JOURNAL OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING

Journal of Computational Methods in Engineering

Journal homepage: https://jcme.iut.ac.ir/

ISSN: 2228-7698 EISSN: 2423-5741

**Original Article**

# A brief overview of interpolation methods

**Mohammad Najar**

Department of Civil Engineering, Isfahan (Khorasgan) Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran

**Abstract:** Interpolation and approximation are the most important parts of partial differential equation solution procedures, which significantly affect the cost and the accuracy of the results. This paper is aimed to exhaustively investigate the interpolation algorithms and trace their chronologically developments. The interpolation methods are classified based on their mathematical representation, and then surveyed separately. An abridgement of calculation steps of methods is presented and for details, the reader is referred by the main references. The usage records in applied science and engineering are included and their numerical dominance, stability and convergence rate are discussed.

**Keywords:** Numerical methods, Interpolation, Approximation, Meshless methods.

Received: Des. 25, 2023; Revised: Dec. 25, 2023; Accepted: Jan. 28, 2024; Published Online: July 22, 2024.

⁎ Corresponding Author: m.najar@khuisf.ac.ir

How to Cite: Najar Mohammad. A brief overview of interpolation methods, Journal of Computational Methods in Engineering; 2024, 43(1), 71-104; DOI: 10.47176/jcme.43.1.1021

Copyright © 2025 Isfahan University of Technology, Published by Isfahan University of Technology press. This work is licensed under a Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Non-commercial uses of the work are permitted, provided the original work is properly cited.

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۳، شماره ۱، ۱۴۰۳، ص. ۱۰۴-۷۱ DOI: 10.47176/jcme.43.1.1021

نشریه روش‌های عددی در مهندسی

صفحه خانگی نشریه: https://jcme.iut.ac.ir/

شاپا: ۷۶۹۸-۲۲۲۸ شاپا الکترونیکی: ۵۷۴۱-۲۴۲۳

مقاله پژوهشی

# مروری بر روش‌های درون‌یابی و تقریب‌سازی

**محمد نجار**

**دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اصفهان (خوراسگان)، اصفهان، ایران**

**چکیده**– در فرایند حل عددی معادلات دیفرانسیل، درون‌یابی توابع هدف حساس‌ترین بخش محاسبات است که بر سرعت و دقت محاسبات تأثیرگذار است. این مقاله با هدف نگرش جامع بر انواع الگوریتم‌های درون‌یابی و بررسی سیر تاریخی ابداع و تکامل آن‌ها به رشته تحریر در آمده است. در این تحقیق روش‌های درون‌یابی بر حسب نوع نمایش جبری آن‌ها دسته‌بندی شده‌اند و الگوریتم‌های زیر مجموعه هر دسته به طور مجزا مورد کنکاش قرار گرفته‌اند. فرایند اجرایی و نحوه انجام محاسبات هر کدام از روش‌ها به اختصار بیان شده است و خواننده جهت مطالعات مفصل و تکمیلی درباره هر کدام از روش‌ها به منابع مرتبط با آن رهنمون شده است. سابقه استفاده از هر روش در علوم کاربردی هم مورد توجه و بررسی قرار گرفته است و قدرت محاسباتی، پایداری عددی و نرخ همگرایی روش‌ها بر اساس همین سوابق کاربردی بیان شده‌اند.

**واژه‌های کلیدی:** روش‌های عددی، درون‌یابی، تقریب‌سازی، روش‌های بدون شبکه.

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۱۰/۰۴، بازنگری: ۱۴۰۲/۱۰/۰۴، پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۰۸، اولین انتشار: ۱۴۰۳/۰۵/۰۱

*: نویسنده مسئول، رایانامه: m.najar@khuisf.ac.ir

حق انتشار این مستند، متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است. ۱۴۰۳ ©

این مقاله تحت گواهی زیر منتشر شده و هر نوع استفاده غیرتجاری از آن مشروط بر استناد صحیح به مقاله و با رعایت شرایط مندرج در آدرس زیر مجاز است:

Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

## فهرست علائم

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A}$ | ماتریس مربع مورد استفاده در خانواده الگوریتم‌های حداقل مربعات خطا | $R_i(\mathbf{x})$ | تابع پایه شعاعی |
| $\mathbf{a}$ | بردار ضرایب الگوریتم درون‌یابی | $\mathbf{R}_Q$ | ماتریس گشتاور در درون‌یابی شعاعی |
| $\mathbf{a_i}$ | بردار مختصات نقطه i در نمایش پایه توانی | $u$ | تابع هدف |
| $\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_Q)$ | درایه i بردار ضرایب نظیر نقطه $\mathbf{x}_Q$ | $\bar{u}$ | بردار مقادیر گره‌ای تابع هدف |
| $\mathbf{B}$ | ماتریس مربع مورد استفاده در خانواده الگوریتم‌های حداقل مربعات خطا | $\hat{u}$ | بیان تقریبی تابع هدف |
| $B_{i,n}$ | توابع پایه مرتبه n برنشتین | $\mathbf{U}_s$ | بردار مقادیر تابع هدف در نقاط ناحیه تأثیر |
| $\mathbf{C}$ | ماتریس درون‌یاب روش‌های حداقل مربعات خطا | $V_\Omega$ | شاخص دامنه |
| $C$ | تابع اصلاح کننده | $\hat{V}(\mathbf{x})$ | تابع تقریبی کلی در روش پاره‌های واحد |
| $c$ | ضریب کنترل شکل تابع وزن | $\hat{V}_i(\mathbf{x})$ | تابع تقریبی زیرناحیه iام در روش پاره‌های واحد |
| $\bar{d}$ | متغیر فاصله | $W$ | تابع وزن |
| $d_w$ | ضریب طول ناحیه هموار | $W_i$ | تابع ترکیب غیرمنفی در روش پاره‌های واحد |
| $E$ | مجموع مربعات خطا | $\mathbf{x}$ | مختصات نقاط |
| $E_{ave}$ | میانگین مربعات خطا | $x_m$ | نصف بعد دامنه درون‌یابی |
| $f_i(\mathbf{x})$ | تابع قطعه i در روش قطعه محور | $\mathbf{x}_Q$ | نقطه محل درون‌یابی |
| $h$ | بعد ناحیه هموار | $\alpha_d$ | ضریب داخلی تابع وزن |
| $\mathbf{N}$ | ماتریس توابع شکل | $\Delta V_i$ | حجم قطعه iام |
| $N_i$ | تابع شکل iام | $\delta$ | تابع دلتای دیراک |
| $N_{i,P}$ | توابع پایه مرتبه P اسپلاین | $\xi$ | متغیر انتگرال‌گیری |
| $\mathbf{P}$ | بردار تک جمله‌های پایه درون‌یابی | $\Omega$ | ناحیه (دامنه) محاسباتی |
| $\mathbf{P}_i$ | بردار مختصات نقاط مسیر منحنی بیزیر (مختصات نقاط کنترل) | $\Omega_i$ | زیرناحیه i ام در روش پاره‌های واحد |
| $\mathbf{P}_Q$ | ماتریس گشتاور در درون‌یابی چند جمله‌ای | | |

## ۱- مقدمه

درون‌یابی[۱] و تقریب‌سازی[۲] توابع هدف، مهم‌ترین و حساس‌ترین بخش تحلیل‌های مکانیک محاسباتی است که به هنگام تحلیل بدون شبکه[۳] محیط‌های پیوسته نتایج را به شدت متأثر می‌سازد. در یک تحلیل بدون شبکه، درون‌یابی باید فقط براساس وجود نقاطی که با آرایش دلخواه در فضای محیط پیوسته پراکنده شده‌اند انجام شود و هیچ المانی برای ایجاد اتصال و پیوستگی نقاط وجود نداشته باشد. نبود المان در محیط باعث ایجاد چالش‌ها و ناملایماتی می‌شود که گاه مانع حصول نتیجه مطلوب است. به همین دلیل ابداع روش‌های قدرتمند و پرسرعت جهت درون‌یابی توابع هدف هنوز مورد توجه عمیق محققین و علاقمندان روش‌های بدون شبکه است. تحقیقات مورد نظر بر درون‌یابی بدون شبکه توابع به گونه‌ای برنامه‌ریزی می‌شوند که بتوانند تمام یا برخی از اهداف زیر که مورد اجماع عموم محققین در کاربرد روش‌های بدون شبکه است را محقق نمایند:

۱. قدرت روش باید به گونه‌ای باشد که آرایش نقاط بر دقت آن تأثیر مهمی نداشته باشد. در واقع پراکنش نقاط در محیط کاملاً دلخواه باشد و هیچ شرط و محدودیتی بر پراکنش نقاط اعمال نشود.

۲. الگوریتم باید کاملاً پایدار[۴] باشد و ناپایداری[۵] عددی در خلال محاسبات آن ایجاد نشود.

۳. باز تولید[۶] توابع حاکم بر محیط، تا مرتبه خاصی که مورد نظر

است در نتایج ایجاد شود.

٤. زیر ناحیه[٧]های محاسباتی نسبت به کل محیط مورد بحث کوچک باشند و تعداد محدودی از نقاط را شامل باشند.

٥. الگوریتمی که ارائه می‌شود از نظر اجرایی کارآمد، ساده و روان باشد و کاربرد آن آسان‌تر از روش اجزای محدود باشد.

٦. ترجیح محققین آن است که الگوریتم درون‌یاب، مقدار تابع شکل نظیر گره اصلی را برابر واحد و در گره‌های غیراصلی برابر صفر نتیجه دهد.

٧. میدان تقریبی ایجاد شده توسط توابع شکل درون‌یاب باید با فضای محیط سازگار بوده و دارای پیوستگی[٨] باشد.

در صورتی که تمامی الزامات فوق برآورده شوند، همزمان شرایط سادگی کاربرد الگوریتم بدون شبکه و دقت محاسباتی مطلوب حل عددی هم تأمین می‌شوند. تأثیر شرط اول بر سادگی کاربرد روش واضح است و نیاز به توضیح ندارد. شرط دوم که برقراری آن از مؤلفه‌های قدرت الگوریتم است همواره باید مورد توجه و رصد محققین قرار گیرد، چرا که این شرط همواره با پراکنش آزاد و بی قید و شرط نقاط در دامنه در تقابل بوده و بعضاً دچار خدشه می‌شود.

برقراری شرط سوم (سازگاری[٩] و پیوستگی) برای همگرایی نتایج در اثر کاهش فاصله نقاط الزامی است. شرط چهارم که از این به بعد شرط زیرناحیه کوچک[١٠] نامیده می‌شود منجر به ایجاد سیستم ماتریسی نواری[١١] می‌شود که از نظر محاسبات عددی بسیار کارآمد است. زیرناحیه‌های درون‌یابی توابع هدف باید تا حد امکان کوچک باشند تا کمترین عرض نوار در ماتریس‌ها ایجاد شود و حداکثر کارآمدی در محاسبات ملاحظه شود. شرط پنجم از ابداع الگوریتم‌هایی که با روش‌های گران‌قیمت و خسته‌کننده به ایجاد توابع شکل می‌پردازند جلوگیری می‌کند. چرا که الگوریتم‌های گران‌قیمت و پرزحمت با وجود آن که ممکن است دقت محاسباتی مطلوبی داشته باشند، در دسته روش‌های کاربردی قرار نمی‌گیرند. ششمین شرط بیان شده، باعث سادگی اعمال شرایط مرزی ضروری[١٢] می‌شود و باعث می‌شود که محاسبات کمتری برای برقراری آن‌ها انجام شود. باید توجه داشت که اعمال این شرط از الزامات الگوریتم‌های درون‌یابی نیست. بدیهی است که می‌توان در غیاب این شرط، مجموعه اقدامات دیگری را برای اقناع شرایط مرزی ضروری اعمال کرد که البته هزینه بیشتری را بر محاسبات تحمیل می‌کند [١].

روش‌های درون‌یابی را می‌توان به دسته‌های زیر تقسیم کرد [١]:

١.روش‌های مبتنی بر نمایش انتگرال محدود[١٣] که خود به دسته‌های زیر تفکیک می‌شوند:

١. ١. قطعات هیدرودینامیک هموار شده (SPH[١٤])

١. ٢. روش بازتولید قطعات اساسی (RKPM [١٥])

٢. روش‌های مبتنی بر نمایش دنباله محدود[١٦] در دسته‌های زیر

٢. ١.روش حداقل مربعات (LSQ[١٧])

٢. ٢.روش حداقل مربعات وزن دار (WLS[١٨])

٢. ٣. روش حداقل مربعات متحرک (MLS[١٩])

٢. ٤. روش‌های درون‌یابی نقطه‌ای (PIM[٢٠])

٢. ٤. ١. روش درون‌یابی نقطه‌ای چند جمله‌ای[٢١]

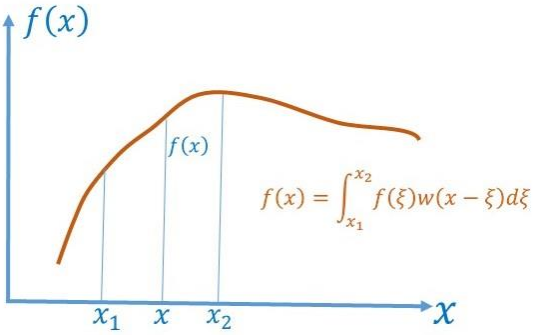
٢. ٤. ٢. روش‌های درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی[٢٢]

٢. ٥. روش‌های پاره‌های واحد (PU[٢٣])

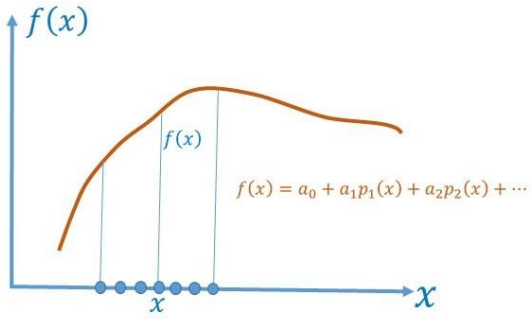
٣. روش‌های مبتنی بر نمایش پارامتری[٢٤]

شکل (١) نمای کلی از الگوریتم‌های مهم درون‌یابی را نشان می‌دهد.

