	۰/۳۱۳۷	۰/۳۲۶۰	۰/۳۲۶۴
m=3	۰/۴۹۷۰	۰/۴۹۷۱	۰/۴۹۷۴	۰/۴۹۷۵	۰/۴۵۸۷	۰/۴۵۸۹	۰/۴۶۹۳	۰/۴۶۹۹
m=4	۰/۵۶۵۷	۰/۵۶۵۷	۰/۶۲۴۶	۰/۶۲۴۸	۰/۶۰۷۸	۰/۶۰۸۲	۰/۶۲۷۷	۰/۶۲۸۵

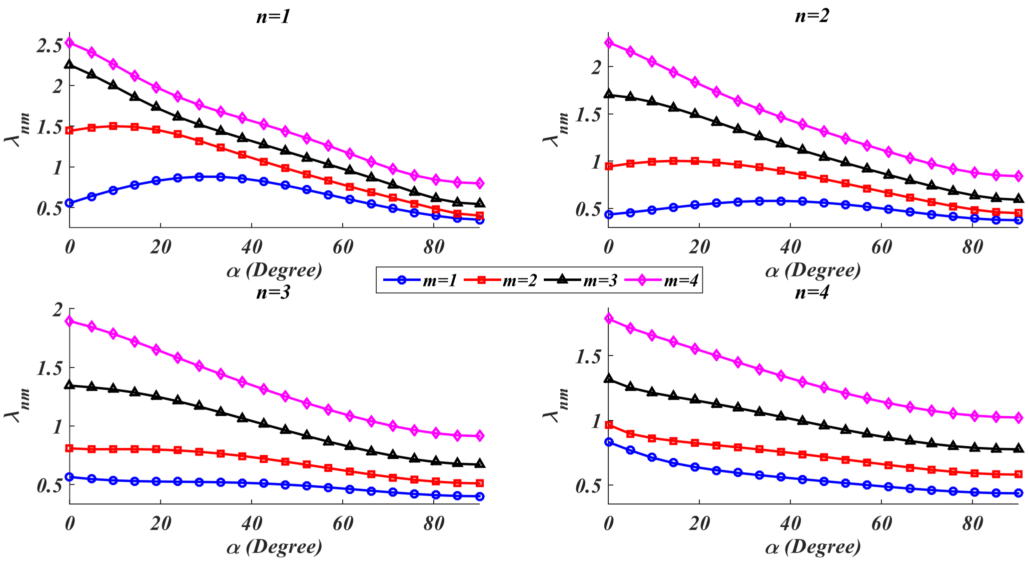
وجود دارد که به‌ازای آن مقدار فرکانس طبیعی به کمترین مقدار ممکن می‌رسد. هم‌چنین، این شکل نشان می‌دهد که هر چه میزان تقید در مرزهای پوسته بیشتر باشد (استفاده از حالت گیردار در مقایسه با حالت ساده و حالت ساده در مقایسه با حالت آزاد)، فرکانس‌های طبیعی پوسته افزایش پیدا می‌کنند و میزان تأثیر شرایط مرزی در دهانه‌ی بزرگتر پوسته (x=L) بیشتر از تأثیر شرایط مرزی در دهانه‌ی کوچکتر آن (x=0) می‌باشد.

در شکل (۵) تأثیر زاویه نیم‌رأس مخروط بر فرکانس‌های طبیعی آن مورد بررسی قرار گرفته است. با تغییر مقدار زاویه نیم‌رأس مخروط سفتی و لختی پوسته به شکل هم‌زمان تحت تأثیر قرار می‌گیرند و در نتیجه نمی‌توان روند معینی را برای تغییرات فرکانس‌های طبیعی در تمامی مودها ارائه نمود. شکل (۵) نشان می‌دهد که با افزایش مقدار زاویه نیم‌رأس مخروط و تغییرشکل پوسته از حالت پوسته استوانه‌ای ($\alpha=0$) به ورق دایروی سوراخ‌دار ($\alpha=90°$) فرکانس طبیعی در بیشتر مودهای ارتعاشی پوسته کاهش می‌یابد.