گرچه روش‌های انتگرال محدود قدمت چندانی ندارند اما با معرفی الگوریتم قطعات هیدرودینامیک هموار شده (SPH) مورد اقبال محققین روش‌های تحلیل بدون شبکه قرار گرفتند. در این روش‌ها تابع هدف با استفاده از داده‌های نواحی محلی[٢٥] (با عنوان نواحی هموارشده[٢٦] یا نواحی تأثیر[٢٧]) و به کمک یک عبارت انتگرالی که صورت کلی آن در شکل (١) معرفی شده است، ساخته می‌شود. شرایط سازگاری (قدرت باز تولید توابع هدف با مرتبه پایین‌تر از توابع تقریبی) با انتخاب مناسب توابع وزن[٢٨] برقرار می‌شوند.




الف- نمایش انتگرال محدود




ب- نمایش سری محدود

**شکل ۱- دسته‌بندی کلی الگوریتم‌های درون‌یابی**

روش‌های مبتنی بر دنباله‌های محدود قدمت بسیار زیادی دارند. این روش‌ها در الگوریتم اجزای محدود[۲۹] با قدرت به کار گرفته شدند و در الگوریتم‌های بدون شبکه هم کاربرد وسیعی یافته‌اند. سازگاری این روش‌ها به توابع پایه‌ای[۳۰] آن‌ها بستگی دارد. جملات توابع پایه در این روش‌ها در بسیاری موارد بر دقت نتایج محاسبات تحلیلی تأثیرگذار هستند.

روش‌های مبتنی بر تفاضل محدود[۳۱] هم قدمت بالایی دارند و بر اساس تئوری سری تیلور[۳۲] بیان شده‌اند. این روش‌ها معمولا برای تحلیل سیستم‌ها با استفاده از صورت قوی[۳۳] معادلات تعادل حاکم بر آن‌ها به کار گرفته می‌شوند. در چنین روش‌هایی معمولا تعریف توابع شکل[۳۴] مرسوم نیست.

## ۲- روش‌های مبتنی بر نمایش انتگرال محدود

### ۲-۱- روش قطعات هیدرودینامیک هموار شده (SPH)

#### ۲-۱-۱- ایده اصلی الگوریتم

روش قطعات هیدرودینامیک هموار شده از دسته روش‌های بدون شبکه است و به عنوان قدیمی‌ترین روش بدون شبکه قطعه‌ای شناخته می‌شود [۲]. محققین با هدف ایجاد یک روش آسان که دقت مناسبی هم داشته باشد به ابداع آن پرداختند. این روش ابتدا برای حل مسائل فیزیک ستارگان در فضای باز سه بعدی به کار گرفته شد [۳، ٤ و ٥]. پس از استفاده از روش، سازندگان، آن را روشی پرقدرت معرفی کردند که در شرایط پیچیده و دشوار نتایج موجه و معقول ارائه می‌کند و بدون مشکلات قابل توجهی می‌توان آن را برای مسائل پیچیده فیزیک هم به کار برد [٥]. از آنجا که حرکت کلی اجرام آسمانی مشابه حرکت اجرام در مایعات و گازها است بعداً از این روش برای مطالعه آن‌ها استفاده شد.

روش قطعات هیدرودینامیک هموار شده، محیط مورد مطالعه را به صورت مجموعه‌ای از قطعات (نقاط) مادی که در یک محدوده مکانی خاص بر هم تأثیرگذار هستند مدل‌سازی می‌کند. محدوده‌ای که قطعات مادی بر هم اثرگذاری دارند از این پس ناحیه تأثیر نامیده می‌شود و حدود آن توسط یک تابع ریاضی به نام تابع وزن یا تابع هموار کنترل می‌شود [٦ و ٧]. تقریب‌سازی توابع هدف بر اساس همین قطعات گسسته بیان می‌شود و روش‌های مختلفی برای درون‌یابی بر اساس این قطعات ابداع شده است [٢].

براساس آنچه بیان شد، روش قطعات هیدرودینامیک هموار شده برای تحلیل محیط‌های دارای طبیعت گسسته بسیار مناسب است و از آنجا که از نوع روش‌های بدون شبکه خالص است، تحلیل محیط‌های سه بعدی به سادگی توسط آن انجام می‌شود. قلب روش از یک الگوریتم درون‌یاب مبتنی بر نمایش انتگرالی و با اقتباس از خصوصیات تابع دلتای دیراک[۳۵] تشکیل شده است [۱ و ۸]. تابع $u = u(\mathbf{x})$ که در آن $\mathbf{x}$ بردار مختصات نقاط

به صورت $\mathbf{x}=\{x,y,z\}$ است را در نظر بگیرید. با استفاده از ویژگی‌های تابع دلتای دیراک نمایش انتگرالی زیر برای این تابع قابل بیان است:

$$u(\mathbf{x})=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi)\delta(\mathbf{x}-\xi)d\xi \qquad (۱)$$

در این رابطه $\delta(\mathbf{x})$ تابع دلتای دیراک است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(\mathbf{x}-\xi)=\begin{cases}0 & \mathbf{x}-\xi\neq 0\\ 1 & \mathbf{x}-\xi=0\end{cases} \qquad (۲)$$

باید توجه داشت که اگرچه نمایش انتگرالی فوق کاملاً دقیق است اما کاربرد آن در فرایندهای تحلیل عددی دشوار یا غیرممکن است. به منظور فراهم کردن امکان استفاده عملی از این رابطه، انتگرال نامحدود فوق با انتگرال محدود زیر جایگزین می‌شود [۳، ٤ و ۸]:

$$u^h(\mathbf{x})=\int_\Omega u(\xi)w(\mathbf{x}-\xi,h)d\xi \qquad (۳)$$

در این رابطه $u^h(\mathbf{x})$ تابع تقریبی نظیر $u(\mathbf{x})$ است و $w(\mathbf{x}-\xi,h)$ تابعی است که با نام‌های تابع اساسی یا تابع وزن یا تابع هموار[۳۶] شناخته می‌شود و h هم طول ناحیه هموار است که ابعاد ناحیه‌ای که درون‌یابی در محدوده آن انجام می‌شود را مشخص می‌کند. حتی در شرایطی که تابع وزن $w(\mathbf{x}-\xi,h)$ تابع دلتای دیراک نباشد، مگر در مواردی خاص، رابطه (۳) نمایش تقریبی رابطه انتگرالی نامحدود (۲) در ناحیه تأثیر است.

برعکس نمایش تفاضل (دیفرانسیل) محدود توابع، روش فوق را روش انتگرال محدود توابع نام‌گذاری می‌کنیم. در حالت کلی نمایش انتگرال محدود، تقریب اساسی توابع هم نامیده می‌شود. تقریب اساسی هنگامی موجود و همگراست که تابع وزن واجد شرایط ذکر شده در بخش ۲-۱-۲ باشد [۱ و ۸].

### ۲-۱-۲-خصوصیات تابع وزن

۱. تابع وزن باید در تمامی نقاط ناحیه تأثیر $(\Omega)$ مثبت باشد یعنی:

$$\forall P_{(\xi)}\in\Omega:\quad w(\mathbf{x}-\xi,h)>0 \qquad (٤)$$

در این رابطه P یک نقطه از محیط با مختصات $\xi$ است. اگر چه خاصیت مثبت بودن جزء الزامات ریاضی الگوریتم نیست، اما برای برآورد معنی‌دار برخی پارامترهای فیزیکی که ذاتاً مثبت هستند (مانند چگالی) اهمیت دارد و بنابراین کاربرد آن ضروری است. البته در برخی نسخه‌های الگوریتم مانند روش بازتولید قطعات اساسی (RKPM) که در فصل آتی به بررسی آن خواهیم پرداخت، این قاعده رعایت نشده است و درجات بالاتری از سازگاری هم توسط آن‌ها ایجاد شده است [۹].

۲. برای تضمین محلی بودن فرایند درون‌یابی، شرط فشردگی (تراکم) توسط تابع وزن اعمال می‌شود. این شرط با تخصیص مقادیر صفر به تابع وزن در نقاط خارج از ناحیه تأثیر محقق می‌شود:

$$\forall P_{(\xi)}\notin\Omega:\quad w(\mathbf{x}-\xi,h)=0 \qquad (۵)$$

با انجام این کار، مقدار تابع تقریبی $u^h(\mathbf{x})$ فقط به مقادیر تابع u در نقاط واقع در ناحیه هموار که تابع وزن در محل آن‌ها غیر صفر است بستگی خواهد داشت.

۳- شرط دیگری که معمولاً در تعیین تابع وزن لحاظ می‌شود، شرط واحد بودن است:

$$\int_\Omega w(\mathbf{x}-\xi,h)d\xi=1 \qquad (٦)$$

این شرط، پیوستگی مرتبه صفر تقریب انتگرالی تابع هدف را تضمین می‌کند. اما لزوماً باعث وجود این پیوستگی در تقریب‌سازی گسسته نمی‌شود.

٤- شرط اکیداً نزولی بودن تابع وزن از دیگر شروطی است که اگرچه جزء الزامات فنی و ریاضی درون‌یابی نیست اما با توجه به کاهش اثرگذاری قطعات (نقاط) با افزایش فاصله آن‌ها یک الزام منطقی است و در بسیاری از الگوریتم‌های درون‌یابی در نظر گرفته می‌شود.

۵- در صورتی که طول ناحیه هموار به صفر میل کند مقدار تابع وزن هم باید به مقدار دلتای دیراک میل کند:

$$(h\to 0)\Rightarrow\left(w(s,h)\to\delta(s)\right) \qquad (۷)$$

شرط اخیر را می‌توان یک شرط اضافی دانست که در صورت برقراری شرایط قبلی خود به خود برقرار می‌شود. بدیهی است که در یک مسئله عملی، طول ناحیه هموار هرگز برابر صفر نخواهد بود، اما برقراری این شرط به وضوح متذکر این موضوع است که عبارت انتگرالی رابطه (۱) به مقدار دقیق خود همگرا می‌شود.

در حالت کلی برای تعیین تابع وزن مناسب برای روش‌های درون‌یابی انتگرال محدود، شرایط دوم و سوم (یعنی محلی و واحد بودن) به عنوان حداقل معیارهای لازم در نظر گرفته می‌شوند.

### ۲-۱-۳- صورت عملیاتی الگوریتم

برای کاربرد در تحلیل‌های عددی، پس از انتخاب تابع وزن مناسب، درون‌یاب انتگرال محدود (۳) با درون‌یاب جمعی زیر جایگزین می‌شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)u_i\Delta V_i \qquad (۸)$$

در این رابطه $n$ تعداد قطعات (نقاط) ناحیه هموار و $\Delta V_i$ حجم قطعه $i$ام است.

رابطه (۸) را می‌توان با عبارت زیر که دربرگیرنده مفهوم توابع شکل است، شبیه دانست:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\mathbf{x})u_i \qquad (۹)$$

در این صورت توابع شکل الگوریتم درون‌یابی قطعات هیدرودینامیک هموار به صورت زیر خواهند بود:

$$N_i(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\Delta V_i \qquad (۱۰)$$

با فرض این که نقاط (قطعات) به صورت یکنواخت در ناحیه تأثیر پراکنده شده باشند، مطابق رابطه (۱۰)، توابع شکل فقط به تابع وزن بستگی دارند. بنابراین رفتار توابع شکل به شدت متأثر از تابع وزن انتخابی است. با توجه به این که انتخاب تابع وزنی که شرایط پنج‌گانه بحث شده در قبل را داشته باشد و همزمان مانند توابع شکل روش اجزای محدود خصوصیات دلتای کرونیکر[۳۷] را هم داشته باشد دشوار است، توابع شکل روش اخیر فاقد خصوصیات دلتای کرونیکر هستند.

### ۲-۱-٤-انتخاب توابع وزن

در حالت کلی، توابع وزن نقش بسیار مهمی در همگرایی و دقت روش‌های بدون شبکه دارند. این مطلب با کاربرد گونه‌های مختلفی از توابع وزن در محاسبات و بررسی نتایج تقریب‌سازی حاصل از آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است و نشان داده شده است که انتخاب مناسب توابع وزن بر پایداری و دقت الگوریتم تأثیرگذار است [۱۰-۱۲]. در مطالعه [۱۳] هم نوعی ناپایداری در محاسبات انجام شده گزارش شده است و علت آن به عملکرد توابع هموار (وزن) ارتباط داده شده است. در تحقیق [١٤] پس از انجام مطالعات لازم، معیارها و مشخصات تابع وزن مناسب ارائه شده است. با توجه به اهمیت توابع وزن، محققین با امید ارتقاء سطح همگرایی، پایداری و دقت الگوریتم انواع مختلفی از توابع وزن را در مطالعات خود آزموده‌اند. این توابع با توجه به خصوصیات پنج‌گانه‌ای که در بخش ۲-۱-۲ بیان شد ساخته می‌شوند و اغلب دارای نمودار زنگوله‌ای[۳۸] شکل هستند.

در تحقیق [۳] که به عنوان نخستین مرجع روش قطعات هیدرودینامیک هموار معرفی شد از تابع وزن زیر استفاده شده است:

$$w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = w(\bar{d}) = \begin{cases} \alpha_d\left(1+3\bar{d}\right)\left(1-\bar{d}\right)^3 & \bar{d}\le 1 \\ 0 & \bar{d}>1 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

در این رابطه $\alpha_d$ ضریبی است که وظیفه برقراری شرایط بیان شده در فصل (۲-۱-۲) را دارد. در مطالعه مذکور برای مسائل تک‌بعدی مقدار این ضریب برابر $\frac{5}{4h}$، در حالت دو بعدی برابر $\frac{5}{\pi h^2}$ و در حالت سه بعدی برابر $\frac{105}{16\pi h^3}$ انتخاب شده است. در این روابط $h$ بعد ناحیه هموار است.

محققین مطالعه [٤] هم از تابع نمایی زیر در محاسبات خود استفاده کرده‌اند:

$$w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = w(\bar{d}) = \alpha_d e^{-\bar{d}^2} \qquad (۱۲)$$

مقدار $\alpha_d$ برای کاربرد در عبارت فوق در حالت مسائل تک‌بعدی برابر $\frac{1}{\sqrt{\pi}h}$، در حالت دو بعدی برابر $\frac{1}{\pi h^2}$ و در حالت سه بعدی برابر $\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}h^3}$ در نظر گرفته‌شده است.

در روابط (۱۱) و (۱۲) پارامتر $\bar{d}$ فاصله نسبی دو نقطه است که می‌تواند برابر عبارت حاصل رابطه زیر باشد:

$$\bar{d} = \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|}{d_w} = \frac{d}{d_w} \qquad (۱۳)$$

در الگوریتم قطعات هموار هیدرودینامیک، $d_w$ به طول ناحیه هموار بستگی دارد و مضربی از آن در نظر گرفته می‌شود. دو تحقیق فوق مقدار این کمیت را دقیقاً برابر طول ناحیه تأثیر فرض کرده‌اند.

تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم[۳۹] که اولین بار در تحقیق [۱۵] معرفی شد، مورد اقبال محققین بعدی قرار گرفته است. در این تابع وزن هم از همان مفهوم فاصله نسبی نقاط که توسط رابطه (۱۳) بیان شد به صورت زیر استفاده شده است:

$$w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = w(\bar{d}) = \alpha_d \times \begin{cases} \frac{2}{3} - \bar{d}^2 + \frac{1}{2}\bar{d}^3 & 0 \le \bar{d} < 1 \\ \frac{1}{6}(2-\bar{d})^3 & 1 \le \bar{d} < 2 \\ 0 & \bar{d} \ge 2 \end{cases} \qquad (۱۴)$$

در این رابطه $\alpha_d$ در مسائل تک‌بعدی با مقدار $\frac{1}{h}$ ، در مسائل دوبعدی با مقدار $\frac{15}{7\pi h^2}$ و در مسائل سه‌بعدی با مقدار $\frac{3}{2\pi h^3}$ جایگزین می‌شود. اگرچه تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم، محبوب‌ترین و رایج‌ترین تابع وزن در مقالات منتشر شده در حیطه قطعات هیدرودینامیک هموار است، اما از آنجا که مشتق مرتبه دوم آن یک تابع چند خطی است، می‌تواند اثرات نامطلوبی بر پایداری و همگرایی الگوریتم داشته باشد.

در منابع [۱۰ و ۱۶]، توابع اسپلاین مراتب بالاتر چهارم و پنجم ارائه شده‌اند تا آثار سوء تابع (۱۴) را برطرف کنند. در این منابع، تابع وزن اسپلاین مرتبه چهارم به صورت زیر داده شده است:

$$w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = w(\bar{d}) = \alpha_d \times \begin{cases} (\bar{d}+2.5)^4 - 5(\bar{d}+1.5)^4 + 10(\bar{d}+0.5)^4 & 0 \le \bar{d} < 0.5 \\ (2.5-\bar{d})^4 - 5(1.5-\bar{d})^4 & 0.5 \le \bar{d} < 1.5 \\ (2.5-\bar{d})^4 & 1.5 \le \bar{d} < 2.5 \\ 0 & \bar{d} \ge 2.5 \end{cases} \qquad (۱۵)$$

مقدار ضریب $\alpha_d$ در عبارت فوق برای مسائل تک بعدی برابر $\frac{1}{24h}$ داده شده است.

تابع وزن اسپلاین مرتبه پنجم هم عبارت است از:

$$w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = w(\bar{d}) = \alpha_d \times \begin{cases} (3-\bar{d})^5 - 6(2-\bar{d})^5 + 15(1-\bar{d})^5 & 0 \le \bar{d} < 1 \\ (3-\bar{d})^5 - 6(2-\bar{d})^5 & 1 \le \bar{d} < 2 \\ (3-\bar{d})^5 & 2 \le \bar{d} < 3 \\ 0 & \bar{d} \ge 3 \end{cases} \qquad (۱۶)$$

بعضی محققین هم توابع قبلی را ترکیب کرده و توابع وزن جدیدی را ایجاد کرده‌اند. نمونه این عملکرد در تحقیق [۱۵] ملاحظه می‌شود که تابع وزن زیر را ارائه کرده است:

$$w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = w(\bar{d}) = \alpha_d \left(\frac{3}{2} - \bar{d}^2\right) e^{-\bar{d}^2} \qquad (۱۷)$$

مقدار ضریب $\alpha_d$ در عبارت فوق برای مسائل تک‌بعدی برابر $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ پیشنهاد شده است.

یکی از مهم‌ترین اشکالات این‌گونه توابع حصول مقادیر منفی برای آن‌ها در بعضی نقاط است. همان‌طور که قبلاً بیان شد این ویژگی می‌تواند با مفاهیم و طبیعت ذاتی کمیت‌های فیزیکی در تضاد باشد.

توابع وزن دیگری هم در منابع پیشنهاد شده‌اند که کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرند و از ذکر آنها صرف‌نظر می‌شود.

### ۲-۲- روش بازتولید قطعات اساسی (RKPM)

روش قطعات هیدرودینامیک هموار که طی فصل قبل به آن پرداخته شد، در غیاب شرایط مرزی بسیار مؤثر بوده و دارای دقت مطلوب است. به همین دلیل این روش برای محیط‌های نامحدود بسیار کارآمد است [۱۷]. اما برای محیط‌های محدود که با حضور شرایط مرزی، مجهولات مسئله دچار کاهش می‌شوند، دقت به طور چشمگیری کاهش یافته و قابل رقابت با روش اجزای محدود نخواهد بود [۱۸]. به همین دلیل محققین، مطالعاتی را برای اصلاح فرایند محاسباتی روش آغاز کردند

[۱۹]. پاره‌ای از اصلاحات انجام شده بر بخش درون‌یاب الگوریتم متمرکز شدند.

همزمان با تمرکز دانشمندان بر اصلاح الگوریتم قطعات هیدرودینامیک هموار شده، علوم پردازش سیگنال و نتایج حاصل از تحقیقات آن‌ها که سابقه طولانی داشتند، گستره‌ای از ریاضیات تا مهندسی برق و فیزیک تا تئوری ارتعاشات را تحت تأثیر خود قرار داد [۲۰] و تحلیل‌های حوزه فرکانس را در علوم مختلف وارد کرد. تمرکز بر حوزه فرکانس نهایتاً به تئوری موجک‌ها[۴۰] منجر شد. اولین تحلیل مبتنی بر تئوری موجک‌ها در تحقیق [۲۱] به زبان آلمانی برای محیط‌های محدود گزارش شد. پس از آن تئوری موجک‌ها به عنوان رکن اساسی در مطالعات بعدی به کار گرفته شد و مراحل توسعه را طی کرد.

انعطاف‌پذیری موجک‌ها و قابلیت تطبیق آن با مسائل مختلف باعث جذابیت کاربردی آن در گسسته‌سازی و حل معادلات دیفرانسیل شد [۲۰] و اولین بار در تحقیق [۲۲] کاربرد آن‌ها به جای توابع شکل المان پایه در محاسبات روش اجزای محدود مورد بررسی قرار گرفت. در این بررسی مشکلات و ناکارآمدی‌هایی در کاربرد مستقیم توابع حاصل از تئوری موجک‌ها در روش اجزای محدود ملاحظه و گزارش شد. به عنوان مثال کاربرد موجک‌های مراتب پایین به دلیل فقدان نظم ساختاری امکان‌پذیر نبود اما تعامد آن‌ها که جزء ملزومات اصلی پردازش سیگنال‌ها است خللی در محاسبات ایجاد نمی‌کرد. مهم‌ترین دشواری گزارش شده این بود که اعمال شرایط مرزی ضروری بر فرایند محاسباتی الگوریتم هم به آسانی امکان‌پذیر نبود.

ترکیب الگوریتم قطعات هیدرودینامیک هموار شده که نقیصه المان‌پایه بودن اجزای محدود را بر طرف می‌کرد با تئوری توابع موجک‌ها که چهره جذاب و انعطاف‌پذیری در گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل ارائه کرده بود، در روش بازتولید قطعات اساسی (RKPM) به کارگرفته شد و تلاش شد که نقایص گزارش شده در تحقیق [۲۲] با ارائه یک تابع اصلاح کننده برای شرایط مرزی برطرف شود [۲۳]. یکی از اهداف مبدعین الگوریتم مذکور تضمین مرتبه خاصی از پیوستگی در تقریب‌سازی انتگرال محدود بوده است [۱]. همان‌گونه که بیان شد این روش، با اعمال یک تابع اصلاح‌کننده، الگوریتم درون‌یاب قطعات هیدرودینامیک هموار را ارتقا می‌دهد. بنابراین می‌توان گفت، درون‌یاب انتگرال محدود به کار گرفته شده در الگوریتم قطعات هیدرودینامیک هموار شده که قبلا توسط رابطه (۳) ارائه شد به صورت زیر برای کاربرد در روش بازتولید اساسی قطعات اصلاح می‌شود [۲۳]:

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_\Omega u(\xi) C(\mathbf{x},\xi) w(\mathbf{x}-\xi, h) d\xi \qquad (۱۸)$$

در این رابطه $C(\mathbf{x},\xi)$ تابع اصلاح‌کننده است. ایده اصلی اعمال تابع اصلاح کننده بهبود تقریب‌سازی قطعات هیدرودینامیک هموار به ویژه در مجاورت مرزهای محیط است به گونه‌ای که پیوستگی خطی $(C^1)$ برای آن ایجاد شود [۱]. به عنوان مثال از عبارت زیر می‌توان به عنوان تابع اصلاح کننده در مسائل تک بعدی استفاده کرد:

$$C(\mathbf{x},\xi) = c_1(\mathbf{x}) + c_2(\mathbf{x})(\xi - \mathbf{x}) \qquad (۱۹)$$

در این رابطه $c_1(\mathbf{x})$ و $c_2(\mathbf{x})$ ضرایبی هستند که توسط محققین تحقیق [۲۳] با اعمال شرایط باز تولید توابع به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$c_1(\mathbf{x}) = \frac{m_2(\mathbf{x})}{m_0(\mathbf{x}) m_2(\mathbf{x}) - m_1^2(\mathbf{x})}$$
$$c_2(\mathbf{x}) = \frac{m_1(\mathbf{x})}{m_0(\mathbf{x}) m_2(\mathbf{x}) - m_1^2(\mathbf{x})} \qquad (۲۰)$$

عبارات $m_0$، $m_1$ و $m_2$ که گشتاورهای وزن[۴۱] نامیده می‌شوند به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$m_0(\mathbf{x}) = \int_\Omega w(\mathbf{x}-\xi) d\xi$$
$$m_1(\mathbf{x}) = \int_\Omega \xi w(\mathbf{x}-\xi) d\xi \qquad (۲۱)$$
$$m_2(\mathbf{x}) = \int_\Omega \xi^2 w(\mathbf{x}-\xi) d\xi$$

با گسسته‌سازی انتگرال رابطه (۱۸) تابع هدف با استفاده از قطعات پیرامونی آن به صورت جمعی زیر تقریب‌سازی می‌شود:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} C(x, x_i)\, w(x - x_i)\, u_i \Delta V_i \qquad (۲۲)$$

با مقایسه رابطه فوق با معادله (۹) توابع شکل روش بازتولید اساسی قطعات به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$N_i(x) = C(x, x_i)\, w(x - x_i)\, \Delta V_i \qquad (۲۳)$$

توجه کنید که توابع وزن اصلاح‌شده[۴۲] ممکن است فاقد شرایط مثبت‌بودن و اکیدانزولی‌بودن (شرایط اول و چهارم بیان شده در بخش ۲-۱-۲) باشند.