تأثیر کسر جرمی نانوپلاکت‌های گرافنی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته در شکل (۶) مورد بررسی قرار گرفته است. مطابق این

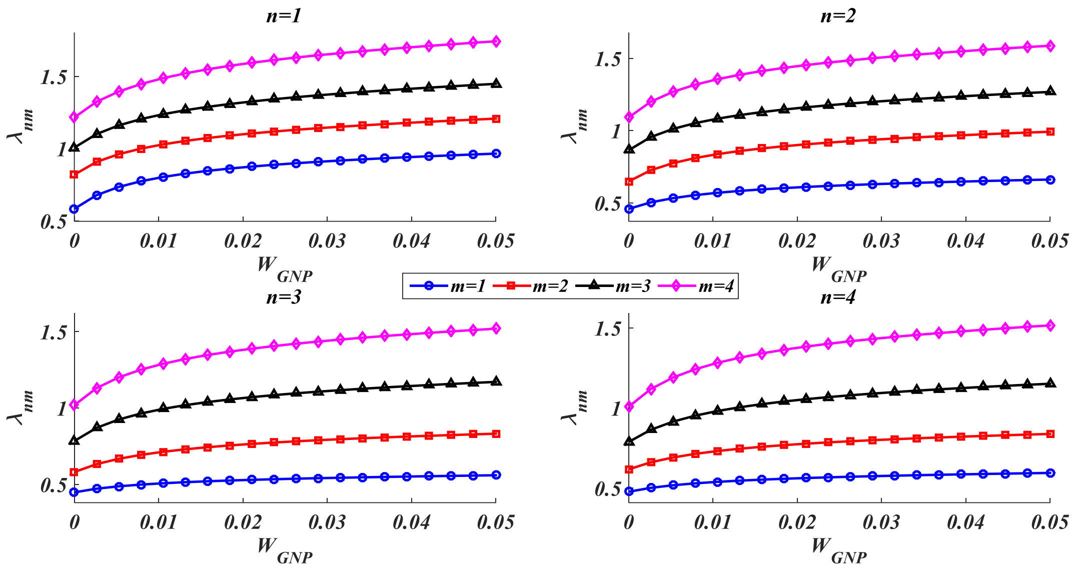


شکل ٤- تأثیر عدد موج پیرامونی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته تحت شرایط مرزی گوناگون