انجام اصلاحات فوق بر روش قطعات هیدرودینامیک هموار شده که به ابداع روش بازتولید اساسی قطعات منجر شد، نه‌تنها ناکارآمدی روش در مواجهه با مرزهای محیط را جبران می‌کند بلکه خطای بزرگ‌نمایی داخل دامنه که از ویژگی‌های ذاتی این روش است را رفع می‌کند [۲۰]. روش باز تولید اساسی قطعات با موفقیت در حل بسیاری از مسائل حوزه‌های مختلف علوم از جمله مکانیک جامدات، سازه و مکانیک سیالات به کار رفته است. به عنوان نمونه تحقیق [۹] کاربرد آن را در حل مسائل خطی الاستیسیته و غیرخطی مادی گزارش کرده است. در منابع [۲٤ و ۲۵] هم محققین با توسعه الگوریتم و انجام مختصر تغییراتی در فرایند محاسباتی آن، امتیازاتی را برای آن ایجاد کرده‌اند و کاربردهای عملی مطالعات خود را هم بیان کرده‌اند. تحقیق [۲٦] به کاربرد الگوریتم بازتولید اساسی قطعات در تحلیل غیرخطی تغییر شکل‌های بزرگ در سازه‌ها پرداخته است. مرجع [۲۷] ابتدا به معرفی الگوریتم و شرایط لازم برای بازتولید توابع هدف تا یک مرتبه دلخواه پرداخته است و با استفاده از منابع [۲۸ و ۲۹] شرایط لازم برای امکان دسترسی به توابع شکل را بیان کرده است. سپس چند نسخه اصلاح شده مهم آن را که در شاخه‌های مختلف علم مکانیک به کار می‌رود معرفی و بررسی کرده است. استفاده از تئوری قطعه واحد طبقاتی[۴۳] که در مطالعه [۳۰] به آن پرداخته شده است و با هدف اصلاح مشتقات توابع شکل ایجاد شده است، یکی از این نسخه‌های اصلاحی است. دیگر نسخه اصلاحی بیان شده در مطالعه [۲۷] روش توسعه یافته (غنی شده) باز تولید اساسی قطعات است که در بخشی از مرجع [۳۱] برای درون‌یابی توابع دارای مشتقات ناپیوسته ابداع شده است. کاربردهای دیگری از الگوریتم در شاخه‌های غیر از مکانیک جامدات هم در پاره‌ای از دیگر مطالعات گزارش شده است به عنوان یک نمونه کاربردی از این مطالعات، می‌توان به تحقیق [۳۲] اشاره کرد که کاربرد الگوریتم را در میدان صوت و محاسبات مرتبط با آن آزموده است.

## ۳- روش‌های مبتنی بر دنباله‌های محدود

در گذشته‌های دور و در غیاب ماشین‌های محاسبه‌گر امروزی، تقریب‌سازی و بیان توابع تحلیلی توسط سری‌ها مهم‌ترین راهکار محاسبه عددی مقادیر آن‌ها در نقاط بوده است. با آشنایی بیشتر محققین با ویژگی‌های محاسباتی سری‌ها، ایده تعیین تابع تحلیلی در حالی که مقدار عددی آن در محل تعداد محدودی نقطه مشخص باشد ارائه شد. با استفاده از این ایده کلی، برای انتساب یک تابع تحلیلی به مجموعه‌ای از مقادیر نقطه‌ای، معمولا یک سری با تعداد محدودی جمله و با ضرایب مجهول در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از اطلاعات نقطه‌ای موجود، ضرایب مجهول جملات سری چنان انتخاب می‌شوند که مقدار عددی حاصل از مجموعه سری در نقاط مورد نظر بر مقدار آن‌ها منطبق شود یا کمترین خطای ممکن را نسبت به آن‌ها داشته باشد. واضح است که چنین ایده‌ای سرچشمه تولید الگوریتم‌های درون‌یابی مختلفی است که دارای ضعف و قوت نسبی هستند.

یکی از قدیمی‌ترین منابعی که الگوریتم‌های درون‌یابی زمان خود را معرفی کرده است در مرجع [۳۳] ارائه شده است. در این تحقیق با مرور مطالعات انجام شده توسط محققین، به صورت بسیار ساده به بررسی سری‌های مبتنی بر توابع پایه تک‌جمله‌های جبری اشاره شده است و سپس به درون‌یابی با سری‌های دارای توابع پایه گویا هم پرداخته شده است. همچنین معیارهایی برای پایداری و همگرایی چنین الگوریتم‌هایی هم بیان شده است.

مطالعه و توسعه همین روش‌های قدیمی به چندین الگوریتم قدرتمند درون‌یابی منجر شده است که امروزه به واسطه حضور پردازنده‌های سریع، موارد استفاده‌های فراوان از آن‌ها در تحلیل‌های فیزیکی ملاحظه می‌شود. در ادامه به بررسی تعدادی از رایج‌ترین آن‌ها می‌پردازیم.

### ۳-۱- روش حداقل مربعات (LSQ)

روش حداقل مربعات در میدان نجوم و نقشه‌برداری و در خلال تلاش‌های دانشمندان علوم نجوم و ریاضی برای تعیین مسیرهای دریایی ایمن برای دریانوردان ابداع شد. تسلط کامل بر رفتار و حرکات اجرام آسمانی کلید موفقیت در حل این مسائل بود. این روش حاصل چندین گام مطالعاتی متوالی و پیشرفت‌های ناشی از آن در قرن هجدهم است که جزئیات آن‌ها در مرجع [۳٤] به تفصیل آمده است. اما اولین گزارش‌های مدون از ابداع روش درون‌یابی حداقل مربعات در اوایل قرن نوزدهم به طور جداگانه توسط دو ریاضی‌دان معروف، لژاندر و گاوس، ارائه شد. پس از ارائه اولیه الگوریتم حداقل مربعات، مرجع [۳۵] کاربردهای غیرمستقیمی از آن را در حوزه علوم زیستی گزارش کرده است که می‌تواند مبنای نسخه امروزی الگوریتم باشد. اصول درون‌یابی حداقل مربعات که امروزه در تحلیل‌های عددی مختلف به کار گرفته می‌شود در منابع علمی ارائه شده است که مرجع [۳٦] نمونه‌ای از آن‌ها است.

روش حداقل مربعات برای بیان تقریبی یک تابع دلخواه توسط تابعی با پیچیدگی کمتر که اغلب یک چند جمله‌ای است به کار می‌رود. به عبارت دیگر، اگر تابع واقعی $\mathbf{u(x)}$ باشد بیان تقریبی آن به صورت $\mathbf{\hat{u}(x)}$ در نظر گرفته می‌شود. در صورتی که تابع تقریبی برای سادگی به صورت چند جمله‌ای در نظر شود می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{\hat{u}(x) = P^T(x)a} \qquad (۲٤)$$

در این رابطه $\mathbf{P}$ برداری است که درایه‌های آن تک‌جمله‌های پایه تقریب‌سازی هستند و به صورت کامل یا حداقل به صورت متقارن از مثلث معروف خیام-پاسکال برداشته می‌شوند. به‌عنوان مثال بردار مذکور در حالات تک‌بعدی و دوبعدی با انتخاب تک‌جمله‌های کامل تا مرتبه دوم به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{P^T} = \{1, x, x^2\}$$
$$\mathbf{P^T} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \qquad (۲۵)$$

بردار ستونی $\mathbf{a}$ هم شامل ضرایب مجهول تک‌جمله‌های پایه است. در صورتی که تعداد تک‌جمله‌های پایه برابر $m$ باشد بردار مذکور دارای $m$ درایه به ترتیب برابر با $a_1$، $a_2$، ...، $a_m$ خواهد بود.

یک راه برای این‌که بتوان ضرایب مجهول بردار $\mathbf{a}$ را چنان محاسبه کرد که مقادیر تابع تقریبی $\mathbf{\hat{u}(x)}$ دارای کمترین فاصله (خطا) نسبت به مقادیر تابع واقعی $\mathbf{u(x)}$ باشد، حداقل‌سازی میانگین مربعات خطای دو تابع در محدوده دامنه $\Omega$ است. میانگین مربعات خطای دوتابع در محدوده دامنه را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$E_{ave} = \frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \left[\mathbf{u(x) - \hat{u}(x)}\right]^2 d\Omega \qquad (۲٦)$$

پارامتر $V_\Omega$ در این رابطه شاخص دامنه است که برای دامنه تک‌بعدی برابر طول دامنه و در حالت دوبعدی برابر مساحت دامنه در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این که فرایند حداقل‌سازی فقط بر قسمت انتگرالی رابطه فوق اعمال می‌شود، می‌توان شاخص خطا که حداقل شدن آن مورد نیاز است را به صورت زیر بیان کرد:

$$E = \int_\Omega \left[\mathbf{u(x) - \hat{u}(x)}\right]^2 d\Omega \qquad (۲۷)$$

عبارت فوق در واقع شاخص میانگین مربعات خطای دو تابع که توسط رابطه (۲٦) بیان شده بود را به مجموع مربعات خطا تبدیل کرده است. با توجه به این که $\mathbf{\hat{u}(x)}$ تابع چندجمله‌ای معرفی شده توسط رابطه (۲٤) است، می‌توان رابطه (۲۷) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$E = \int_\Omega \left[\mathbf{u(x) - P^T a}\right]^2 d\Omega \qquad (۲۸)$$

در ادامه برای حداقل‌سازی مجموع مربعات خطا، مشتق آن را نسبت به ضرایب مجهول بردار $\mathbf{a}$ محاسبه و برابر صفر قرار

می‌دهند و از حل دستگاه معادلات حاصل ضرایب مجهول $a_1$، $a_2$،... ، $a_m$ که کم‌ترین خطای ممکن را برای تابع تقریبی ایجاد می‌کنند به دست می‌آورند.

با استفاده از تئوری فوق می‌توان به برازش منحنی بر تعدادی داده نقطه‌ای هم پرداخت. فرض کنید مقادیر تابع واقعی $u(\mathbf{x})$ فقط در $n$ نقطه دامنه معلوم باشد. در این حالت با استفاده از $n$ داده نقطه‌ای موجود تابع تقریبی $\hat{u}(\mathbf{x})$ تعریف می‌شود و مقدار تابع در سایر نقاط دامنه را با کم‌ترین خطای ممکن حدس زده می‌شود. در این روش تابع تقریبی درون‌یابی شده لزوماً از نقاط مشخص شده دامنه نمی‌گذرد بلکه با کم‌ترین خطای ممکن از مجاورت آن‌ها عبور می‌کند (شکل (۲)). بدیهی است که شرط وجود جواب برای مسئله آن است که تعداد نقاط دارای مقدار معلوم تابع از تعداد تک‌جمله‌های پایه درون‌یابی بیشتر باشد $(n > m)$. در چنین حالتی اگر تابع تقریبی $\hat{u}(\mathbf{x})$ را همان چندجمله‌ای ارائه شده توسط رابطه (۲٤) فرض کنیم، مجموع مربعات خطا با استفاده از اطلاعات معلوم در $n$ نقطه مشخص شده از دامنه به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left[ u(\mathbf{x}_i) - \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a} \right]^2 \qquad (۲۹)$$

در این رابطه اندیس $i$ پارامتر تحت اندیس را در محل نقطه $i$ام محاسبه می‌کند.

اکنون باید ضرایب مجهول $a_1$ ، $a_2$،... ، $a_m$ را چنان محاسبه کنیم که شاخص خطای فوق حداقل مقدار ممکن را داشته باشد. بدین منظور مشتق شاخص مجموع مربعات خطا $(E)$ را نسبت به بردار مجهول $\mathbf{a}$ محاسبه و برابر صفر قرار می‌دهیم. با انجام این کار و حل معادله حاصل، بردار ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{u}} \qquad (۳۰)$$

در این رابطه $\bar{\mathbf{u}}$ برداری است که درایه‌های آن مقادیر داده شده تابع در $n$ نقطه دامنه محاسباتی هستند و $\mathbf{C}$ هم یک ماتریس مربعی با بعد $n$ است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \qquad (۳۱)$$

ماتریس $\mathbf{A}$ یک ماتریس مربعی با مرتبه $m$ و ماتریس $\mathbf{B}$ از مرتبه $m \times n$ هستند که توسط روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{x}_i)\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i)$$
$$\mathbf{B} = \left[ \mathbf{P}(\mathbf{x}_1) \;\; \mathbf{P}(\mathbf{x}_2) \;\cdots\; \mathbf{P}(\mathbf{x}_n) \right] \qquad (۳۲)$$

در واقع $\mathbf{B}$ ماتریسی است که ستون‌های آن به ترتیب بردار تک‌جمله‌ها در نقاط دامنه محاسباتی هستند.

جایگذاری بردار $\mathbf{a}$ که توسط رابطه (۳۰) محاسبه شد در تابع تقریبی $\hat{u}(\mathbf{x})$ که در رابطه (۲٤) معرفی شده است، عبارت زیر را برای تابع تقریبی نتیجه می‌دهد:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{C}\bar{\mathbf{u}} \qquad (۳۳)$$

در نهایت جایگذاری ماتریس $\mathbf{C}$ از رابطه (۳۱) در عبارت فوق، شکل کلی تابع تقریبی را به صورت زیر به دست می‌آورد:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \qquad (۳٤)$$

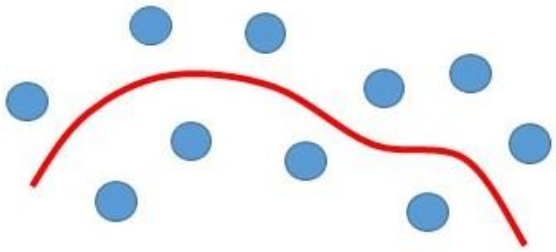
از سوی دیگر معادل ماتریسی رابطه (۹) را به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\mathbf{x})u_i = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \qquad (۳۵)$$

مقایسه عبارت درون‌یاب معرفی شده در رابطه (۳٤) با عبارت کلی و استاندارد فوق، ماتریس توابع شکل روش حداقل مربعات را به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \qquad (۳٦)$$

روش درون‌یابی حداقل مربعات معمولا برای درون‌یابی خطی به کار می‌رود، اما تحقیق [۳۷]، صورت درجه دوم آن را برای درون‌یابی جابه‌جایی‌های نقاط یک ورق نازک با انحنای ثابت به کار برده است. در مطالعه [۳۸] هم درون‌یابی خطی حداقل مربعات برای تحلیل سیالات تراکم‌پذیر دارای سرعت زیاد به کار رفته است.



**شکل ۲- تابع درون‌یابی شده در الگوریتم حداقل مربعات خطا از نقاط دامنه نمی‌گذرد.**

اگرچه الگوریتم درون‌یابی حداقل مربعات که جزئیات آن بیان شد، تحول بزرگی را در فرایندهای حل عددی معادلات دیفرانسیل ایجاد کرد اما دارای نقاط ضعفی است که رفع آنها مورد توجه محققین قرار گرفت. مطالعه [۳۹ و ٤٠] نتایج مطالعات خود را بر پایداری، دقت و همگرایی الگوریتم ارائه کرده‌اند. در مطالعات مرجع [٤١] هم صراحتاً به زوال پایداری الگوریتم در حالات خاص و به ویژه هنگامی که تعداد نقاط درون‌یابی $(n)$ به تعداد تک‌جمله‌های پایه درون‌یابی $(m)$ نزدیک باشد اشاره شده است. در این مرجع به علاقمندی محققین به ارائه راهکارهای اصلاح الگوریتم در جهت کاهش تعداد نقاط درون‌یابی اشاره شده است [٤٢ و ٤٣].

### ۳-۲- روش حداقل مربعات وزن‌دار (WLS)

همان‌طور که در بخش قبل ملاحظه شد روش حداقل مربعات، محاسبات استانداردی را به ویژه برای برازش منحنی در مسائل با تعداد داده‌های نقطه‌ای بیش از تعداد پارامترهای مجهول ارائه کرد. دقت سطح برازش شده به مجموع (یا میانگین) مربعات مانده‌ها که اختلاف بین مقدار تابع برازش شده و داده‌های مشاهداتی در نقاط هستند بستگی دارد. مبنای محاسباتی روش حداقل مربعات بر این فرض استوار است که دقت داده‌های نقطه‌ای در تمام نقاط ناحیه درون‌یابی یکسان است. به بیان دیگر فرض می‌شود که انحراف معیار خطا در تمام نقاط ناحیه یکسان باشد [٤٤]. در صورت تخطی از این فرض، ضرایب تابع برازش شده از شرایط مطلوبی برخوردار نبوده و تأثیرپذیری بیشتری از برخی نقاط خواهند داشت. این پدیده باعث می‌شود که با مختصر تغییراتی در نقاط ناحیه، تابع برازش شده دچار تغییرات قابل توجهی شود. جهت احتراز از بروز این مشکل تبدیل‌های ریاضی خاصی بر متغیرهای تابع اعمال می‌شود. یکی از رایج‌ترین این تبدیل‌ها مبنای روش حداقل مربعات وزن‌دار بوده است [٤٥]. در مرجع [٤٥] الگوریتم حداقل مربعات وزن‌دار هم از منظر یکسانی انحراف معیار خطا و هم از منظر یک الگوریتم درون‌یابی خاص مورد بررسی قرار گرفته است و قدرت بیشتر آن نسبت به نسخه عمومی حداقل مربعات اثبات شده است.

اصول و مراحل محاسباتی فرایند درون‌یابی حداقل مربعات وزن‌دار در منابع مختلف از جمله [٤٥] ارائه شده است. در این روش برای تخمین مقدار تابع هدف در هر نقطه از محیط، نقطه مذکور به عنوان نقطه مرکزی در نظر گرفته می‌شود و با ایجاد زیرناحیه‌ای با ابعاد محدود به مرکزیت آن، الگوریتم درون‌یاب بر زیرناحیه مذکور و نقاط درون آن اعمال می‌شود. با این توضیحات، الگوریتم مورد بحث را می‌توان از دسته درون‌یاب‌های محلی دانست که مقدار تابع هدف در محل یک نقطه را بر حسب مقادیر آن در نقاط مجاور تخمین می‌زند. روش‌های درون‌یابی محلی به عنوان شاخه مهمی از الگوریتم‌های درون‌یابی، کاربرد وسیعی در ابداع و توسعه روش‌های بدون شبکه داشته‌اند به عنوان مثال روش المان‌های پراکنده[٤٤] [٤٦]، روش بدون المان گالرکین[٤٥] [٤٧]، روش باز تولید اساسی قطعات [۲۳]، روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین[٤٦] [٤٨] و روش کره‌های محدود[٤٧] [٤٩] همگی از درون‌یاب‌های محلی استفاده می‌کنند.

تنها تفاوت محاسباتی الگوریتم جدید حداقل مربعات وزن‌دار خطا با نسخه استاندارد حداقل مربعات خطا آن است که با ضرب مقادیری مثبت در مقادیر مربع اختلاف مقدار تابع تقریبی از مقدار مشاهداتی در هر نقطه، میزان اثرگذاری آن نقطه را در فرایند درون‌یابی مشخص می‌کنند. ضریب مورد نظر برای هر نقطه که از این پس وزن آن نقطه نامیده می‌شود معمولاً توسط تابعی به نام تابع وزن در نقاط محدوده درون‌یابی مشخص می‌شود. مقدار تابع وزن در نقاطی که بیشترین تأثیر برای آن‌ها مورد نظر است نزدیک به یک و در نقاط با درجه اهمیت کمتر کوچک‌تر بوده و به تدریج به صفر میل می‌کند.

با توجه به توضیحات فوق برای دست‌یابی به معادلات الگوریتم درون‌یابی حداقل مربعات وزن‌دار کافی است، روابط (۲۹) تا (۳۶) که برای روش حداقل مربعات بیان شد را با اعمال وزن نقاط اصلاح کنیم. در این صورت شاخص خطا در الگوریتم حداقل مربعات وزن‌دار به صورت زیر خواهد بود:

$$E = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x}_i)\left[u(\mathbf{x}_i) - \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}\right]^2 \qquad (۳۷)$$

در این رابطه $w(\mathbf{x}_i)$ مقدار تابع وزن در محل نقطه iام ناحیه درون‌یابی است. در صورتی که به حداقل‌سازی شاخص فوق بپردازیم با طی فرایندی شبیه آنچه در فصل قبل توضیح داده شد، بردار مجهولات $\mathbf{a}$ از روابط (۳۰) و (۳۱) به دست می‌آید. البته با این تفاوت که ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ از رابطه (۳۲) محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x}_i)\mathbf{P}(\mathbf{x}_i)\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i)$$
$$\mathbf{B} = \qquad (۳۸)$$
$$\left[w(\mathbf{x}_1)\mathbf{P}(\mathbf{x}_1) \quad w(\mathbf{x}_2)\mathbf{P}(\mathbf{x}_2) \cdots w(\mathbf{x}_n)\mathbf{P}(\mathbf{x}_n)\right]$$

بنابراین تابع تقریبی در ناحیه مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \qquad (۳۹)$$

که با توجه به آن توابع شکل الگوریتم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \qquad (۴۰)$$

باید توجه داشت که همانند الگوریتم حداقل مربعات خطا سطح برازش شده توسط الگوریتم حداقل مربعات وزن‌دار هم از نقاط ناحیه درون‌یابی نمی‌گذرد.

دقت و پایداری این الگوریتم درون‌یابی تا حدود زیادی به شکل و نحوه اعمال مقادیر وزن بستگی دارد. ساده‌ترین روش اعمال مقادیر وزن در نقاط مختلف دامنه استفاده از توابع وزن است [۵۰ و ۵۱]. چنین فرایندی در واقع تلاش می‌کند که با انتخاب توابع وزن مناسب، همگرایی و پایداری الگوریتم را تأمین کند. به عنوان نمونه در محاسبات تحقیق [۴۶] از تابع گوسی زیر به عنوان تابع وزن استفاده شده است:

$$w(\mathbf{x}_i) = \frac{e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x_m}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{x_m}{c}\right)^2}} \qquad (۴۱)$$

در این رابطه $x_m$ نصف اندازه دامنه درون‌یابی و $c$ ضریبی است که شکل تابع وزن را مشخص می‌کند و برابر $\frac{x_m}{2}$ پیشنهاد شده است.

الگوریتم حداقل مربعات وزن‌دار در توسعه برخی روش‌های بدون شبکه حل معادلات دیفرانسیل ازجمله روش نقاط محدود نقش اساسی داشته است. برخی محققین هم با ایجاد تغییرات جزئی در الگوریتم درون‌یاب یا اصلاح بیان معادلات دیفرانسیل حاکم باعث ارتقای سطح دقت محاسبات شده اند. به عنوان مثال مطالعه [۵۲] روش نقاط محدود را با کاربرد درون‌یابی حداقل مربعات وزن‌دار برای حل مسائل الاستیسیته به کار برده است و با اعمال تئوری حساب محدود که در مرجع [۵۳] معرفی شده است، بهبودهایی را در نتایج گزارش کرده است. بنابراین باید توجه داشت که در یک فرایند تحلیلی علاوه بر اصلاح الگوریتم درون‌یاب، اصلاح معادلات دیفرانسیل حاکم که می‌تواند شامل نوع گسسته‌سازی و بیان متغیرهای آنها باشد، منجر به افزایش دقت محاسبات می‌شود.

### ۳-۳- روش حداقل مربعات متحرک(MLS):

روش حداقل مربعات متحرک که از دسته روش‌های نمایش

سری‌های محدود بوده و یک درون‌یاب محلی است توسط ریاضی‌دانان برای برازش منحنی و تولید سطوح ارائه شد [٥٤ و ٥٥]. در مرجع [٥٤] فرایند محاسباتی الگوریتم با بیان عالی توضیح داده شده است. امروزه این روش در تخمین توابع و ایجاد توابع شکل به ویژه در میدان تحلیل‌های بدون شبکه توفیق بسیار یافته و مورد اقبال محققین قرار گرفته است [١]. برای اولین بار محققین مرجع [٤٦] از روش حداقل مربعات متحرک در حل مسائل مکانیک استفاده کردند و توابع شکل لازم برای روش تحلیلی المان‌های پراکنده خود را استخراج کردند. روش المان‌های پراکنده سپس مورد بازنگری و اصلاح محققین مطالعات [٤٧] قرار گرفت و منجر به ابداع روش بدون المان گالرکین شد [٤٧ و ٥٦]. مبنای درون‌یابی در روش بدون المان گالرکین هم همان الگوریتم حداقل مربعات متحرک بوده است. ابداع روش‌های المان پراکنده و بدون المان گالرکین پیشرفت‌های اساسی در حوزه روش‌های بدون شبکه ایجاد کرد.

به دلیل وجود دو ویژگی مهم، روش حداقل مربعات متحرک اقبال محققین را برانگیخته است. اول آن که میدان تقریبی تولید شده توسط آن در کل دامنه پیوسته و هموار است و دوم توانایی الگوریتم در تولید تقریباتی است که تا مرتبه دلخواهی را باز تولید می‌کنند [١].

برای تقریب‌سازی تابع دلخواه $\mathbf{u(x)}$ در محل نقطه محاسباتی $\mathbf{x}$ از دامنه کلی $\Omega$ ابتدا دامنه را با تعداد مناسبی نقطه مدل‌سازی می‌کنیم و با استفاده از مفهوم ناحیه تأثیر، منطقه‌ای را به مرکزیت نقطه $\mathbf{x}$ و در همسایگی آن در نظر می‌گیریم. بدیهی است که تعدادی از نقاط مدل در ناحیه تأثیر قرار می‌گیرند. روش حداقل مربعات متحرک، تابع تقریبی $\mathbf{\hat{u}(x)}$ را با نمایش سری محدود زیر معرفی می‌کند:

$$\mathbf{\hat{u}(x) = P^T(x)a} \qquad (٤٢)$$

در این رابطه $\mathbf{P(x)}$ بردار تک‌جمله‌ای پایه است که دارای $\mathrm{m}$ درایه است. درایه‌های این بردار جملات درج شده در مثلث معروف خیام- پاسکال هستند که به طور متقارن از آن مثلث انتخاب می‌شوند. سعی می‌شود جملات مذکور به گونه‌ای انتخاب شوند که مجموعه آن‌ها تا مرتبه توانی خاصی کامل باشد. رابطه (٢٥) بردار تک‌جمله‌های پایه کامل مرتبه دوم و مرتبه سوم دو بعدی را نشان می‌دهد. $\mathbf{a(x)}$ هم بردار ضرایب مجهول نظیر نقطه $\mathbf{x}$ است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{a^T(x)} = \{a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \cdots, a_m(\mathbf{x})\} \qquad (٤٣)$$

برای محاسبه بردار ضرایب $\mathbf{a(x)}$، از مقادیر تابع هدف در محل نقاط درون ناحیه تأثیر نقطه محاسباتی $\mathbf{x}$ استفاده می‌شود. یعنی در صورتی که $\mathrm{n}$ نقطه در ناحیه تأثیر نقطه محاسباتی $\mathbf{x}$ قرار داشته باشد، از مقادیر تابع هدف در این نقاط برای تقریب‌سازی محلی تابع هدف در نقطه محاسباتی $\mathbf{x}$ بهره خواهیم برد. در صورتی که مختصات نقاط واقع در ناحیه تأثیر نقطه $\mathbf{x}$ به ترتیب $\mathbf{x}_1$ ، $\mathbf{x}_2$ ، ... ، $\mathbf{x}_n$ باشند، با استفاده از رابطه (٤٢) مقادیر تقریبی تابع هدف در این نقاط به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{\hat{u}(x, x_j) = P^T(x_j)a(x)} \quad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (٤٤)$$

اکنون لازم است درایه‌های بردار ضرایب $\mathbf{a(x)}$ را چنان محاسبه کنیم که شاخص خطای $\mathrm{n}$ مقدار تقریبی فوق نسبت به مقادیر واقعی آن‌ها حداقل مقدار ممکن باشد. در روش حداقل مربعات متحرک هم مجموع مربعات وزن‌دار خطا به عنوان شاخص خطا در نظر گرفته می‌شود و بردار ضرایب مجهول با حداقل‌سازی آن به دست می‌آید. شاخص مجموع مربعات وزن دار خطا توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}(\mathbf{x}_i)\left[\mathrm{u}(\mathbf{x}_i) - \hat{\mathrm{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}(\mathbf{x}_i)\left[\mathrm{u}_i - \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x})\right]^2 \qquad (٤٥)$$

در این رابطه $\mathrm{w}(\mathbf{x}_i)$ مقدار تابع وزن در محل نقطه $\mathrm{i}$ام و $\mathrm{u}(\mathbf{x}_i) = \mathrm{u}_i$ مقدار تابع در محل نقطه $\mathrm{i}$ام است.