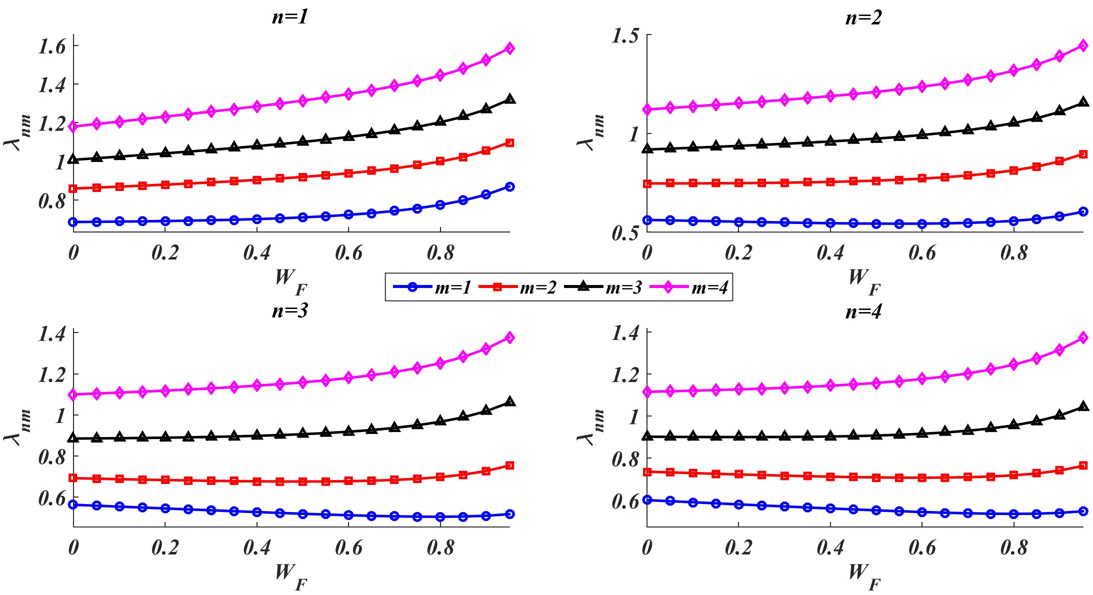


شکل ٥- تأثیر زاویه نیم‌رأس مخروط بر فرکانس‌های طبیعی آن

شکل، با افزودن مقداری ناچیز از نانوپلاکت‌های گرافنی می‌توان شاهد رشدی چشمگیر در فرکانس طبیعی در تمامی مودها بود. شکل (٦) نشان می‌دهد که با افزودن نانوپلاکت‌های گرافنی تا ٥ درصد وزنی در ساختار دوفازی پلیمر-نانوپلاکت‌های گرافنی که معادل ٠/٧٥ درصد کسر جرمی کل پوسته می‌باشد، فرکانس‌های طبیعی در مودهای مختلف از حدود ٢٥ تا ٦٥ درصد افزایش یافته‌اند. دلیل این افزایش چشم‌گیر را می‌توان بالا بودن مدول الاستیسیته و پایین بودن چگالی نانوپلاکت‌های گرافنی دانست. شکل (٦) هم‌چنین نشان می‌دهد که هر چند با افزایش کسر جرمی نانوپلاکت‌های گرافنی فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند، اما نرخ این افزایش به‌تدریج کاهش می‌یابد و همین مسأله استفاده از مقدار زیاد نانوپلاکت‌های گرافنی را با توجه به قیمت بالای آنها در مقایسه با الیاف توجیه ناپذیر می‌نماید.



شکل ٦- تأثیر کسر جرمی نانوپلاکت‌های گرافنی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته



شکل ۷- تأثیر کسر جرمی الیاف بر فرکانس‌های طبیعی پوسته

شکل (۷) به بررسی تأثیر کسر جرمی الیاف بر فرکانس‌های طبیعی پوسته اختصاص یافته است. چنانچه در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش کسر جرمی الیاف مقدار فرکانس طبیعی در بیشتر مودها افزایش و در برخی مودها کاهش می‌یابد. دلیل این رفتار متفاوت آن است که با افزایش کسر جرمی الیاف، هم‌زمان کسر جرمی زمینه پلیمری و نانوپلاکت‌های گرافنی کاهش می‌یابد که اولی نسبت به الیاف نسبت سفتی به چگالی کم‌تری دارد اما دومی نسبت به الیاف از نسبت سفتی به چگالی بالاتری برخوردار است.

۵- جمع‌بندی

در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی

تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافنی و الیاف، مستقر بر یک بستر پاسترناک مورد بررسی قرار گرفت. پوسته بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول مدل‌سازی شد و خواص مکانیکی مؤثر ساختار سه‌فازی با استفاده از قانون اختلاط، مدل هالپین–تسای و روابط میکرومکانیکی محاسبه شدند. معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر با استفاده از اصل هامیلتون استخراج و به‌صورت نیمه‌تحلیلی حل شدند. نتایج مهم بدست آمده از این پژوهش را می‌توان در زیر جمع‌بندی نمود:

- با افزایش مقدار زاویه نیم‌رأس مخروط فرکانس طبیعی در بیشتر مودهای ارتعاشی پوسته کاهش می‌یابد.
- هر چه میزان تقید در مرزهای پوسته بیشتر باشد، فرکانس‌های طبیعی پوسته افزایش پیدا می‌کنند.
- میزان تأثیر شرایط مرزی در دهانه‌ی بزرگتر پوسته (x=L) بیشتر از تأثیر شرایط مرزی در دهانه‌ی کوچکتر آن (x=0) می‌باشد.
- با افزودن مقداری ناچیز از نانوپلاکت‌های گرافنی می‌توان شاهد رشدی چشمگیر در فرکانس طبیعی در تمامی مودها بود.
- با افزایش هر چه بیشتر کسر جرمی نانوپلاکت‌های گرافنی نرخ رشد فرکانس‌های طبیعی به‌تدریج کاهش می‌یابد و به همین دلیل استفاده از مقدار زیاد نانوپلاکت‌های گرافنی با توجه به قیمت بالای آنها مقرون به صرفه نمی‌باشد.
- با افزایش کسر جرمی الیاف مقدار فرکانس طبیعی در بیشتر مودها افزایش و در برخی مودها کاهش می‌یابد.

واژه‌نامه

1. graphene nanoplatelets (GNPs)
2. the first-order shear deformation theory (FSDT)
3. Pasternak
4. Halpin-Tsai model
5. Hamilton’s principle
6. the differential quadrature method (DQM)
7. doubly-curved panels
8. post buckling
9. carbon nanotubes (CNTs)
10. shallow shells
11. non-conservative
12. circumferential wave number

مراجع

1. Rafiee, M. A., Rafiee, J., Wang, Z., Song, H., Yu, Z.Z., and Koratkar, N., “Enhanced Mechanical Properties of Nanocomposites at Low Graphene Content”, *ACS Nano*, Vol. 3(12), pp. 3884-3890, 2009.
2. Tam, M., Yang, Z., Zhao, S., Zhang, H., Zhang, Y., and Yang, J., “Nonlinear Bending of Elastically Restrained Functionally Graded Graphene Nanoplatelet Reinforced Beams with an Open Edge crack”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 156, pp. 106972, 2020.
3. Afshari, H., and Adab, N., “Size-Dependent Buckling and Vibration Analyses of GNP Reinforced Microplates Based on the Quasi-3D Sinusoidal Shear Deformation Theory”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 50(1), pp. 184-205, 2020.
4. Elmarakbi, A., Ciardiello, R., Tridello, A., Innocente, F., Martorana, B., Bertocchi, F., Cristiano, F., Elmarakbi, M., and Belingardi, G., “Effect of Graphene Nanoplatelets on the Impact Response of a Carbon Fibre Reinforced Composite”, *Materials Today Communications*, Vol. 25, pp. 101530, 2020.
5. Afshari, H., “Effect of Graphene Nanoplatelet Reinforcements on the Dynamics of Rotating Truncated Conical Shells”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 42(10), pp. 1-22, 2020.
6. She, G.L., Liu, H.B., and Karami, B., “Resonance Analysis of Composite Curved Microbeams Reinforced with Graphene Nanoplatelets”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 160, pp. 107407, 2021.
7. Hoang, V. N. V., Ninh, D.G., Van Bao, H., and Le Huy, V., “Behaviors of Dynamics and Stability Standard of Graphene Nanoplatelet Reinforced Polymer Corrugated Plates Resting on the Nonlinear Elastic Foundations”, *Composite Structures*, Vol. 260, pp. 113253, 2021.
8. Liu, D., Zhou, Y., and Zhu, J., “On the Free Vibration and Bending Analysis of Functionally Graded Nanocomposite Spherical Shells Reinforced with Graphene Nanoplatelets: Three-Dimensional Elasticity Solutions”, *Engineering Structures*, Vol. 226, pp. 111376, 2021.
9. Zhang, L., Chen, Z., Habibi, M., Ghabussi, A., and Alyousef, R., “Low-Velocity Impac, Resonance, and Frequency Responses of FG-GPLRC Viscoelastic Doubly Curved Panel”, *Composite Structures*, Vol. 269, pp. 114000, 2021.