برای محاسبه بردار ضرایب $\mathbf{a(x)}$ باید شاخص خطای فوق حداقل مقدار ممکن را داشته باشد. بنابراین به اقناع معادله زیر می‌پردازیم:

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{a}} = 0 \qquad (٤٦)$$

با جایگذاری شاخص خطا از رابطه (٤٥) در معادله (٤٦) و حل معادله ماتریسی حاصل، بردار ضرایب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{u}} \quad (47)$$

در این رابطه $\bar{\mathbf{u}}$ برداری است که درایه‌های آن مقادیر داده شده تابع در $n$ نقطه ناحیه تأثیر هستند و $\mathbf{C}$ هم یک ماتریس مربعی با بعد $n$ است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (48)$$

ماتریس $\mathbf{A}$ یک ماتریس مربعی با مرتبه $m$ و ماتریس $\mathbf{B}$ از مرتبه $m\times n$ هستند و توسط روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{x}_i)\mathbf{P}(\mathbf{x}_i)\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i)$$
$$\mathbf{B} = \left[ w(\mathbf{x}_1)\mathbf{P}(\mathbf{x}_1) \;\; w(\mathbf{x}_2)\mathbf{P}(\mathbf{x}_2) \cdots w(\mathbf{x}_n)\mathbf{P}(\mathbf{x}_n) \right] \quad (49)$$

جایگذاری بردار $\mathbf{a}$ که توسط رابطه (۴۷) محاسبه شد در تابع تقریبی $\hat{u}(\mathbf{x})$ که در رابطه (۴۲) معرفی شده است، عبارت زیر را برای تابع تقریبی نتیجه می‌دهد:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{C}\bar{\mathbf{u}} \quad (50)$$

در نهایت جایگذاری ماتریس $\mathbf{C}$ از رابطه (۴۸) در عبارت فوق، شکل کلی تابع تقریبی را به صورت زیر به دست می‌آورد:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \quad (51)$$

در نهایت با مقایسه رابطه فوق با رابطه (۳۵) توابع شکل روش حداقل مربعات متحرک در محل نقطه محاسباتی $\mathbf{x}$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (52)$$

با توجه به روند محاسباتی فوق ملاحظه می‌شود که با تغییر محل نقطه محاسباتی $\mathbf{x}$ ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هم تغییر می‌کنند. بنابراین به هنگام محاسبه مشتقات تابع هدف و مشتق‌گیری از رابطه (۵۱) باید مشتقات این دو ماتریس را هم در محاسبات وارد کرد. نحوه محاسبه مشتق تابع هدف به طور مفصل در مرجع [۴۷] بیان شده است و از ذکر آن در این متن خودداری می‌شود.

نکته دیگر این که باید توجه داشت که الگوریتم حداقل مربعات متحرک دارای خاصیت دلتای کرونکر نیست. بنابراین تابع برازش شده از نقاط ناحیه تأثیر عبور نمی‌کند. از این رو آن را یک روش تقریب‌ساز و نه درون‌یاب می‌گویند.

اهداف به کارگیری تابع وزن در روش حداقل مربعات متحرک با آنچه در روش‌های مبتنی بر نمایش انتگرال محدود بیان شد متفاوت است. در روش حداقل مربعات متحرک تابع وزن دارای دو هدف اصلی است. اول آن که با اعمال مقادیر وزن بر مقادیر مانده در نقاط مختلف، درجه اهمیت متفاوتی برای هر کدام ایجاد کند. بر این اساس به نقاط دورتر مقادیر وزن کوچک‌تری تخصیص می‌یابد. دومین نقش تابع وزن این است که با تغییر محل نقطه محاسباتی $\mathbf{x}$ نقاطی از دامنه به تدریج و آرام وارد محاسبات شوند و نقاط دیگری هم به تدریج کم اثر و حذف شوند. چنین نقشی از آن جهت بسیار مهم است که باعث می‌شود توابع شکل در کل دامنه هموار و پیوسته باشند. از نظر تئوریک تابع وزن می‌تواند هر تابعی که واجد شرایط مثبت بودن، فشردگی و اکیداً نزولی بودن باشد اختیار شود [۱]. ویژگی‌های شرایط مذکور قبلاً در بخش مربوط به درون‌یاب‌های مبتنی بر نمایش انتگرال محدود به تفصیل بیان شدند. لازم به ذکر است که از همان توابع وزن معرفی شده در نمایش‌های انتگرال محدود هم می‌توان در الگوریتم حداقل مربعات متحرک استفاده کرد.

سازگاری (قابلیت باز تولید توابع هدف) روش حداقل مربعات متحرک به کامل بودن مرتبه تک‌جمله‌های پایه بستگی دارد. مطالعات مرجع [۵۷] نشان داده است که در صورتی که مجموعه تک‌جمله‌های پایه تا مرتبه $k$ کامل باشند سازگاری الگوریتم هم از مرتبه $k$ خواهد بود. مرجع [۵۸] هم با طرح فرایند جالب ایجاد الگوریتم حداقل مربعات متحرک پیوسته به بررسی ارتباط بین الگوریتم حداقل مربعات متحرک با روش باز تولید قطعات اساسی پرداخته است. مرجع مذکور عباراتی شبیه آنچه در مطالعه [۲۳] برای ایجاد سازگاری در روش قطعات هیدرودینامیک هموار به دست آمده است را نتیجه گرفته است.

### ۳-۴- الگوریتم درون‌یابی نقطه‌ای (PIM)

همان‌طور که از نام روش مشخص است، تابع تقریبی در روش

درون‌یابی نقطه‌ای از مقادیر واقعی خود در نقاط مدل عبور می‌کند. این روش با پراکنش تعدادی نقطه بر سطح دامنه، آن را مدل‌سازی می‌کند. پس از ایجاد مدل نقطه‌ای از دامنه برای درون‌یابی تابع هدف در یک نقطه دلخواه، حول آن نقطه زیرناحیه‌ای که شامل تعداد مناسبی از نقاط مدل باشد در نظر گرفته شده و با استفاده از یک سری محدود مقدار تابع در محل آن نقطه درون‌یابی می‌شود.

برای درک جزئیات روش، تابع هدف $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ را در دامنه محاسباتی $\Omega$ در نظر بگیرید. فرض کنید می‌خواهیم مقدار تابع را در محل نقطه $\mathbf{x}_Q$ که از این پس نقطه مرکزی نامیده می‌شود محاسبه کنیم. زیر ناحیه‌ای را چنان حول نقطه مرکزی ایجاد می‌کنیم که شامل تعداد مناسبی از نقاط مدل باشد. با در نظر گرفتن نقاط درون ناحیه تأثیر (زیرناحیه) پیرامون نقطه مرکزی، روش درون‌یابی نقطه‌ای با کاربرد سری محدود زیر به درون‌یابی تابع هدف می‌پردازد:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\mathbf{x}_Q)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i(\mathbf{x})\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_Q) \qquad (۵۳)$$

در این رابطه $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ درایه iام بردار شامل جملات پایه درون‌یابی در محل نقطه دلخواه $\mathbf{x}$ از ناحیه تأثیر نقطه $\mathbf{x}_Q$ بوده و $\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_Q)$ درایه iام بردار ضرایب نظیر نقطه $\mathbf{x}_Q$ است. برحسب نوع تک‌جمله‌های پایه درون‌یابی، نسخه‌های مختلفی از روش درون‌یابی نقطه‌ای ایجاد می‌شود که در ادامه به بررسی دو نمونه مهم آن می‌پردازیم.

### ۳-٤-۱- درون‌یابی نقطه‌ای چندجمله‌ای

در صورتی که به هنگام تشکیل بردار سطری $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ از تک‌جمله‌های جبری تشکیل‌دهنده مثلث خیام- پاسکال استفاده شود نسخه چندجمله‌ای الگوریتم درون‌یابی نقطه‌ای ایجاد می‌شود [۵۹]. در این صورت عبارت (۵۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\mathbf{x}_Q)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i(\mathbf{x})\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_Q)=\mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}_Q) \qquad (٥٤)$$

در این رابطه $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ بردار تک جمله‌ای پایه است که در حالت اخیر نحوه تشکیل آن دقیقاً مشابه آنچه در الگوریتم حداقل مربعات متحرک بیان شد است. جملات تک‌جمله‌ای پایه حتماً باید به صورت متقارن از مثلث خیام-پاسکال برداشته شوند و ترجیحاً کامل باشند. تعداد تک جمله‌های انتخابی $(m)$ هم دقیقاً باید برابر با تعداد نقاط موجود در ناحیه تأثیر نقطه $\mathbf{x}_Q$ باشد. یعنی اگر n نقطه در ناحیه تأثیر نقطه $\mathbf{x}_Q$ وجود داشته باشد، تعداد تک‌جمله‌های پایه را هم برابر n فرض می‌کنیم $(m=n)$. در این صورت اگر معادله (٥٤) را بر تمامی نقاط درون ناحیه تأثیر اعمال کنیم یک دستگاه معادلات همزمان n بعدی ایجاد می‌شود که از حل آن بردار مجهولات $\mathbf{a}(\mathbf{x}_Q)$ به دست می‌آید. دستگاه معادلات مذکور را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{P}_Q\mathbf{a}=\mathbf{U}_s \qquad (٥٥)$$

در این رابطه $\mathbf{U}_s$ بردار مقادیر تابع هدف در نقاط ناحیه تأثیر است:

$$\mathbf{U}_s^T=\{u_1\ \ u_2\ \cdots\ u_n\} \qquad (٥٦)$$

ماتریس ضرایب $\mathbf{P}_Q$ هم که یک ماتریس مربع مرتبه n است، ماتریس گشتاور نامیده می‌شود و به صورت زیر بر حسب مختصات نقاط درون زیرناحیه معرفی می‌شود:

$$\mathbf{P}_Q=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_1)\\ \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_2)\\ \vdots\\ \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_n)\end{Bmatrix}= \qquad (٥٧)$$

$$\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & \cdots\\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 & \cdots\end{bmatrix}$$

حل معادله ماتریسی (۵۵) بردار ضرایب نظیر زیرناحیه مورد بحث را به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{a}=\mathbf{P}_Q^{-1}\mathbf{U}_s \qquad (٥٨)$$

در نهایت جایگذاری بردار ضرایب فوق در عبارت (٥٤) تابع درون‌یاب معتبر در محدوده زیرناحیه مورد بحث را به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\mathbf{x}_Q)=\mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}_Q^{-1}\mathbf{U}_s \qquad (٥٩)$$

بنابراین ماتریس توابع شکل الگوریتم به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}^{T}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{Q}^{-1} \qquad (٦٠)$$

به دلایل مختلفی از جمله آرایش نقاط درون زیرناحیه، ممکن است ماتریس $\mathbf{P}_Q$ وارون‌پذیر نباشد که در نتیجه آن فرایند درون‌یابی به شکست می‌انجامد. در چنین شرایطی می‌توان با کاربرد الگوریتم‌هایی مانند جابه‌جایی نقاط، تبدیل (دوران) دستگاه مختصات و مثلثی‌سازی ماتریسی [٦٠]، مشکل منفرد بودن این ماتریس را حل کرد.

اگرچه عدم نیاز الگوریتم حاضر به تابع وزن می‌تواند امتیاز مهمی برای الگوریتم به حساب آید، اما شرط برابری تعداد نقاط زیر ناحیه با تعداد تک‌جمله‌های پایه هم محدودیتی است که نمی‌توان از آن چشم پوشید. امتیاز دیگر روش حاضر آن است که هر تابعی که ترکیب خطی از تک‌جمله‌های پایه درون‌یاب باشد به طور دقیق توسط الگوریتم بازتولید می‌شود.

به هر حال در صورتی که ماتریس گشتاور وارون‌پذیر باشد، توابع شکل ایجاد شده فقط به نحوه پراکنش نقاط زیر ناحیه وابسته بوده و دارای ویژگی‌های زیر خواهند بود:

الف- توابع شکل ایجاد شده مستقل خطی[٤٨] هستند. این مطلب با توجه به استقلال خطی توابع پایه و وارون‌پذیر بودن ماتریس گشتاور به سادگی اثبات می‌شود.

ب- توابع شکل نظیر هر یک از نقاط زیرناحیه در محل آن نقطه برابر یک و در محل سایر نقاط زیرناحیه برابر صفر است (خاصیت دلتای کرونیکر). می‌دانیم که این خاصیت باعث تسهیل اعمال شرایط مرزی ضروری می‌شود.

ج- مجموع مقادیر توابع شکل در محل هر کدام از نقاط زیرناحیه برابر واحد است.

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i(\mathbf{x}) = 1 \qquad (٦١)$$

د- با وجود تک‌جمله‌های مرتبه اول به عنوان توابع پایه، مؤلفه‌های مختصات توسط الگوریتم بازتولید می‌شوند:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i(\mathbf{x})\mathbf{x}_i = \mathbf{x} \qquad (٦٢)$$

هـ - با توجه به ساختار الگوریتم که مبتنی بر ایجاد زیرناحیه‌های محاسباتی است، توابع شکل دارای خاصیت فشردگی هستند.

و- در ایجاد توابع شکل نیازی به اعمال تابع وزن وجود ندارد. البته نبود تابع وزن نزولی و هموار به ایجاد ناهمواری در نتایج درون‌یابی منجر می‌شود.

### ۳-٤-۲- درون‌یابی نقطه‌ای با پایه شعاعی

همانگونه که ملاحظه شد، درون‌یابی مبتنی بر پایه چندجمله‌ای به دلیل سادگی، دقت مطلوب و توان بازتولید توابع با مرتبه پایین‌تر از تک جمله‌های پایه مورد توجه قرار گرفت. متأسفانه بعضاً به هنگام اجرای الگوریتم با مواردی مواجه می‌شویم که ماتریس گشتاور وارون‌پذیر نبوده و به همین دلیل امکان درون‌یابی فراهم نمی‌شود. جهت ایجاد ماتریس گشتاور وارون‌پذیر، محققین تحقیق [٦١] تک جمله‌های پایه شعاعی را جایگزین تک‌جمله‌های مثلث خیام- پاسکال کرده‌اند و درون‌یابی نقطه‌ای با پایه شعاعی را ابداع کرده‌اند. با استفاده از توابع پایه شعاعی، رابطه (٥٣) که اساس محاسبات الگوریتم درون‌یابی نقطه‌ای است به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\mathbf{x}_Q) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i(\mathbf{x})\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_Q) = \mathbf{R}^{T}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}_Q) \qquad (٦٣)$$

در این رابطه $\mathbf{R}_i(\mathbf{x})$ تابع شعاعی است که بر اساس فاصله نقطه دلخواه $\mathbf{x}$ از زیر دامنه تا نقطه iام زیر دامنه که با $r_i$ نشان داده می‌شود محاسبه می‌شود:

$$r_i = \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (٦٤)$$

$\mathbf{R}^{T}(\mathbf{x})$ هم یک بردار سطری است که درایه‌های آن شامل مقادیر تابع شعاعی در نقطه $\mathbf{x}$ نسبت به هرکدام از $n$ نقطه واقع در زیر ناحیه است:

$$\mathbf{R}^{T}(\mathbf{x}) = \{R_1(\mathbf{x})\ \ R_2(\mathbf{x})\ \ \cdots\ \ R_n(\mathbf{x})\} \qquad (٦٥)$$

با اعمال تابع $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\mathbf{x}_Q)$ از رابطه (٦٣) بر نقاط درون زیرناحیه انتخاب شده، ماتریس گشتاور به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix} \qquad (٦٦)$$

با توجه به ویژگی‌های مفهوم فاصله به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس گشتاور متقارن است. با معلوم شدن ماتریس گشتاور دستگاه معادلات حاصل از اعمال رابطه (٦٣) بر نقاط زیرناحیه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} \qquad (٦٧)$$

بنابراین بردار ضرایب زیرناحیه مورد مطالعه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \qquad (٦٨)$$

در نهایت جایگذاری بردار ضرایب از رابطه (٦٨) در معادله (٦٣)، ماتریس توابع شکل الگوریتم را به صورت زیر به دست می‌آورد:

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}_Q^{-1} \qquad (٦٩)$$

انواع مختلفی از توابع پایه شعاعی در مطالعات مختلف معرفی شده‌اند که یکی از رایج‌ترین و محبوب‌ترین آن‌ها توابع پایه شعاعی چند ربعی[٤٩] است. اولین بار محققین تحقیق [٦٢] از توابع پایه شعاعی برای درون‌یابی داده‌های جغرافیایی استفاده کردند و همین محققین در مطالعه [٦٣] تابع پایه شعاعی زیر را پیشنهاد کردند:

$$R_i(\mathbf{x}) = \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + c^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(r_i^2 + c^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (٧٠)$$

در این رابطه $c$ ضریبی است که شکل منحنی تابع را کنترل می‌کند و می‌توان مقادیر مناسبی را برای کاربرد آن در مسائل مختلف پیشنهاد کرد.

از توابع پایه شعاعی چند ربعی به طور گسترده در برازش سطوح و حل تقریبی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای استفاده شده است. به عنوان نمونه در مطالعات [٦٤ و ٦٥] از این توابع در بررسی مسائل سیالات استفاده شده است. مرجع [٦٦ و ٦٧] به حل مسائل معادلات دیفرانسیل و مقادیر مرزی بیضوی با استفاده از توابع شعاعی پرداخته‌اند. در تحقیق [٦٨] هم به ارزیابی خطای درون‌یابی با استفاده از توابع پایه شعاعی پرداخته شده است. مطالعات [٦٩ و ٧٠] هم بر بررسی همگرایی الگوریتم‌های حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از توابع شعاعی متمرکز شده‌اند.

تابع شعاعی گوسی[٥٠] که بعضاً تابع شعاعی نمایی[٥١] هم نامیده می‌شود، نوع دیگری از توابع پایه شعاعی است که در مرجع [٧١] به صورت زیر معرفی شده است:

$$R_i(\mathbf{x}) = e^{-c\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]} = e^{-cr_i^2} \qquad (٧١)$$

در این حالت هم $c$ ضریبی است که نحوه نزول تابع را تعیین می‌کند و مقدار بهینه آن برای حل مؤثر مسائل مختلف محاسبه می‌شود.

انواع دیگری از توابع شعاعی هم توسط محققین برای درون‌یابی توابع هدف به کار گرفته شده‌اند که در متن حاضر از توضیح آن‌ها خودداری می‌شود. این توابع شعاعی از هر نوعی که باشند همواره دارای مقادیر مثبت بوده و با استفاده از یک یا چند ضریب شکل، نحوه تغییرات و شکل منحنی آن‌ها کنترل می‌شود. یادآور می‌شود که تنها تفاوت درون‌یابی چند جمله‌ای با درون‌یابی شعاعی جایگزینی تک‌جمله‌های پایه الگوریتم با توابع پایه شعاعی است. امتیاز مهم این جایگزینی آن است که در الگوریتم حاصل (الگوریتم درون‌یابی با توابع پایه شعاعی) به شرط احتراز از برخی مقادیر ضرایب شکل، ماتریس گشتاور همواره وارون‌پذیر بوده و عملاً مشکل منفرد بودن آن حل می‌شود [٦٨].

در کنار امتیاز مهم فوق، متأسفانه امکان باز تولید توابع برای درون‌یابی مبتنی بر توابع پایه شعاعی وجود ندارد. بنابراین اگرچه فرایند درون‌یابی توابع پیوسته توسط توابع پایه شعاعی همواره همگرا است و مشکلی از این حیث وجود ندارد اما فقدان امکان بازتولید توابع خطی باعث می‌شود که الگوریتم مذکور توفیقی در گذراندن آزمون‌های استاندارد مرسوم در الگوریتم اجزای محدود نداشته باشد. جهت رفع این نقایص محققین تحقیق [٧٢] الگوریتم درون‌یابی جدیدی را تعریف کرده‌اند که همزمان توابع پایه شعاعی و تک‌جمله‌های خیام-پاسکال را به عنوان توابع پایه به کار می‌برد و به درون‌یابی تابع هدف می‌پردازد.

**۳-۵- روش پاره‌های واحد**

از جمله روش‌های موفقی که به درون‌یابی و برازش منحنی بر دسته‌ای از داده‌های متمرکز در نقاط پراکنده می‌پردازد، روش پاره‌های واحد است. این روش که اولین بار در مرجع [۷۳] معرفی شد، محیط مورد مطالعه را به زیرناحیه‌های کوچکی تفکیک می‌کند و پس از ایجاد توابع تقریبی محلی در این زیرناحیه‌ها، از به هم پیوستن آن‌ها یک تابع تقریبی کلی استخراج می‌کند. جزئیات محاسباتی الگوریتم در مرجع [۷٤ و ۷۵] هم تبیین شده است. این روش بعداً در مطالعات [۷٦ و ۷۷] در تحلیل مسائل مهندسی مکانیک به کار گرفته شد. انگیزه اصلی محققین دو تحقیق مذکور برای کاربرد روش پاره‌های واحد در علوم مهندسی، رفع ناکارآمدی روش اجزای محدود در حل برخی مسائل مکانیک بوده است. محققین تحقیق [۷۷] دو ویژگی مهم در ساختار الگوریتم برشمرده‌اند:

اول آن که ساختار الگوریتم دارای انعطاف بوده و قادر است دانش و قضاوت‌های اولیه کاربران نسبت به پاسخ مسئله را در محاسبات خود وارد کند. این ویژگی به شیوه درون‌یابی محلی الگوریتم مربوط است. بزرگ‌ترین عامل موفقیت یک الگوریتم درون‌یاب، توانایی آن در تقریب‌سازی معقول پاسخ مسئله است. در روش اجزای محدود این تقریب‌سازی با نگاشت توابع چندجمله‌ای در محدوده المان‌ها ایجاد می‌شود. در مواردی که دانش تحلیلی از حل مسئله، کاربرد توابعی غیر از چندجمله‌ای‌های اجزای محدود را نزدیک‌تر به پاسخ دقیق نشان دهد، کاربرد آنها پاسخ محلی دقیق‌تری را ایجاد می‌کند که باعث توفیق بیشتر حل عددی می‌شود.

دومین ویژگی الگوریتم ساخت ناحیه‌های محدود محاسباتی بدون تقید به یک نظم هندسی خاص است. در واقع می‌توان این نواحی را با هر ویژگی هندسی ایجاد کرد. الگوریتم پاره‌های واحد محیط مورد مطالعه را به تعدادی ناحیه کوچک‌تر که بدون تقید هندسی خاصی از پاره‌سازی محیط ساخته می‌شوند و حتی می‌توانند همپوشانی داشته باشند تفکیک می‌کند. سپس تابع مورد مطالعه را در محدوده هر قطعه درون‌یابی کرده و از ترکیب توابع نظیر قطعات، تابع حاکم بر کل دامنه را برآورد می‌کند.

با توجه به بحث فوق، یکی از روش‌های ارتقای دقت الگوریتم کوچک‌سازی قطعات ایجاد شده است و روش دیگر بهبود توابع تقریب‌ساز است. این دو روش بهبود عملکرد الگوریتم به ترتیب با نسخه‌های h و p شناخته می‌شوند. روش پاره‌های واحد می‌تواند با ترکیبی از دو نسخه عمومی فوق و با علم به اثرات اطلاعات اولیه در بهبود حل مسئله گام بردارد.

فرض کنید که هدف درون‌یابی تابع دلخواه $v$ در محدوده $\Omega$ است. همانطور که بیان شد الگوریتم قطعات واحد ابتدا دامنه مورد مطالعه را به قطعات کوچک‌تری که ممکن است دارای هم‌پوشانی هم باشند تفکیک می‌کند. به بیان دیگر، دامنه محاسباتی مسئله یعنی $\Omega$، به $d$ زیرناحیه کوچک‌تر که با $\Omega_i$ نشان داده می‌شوند تفکیک می‌شود به طوری که:

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{d} \Omega_i \qquad (۷۲)$$

الگوریتم پاره‌های واحد شامل تعداد $d$ تابع غیرمنفی پیوسته است که دامنه هرکدام از آنها یکی از نواحی کوچک ایجاد شده است و آنها را با $W_i$ نشان می‌دهند. این توابع به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که دارای ویژگی‌های زیر باشند:

$$\begin{aligned} &\mathrm{supp}(W_i) \subseteq \Omega_i \\ &\forall \mathbf{x} \in \Omega: \quad \sum_{i=1}^{d} w_i(\mathbf{x}) = 1 \end{aligned} \qquad (۷۳)$$

حال اگر توابع تقریبی محلی در محدوده هر کدام از زیرناحیه‌ها با یکی از روش‌های قبلی (مثلاً حداقل مربعات وزن‌دار خطا) تعیین شده باشند و در محدوده زیرناحیه $i$ام با $\hat{v}_i$ نشان داده شود، تابع تقریبی کلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} \hat{v}_i(\mathbf{x}) W_i(\mathbf{x}) \qquad (۷٤)$$

همانگونه که بیان شد $\hat{v}_i$ تقریب تابع هدف در محدوده زیرناحیه $i$ام است که با توجه به نقاط درون زیرناحیه و با استفاده از روش‌های تقریب‌سازی قبلی تعیین می‌شود. نحوه

تعیین توابع الگوریتم هم در مراجع [۷٤ و ۷۵] آمده است.
مراجع مختلف، کاربردهای متعددی از توابع پاره‌های واحد را ارائه کرده‌اند. استفاده از این توابع به همراه توابع پایه شعاعی در تحقیق [۷٤ و ۷۸] گزارش شده است. همچنین مرجع [۷۹] ترکیبی از روش پاره واحد با روش احجام محدود را مورد مطالعه قرار داده است و عملاً روش احجام محدود را در مسیر روش‌های بدون شبکه قرار داده است. منابع دیگری هم به بررسی و اصلاح روش پرداخته‌اند و نسخه‌های اصلاح شده‌ای را ایجاد و در حل برخی مسائل به کار برده‌اند که نمونه‌های آن در مراجع [۸۰ و ۸۱] ارائه شده‌اند.