10. Tornabene, F., Bacciocchi, M., Fantuzzi, N., and Reddy, J. N., "Multiscale Approach for Three-Phase CNT/Polymer/Fiber Laminated Nanocomposite Structures", *Polymer Composites*, Vol. 40(1) , pp. 102-126, 2019.
11. Yousefi, A.H., Memarzadeh, P., Afshari, H., and Hosseini, S. J., "Agglomeration Effects on Free Vibration Characteristics of Three-Phase CNT/Polymer/Fiber Laminated Truncated Conical Shells", *Thin-Walled Structures*, Vol. 157, pp. 107077, 2020.
12. Yousefi, A.H., Memarzadeh, P., Afshari, H., and Hosseini, S. J., "Optimization of CNT/Polymer/Fiber Laminated Truncated Conical Panels for Maximum Fundamental Frequency and Minimum Cost", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 51, pp. 3922-3944, 2023.
13. Yousefi, A.H., Memarzadeh, P., Afshari, H., and Hosseini, S.J., "Dynamic Characteristics of Truncated Conical Panels Made of FRPs Reinforced with Agglomerated CNTs", *Structures*, Vol. 33, pp. 4701-4717, 2021.
14. Rafiee, M., Nitzsche, F., and Labrosse, M., "Modeling and Mechanical Analysis of Multiscale Fiber-Reinforced Graphene Composites: Nonlinear Bending, Thermal Post-Buckling and Large Amplitude Vibration", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 103, pp. 104-112, 2018.
15. Karimiasl, M., Ebrahimi, F., and Mahesh, V., "On Nonlinear Vibration of Sandwiched Polymer-CNT/GPL-Fiber Nanocomposite Nanoshells", *Thin-Walled Structures*, Vol. 146, pp. 106431, 2020.
16. Jeawon, Y., Drosopoulos, G., Foutsitzi, G., Stavroulakis, G., and Adali, S., "Optimization and Analysis of Frequencies of Multi-scale Graphene/Fibre Reinforced Nanocomposite Laminates with Non-uniform Distributions of Reinforcements", *Engineering Structures*, Vol. 228, pp. 111525, 2021.
17. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC press; 2003.
18. Kaneko, T., "On Timoshenko's Correction for Shear in Vibrating Beams", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 8(16) , pp. 1927-1936, 1975.
19. Affdl, J.H., and Kardos, J., "The Halpin-Tsai Equations: a Review", *Polymer Engineering & Science*, Vol. 16(5) , pp. 344-352, 1976.
20. Naghdi, P., and Cooper, R., "Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Shells, Including the Effects of Transverse Shear and Rotatory Inertia", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28(1) , pp. 56-63, 1956.
21. Afshari, H., "Free Vibration Analysis of GNP-Reinforced Truncated Conical Shells with Different Boundary Conditions", *Australian Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 20, pp. 1363-1378, 2022.
22. Afshari, H., Ariaseresht, Y., Rahimian Koloor, S.S., Amirabadi, H., and Omidi Bidgoli, M., "Supersonic Flutter Behavior of a Polymeric Truncated Conical Shell Reinforced with Agglomerated CNTs", *Waves in Random and Complex Media*, 2022, https://doi.org/10.1080/17455030.2022.2082581.
23. Afshari, H., and Amirabadi, H., "Vibration Characteristics of Rotating Truncated Conical Shells Reinforced with Agglomerated Carbon Nanotubes", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 28(15-16), pp. 1894–1914, 2021.
24. Amirabadi, H., Afshari, H., Afjaei, M. A., and Sarafraz, M., "Effect of Variable Thickness on the Aeroelastic Stability Boundaries of Truncated Conical Shells", *Waves in Random and Complex Media*, 2022, https://doi.org/10.1080/17455030.2022.2157517.
25. Reddy, J. N., "Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics", John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2017.
26. Bert, C.W., and Malik, M., "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: a Review", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49(1) , pp. 1-28, 1996.
27. Sofiyev, A., and Schnack, E., "The Vibration Analysis of FGM Truncated Conical Shells Resting on Two-Parameter Elastic Foundations", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 19(4), pp. 241-249, 2012.