## ٤. روش‌های مبتنی بر نمایش پارامتری

مدل هندسی یک منحنی را می‌توان به دو صورت ضمنی[۵۲] و پارامتری[۵۳] توسط معادلات جبری بیان کرد. در فضای دو بعدی معادله ضمنی به شکل تابع صریحی از $x$ و $y$ بیان می‌شود این تابع مؤلفه‌های مختصاتی $x$ و $y$ نقاط واقع بر منحنی را توسط یک رابطه ضمنی به هم مربوط می‌کند. اما در بیان پارامتری، هرکدام از مؤلفه‌های مختصاتی $x$ و $y$ نقاط واقع بر منحنی، به طور مجزا توسط تابع صریحی از یک متغیر مستقل بیان می‌شوند. حالت کلی دو بیان ضمنی و پارامتری را می‌توان به ترتیب توسط عبارات اول و دوم رابطه زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} &f(x,y)=0 \\ &\mathbf{C}(u)\equiv\big(x(u),y(u)\big) \quad a\le u\le b \end{aligned} \tag{۷۵}$$

به عنوان مثال دایره‌ای با شعاع یک که مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع شده است را می‌توان توسط معادله ضمنی

$$f(x,y)\equiv x^2+y^2-1=0 \tag{۷۶}$$

یا پارامتری

$$\mathbf{C}(u)\equiv\begin{cases} x(u)=\cos u \\ y(u)=\sin u \end{cases} \quad 0\le u\le\frac{\pi}{2} \tag{۷۷}$$

بیان کرد.
به طور مشابه، یک رویه هم توسط یک تابع ضمنی به فرم $f(x,y,z)\equiv 0$ می‌تواند بیان شود. به عنوان مثال کره‌ای با شعاع واحد که مرکز آن بر مبدأ مختصات قرار دارد توسط تابع ضمنی زیر بیان می‌شود:

$$f(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-1=0 \tag{۷۸}$$

یک نمایش پارامتری (که البته منحصر به فرد نیست) برای این کره به صورت زیر می‌تواند ارائه شود:

$$\mathbf{S}(u,v)\equiv\begin{cases} x(u,v)=\sin u\cos v \\ y(u,v)=\sin u\sin v \\ z(u,v)=\cos u \end{cases} \quad \begin{matrix} 0\le u\le\pi \\ 0\le v\le 2\pi \end{matrix} \tag{۷۹}$$

توجه کنید که دو پارامتر مستقل برای معرفی پارامتری رویه مورد استفاده قرار می‌گیرد.
برتری یکی از دو بیان ضمنی یا پارامتری بر دیگری دشوار است. در واقع هر کدام منافع و معایب خاص خود را نسبت به دیگری دارند. یک مدل‌سازی هندسی موفق با کاربرد همزمان هر دو بیان ایجاد می‌شود. در ادامه به مقایسه این دو بیان پرداخته می‌شود [۸۲]:

❖ بیان منحنی‌ها و رویه‌های قطعه‌ای مقید (محدود) به مرزهای هندسی توسط توابع ضمنی دشوار است. در حالی که با تعیین مناسب بازه پارامترها می‌توان منحنی‌ها و رویه‌های قطعه‌ای را توسط توابع پارامتری بیان کرد. از سوی دیگر نمایش یک هندسه نامحدود بدون مرز (مانند خط راستی که به سادگی توسط معادله ضمنی $f(x,y)\equiv ax+by+c=0$ بیان می‌شود) به صورت پارامتری دشوار است.

❖ در حالتی که دامنه پارامتر $u$ بازه $[a,b]$ باشد، نمایش پارامتری $\mathbf{C}(u)$ یک مسیر حرکتی طبیعی از $\mathbf{C}(a)$ تا $\mathbf{C}(b)$ ایجاد می‌کند، در حالی که چنین مسیری در نمایش ضمنی منحنی ایجاد نمی‌شود. با وجود این خاصیت به سادگی می‌توان بازه‌های جزئی‌تری از نقاط را در امتداد این مسیر تعیین کرد و در واقع منحنی را به چندین بخش جزئی تفکیک کرد. درباره رویه‌ها این خاصیت باعث ساده‌سازی ایجاد شبکه المان روی آنها می‌شود.

❖ نمایش پارامتری در کاربردهای عملی برپایه محاسبات عددی برای ایجاد و نمایش اشکال مختلف رایج‌تر و مؤثرتر است. ضرایب بسیاری از توابع پارامتری مانند بیزیر[۵٤] و بی-

اسپلاین[۵۵] دربرگیرنده ویژگی‌های مهم هندسی هستند. این شرایط به ایجاد روش‌های پیش‌رو در طرح اشکال و الگوریتم‌های عددی پایدار با ویژگی‌های هندسی مناسب منجر می‌شود.

❖ پیچیدگی بسیاری از اعمال هندسی و محاسباتی به شدت به روش بیان و نمایش منحنی بستگی دارد. جهت مشخص شدن موضوع به دو حالت زیر توجه کنید:

تعیین و محاسبه یک نقطه روی یک منحنی یا رویه با کاربرد نمایش ضمنی دشوار بوده و نیازمند محاسبه ریشه‌های صفر معادله ضمنی است. حال آن که با کاربرد نمایش پارامتری به سادگی می توان نقاط مختلفی را روی منحنی یا رویه تعیین کرد. به طور معکوس برای بررسی این که نقطه خاصی روی منحنی (رویه) قرار دارد یا نه، نمایش ضمنی کاربرد ساده‌تری دارد.

برای مطالعه بیشتر درباره نمایش‌های ضمنی و پارامتری توابع و ویژگی‌های آنها در مراجع [۸۳-۸۵] آمده‌اند. در این بخش منحصراً درباره مدل‌های نمایش پارامتری بحث می‌شود و معادله پارامتری منحنی برازش شده برتعدادی نقطه پراکنده تعیین می‌شود.

واضح است که با انتخاب دلخواه توابع مختصاتی $x(u)$، $y(u)$ و $z(u)$ می‌توان انواع مختلفی از منحنی‌های هندسی را ایجاد کرد. هرچند در عمل موانعی هم وجود دارند که دسترسی به برخی انواع منحنی‌ها را در سیستم مدل‌سازی به کار گرفته شده ناممکن می‌سازد. بهترین شرایط حل مسئله آن است که توابع محدود گردد به نحوی که

الف- توانایی نمایش دقیق منحنی‌های مورد نظر را داشته باشند

ب- در حالت کلی به طور دقیق، مؤثر و در عین حال ساده قابل پردازش عددی و کامپیوتری باشند

ج- محاسبه تابع و مشتقات آن ساده باشند

د-پردازش عددی توابع نسبت به ارقام اعشار و خطای گرد کردن حساسیت شدید نداشته باشد

هـ-به حجم کمی از حافظه برای ذخیره‌سازی و پردازش نیاز داشته باشند.

یکی از انواع رایج چنین توابعی، چند جمله‌ای‌ها هستند. اگرچه این توابع واجد دو شرط آخر هستند اما قابلیت نمایش دقیق برخی از منحنی‌های مهم را ندارند. بدیهی است چنین منحنی‌هایی باید توسط توابع چند جمله‌ای تقریب‌سازی شوند. در اینجا دو الگوریتم رایج که بر اساس توابع چندجمله‌ای بیان می‌شوند و توابع پارامتری منحنی‌ها را تعیین می‌کنند را بررسی می‌گردد. این دو به ترتیب روش پایه توانی[۵۶] و روش بیزیر هستند. اگر چه این دو روش از نظر ریاضی معادل هم هستند اما خواهیم دید که الگوریتم بیزیر به طور چشمگیر برای نمایش اشکال در کامپیوتر سازگارتر و مؤثرتر است.

### ٤-١- نماش پایه توانی منحنی‌ها

در صورتی که مختصات $n+1$ نقطه در فضای سه‌بعدی مشخص شده باشد، می‌توانیم یک منحنی دارای پایه توانی با مرتبه $n$ را بر آنها برازش گردد. بیان پارامتری این منحنی عبارت است از:

$$\mathbf{C}(u) \equiv \big(x(u), y(u), z(u)\big) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i u^i \qquad 0 \le u \le 1 \tag{۸۰}$$

که در آن $\mathbf{a}_i$ بردار مختصات نقطه $i$ام است. یعنی

$$\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i) \tag{۸۱}$$

بنابراین عبارت (۸۰) را می‌توان به صورت بسط یافته زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{C}(u) \equiv \begin{cases} x(u) = \sum_{i=0}^{n} x_i u^i \\ y(u) = \sum_{i=0}^{n} y_i u^i \\ z(u) = \sum_{i=0}^{n} z_i u^i \end{cases} \qquad 0 \le u \le 1 \tag{۸۲}$$

این عبارت به صورت ماتریسی زیر هم قابل بیان است

$$\mathbf{C}(u) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \vdots \\ u^n \end{bmatrix} \qquad 0 \le u \le 1 \tag{۸۳}$$

با $i$ مرتبه مشتق‌گیری از طرفین معادله (۸۰) و حل معادله حاصل خواهیم داشت:

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{C}^{(i)}(u)\big|_{u=0}}{i!} \qquad (۸٤)$$

که در آن $\mathbf{C}^{(i)}(u)\big|_{u=0}$ مشتق مرتبه $i$ تابع برداری $\mathbf{C}(u)$ در $u=0$ است. $n+1$ تابع $u^i$ توابع پایه نامیده می‌شوند و $\mathbf{a}_i$ ضرایب نمایش پایه توانی هستند.

با معلوم شدن معادله پارامتری منحنی و با داشتن یک $u_0$ مشخص، مختصات نظیر آن از منحنی پایه توانی یعنی $\mathbf{C}(u_0)$ به صورت مؤثر و مطلوب با کاربرد الگوریتم ریاضی موسوم به هرنر[۵۷] [۸۲] به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\text{مرتبه ۱:} && \mathbf{C}(u_0) \equiv \mathbf{a}_1 u_0 + \mathbf{a}_0 \\
&\text{مرتبه ۲:} && \mathbf{C}(u_0) \equiv (\mathbf{a}_2 u_0 + \mathbf{a}_1)u_0 + \mathbf{a}_0 \\
&\text{مرتبه ۳:} && \mathbf{C}(u_0) \equiv \\
& && ((\mathbf{a}_3 u_0 + \mathbf{a}_2)u_0 + \mathbf{a}_1)u_0 + \mathbf{a}_0 \\
&\text{مرتبه ٤:} && \mathbf{C}(u_0) \equiv \\
& && (((\mathbf{a}_4 u_0 + \mathbf{a}_3)u_0 + \mathbf{a}_2)u_0 + \mathbf{a}_1)u_0 + \mathbf{a}_0
\end{aligned} \qquad (۸۵)$$

جهت ایجاد درک بهتر از روابط و توضیحات فوق به نمونه‌های زیر توجه کنید:

**نمونه اول:**

در صورتی که $n=1$ باشد

$$\mathbf{C}(u) \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 u \quad 0 \le u \le 1$$

پاره خط مستقیمی را نشان می‌دهد که بین دو نقطه $\mathbf{a}_0$ و $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1$ واقع است. در این حالت مشتق اول تابع ثابت بوده و امتداد پاره خط را نشان می‌دهد $\left(\mathbf{C}^1(u) \equiv \mathbf{a}_1\right)$.

**نمونه دوم:**

در صورتی که $n=2$ باشد

$$\mathbf{C}(u) \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 u + \mathbf{a}_2 u^2 \quad 0 \le u \le 1$$

در حالت کلی یک قوس سهمی بین دو نقطه $\mathbf{a}_0$ و $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ خواهد بود. قوس سهمی همواره در یک صفحه خاص قرار می‌گیرد.

با بسط تابع پایه توانی به دست آمده به صورت

$$x = x_0 + x_1 u + x_2 u^2$$

$$y = y_0 + y_1 u + y_2 u^2$$

و سپس با حذف پارامتر $u$ همان تابع ضمنی درجه دومی به دست می‌آید که هندسه سهمی را نشان می‌دهد.

**نمونه سوم:**

در صورتی که $n=3$ باشد

$$\mathbf{C}(u) \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 u + \mathbf{a}_2 u^2 + \mathbf{a}_3 u^3 \quad 0 \le u \le 1$$

تابع درجه سوم حاصل یک منحنی کلی را نشان می‌دهد که می‌تواند به طور کامل در فضای سه بعدی تابیده باشد و هرگز در یک صفحه قرار نگیرد. این منحنی می‌تواند دارای نقطه عطف یا نقطه انتقالی تیزگوشه یا حتی حلقه بسته باشد. منحنی تابدار زمانی ایجاد می‌شود که چهار نقطه $\mathbf{a}_0$، $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_3$ همگی در یک صفحه نباشند.

نقطه عطف در یک منحنی صفحه‌ای نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شود که اولاً منحنی مورد بحث در آن هموار باشد (تیزگوشه نباشد) و ثانیاً خط مماس بر منحنی در محل آن از درون منحنی عبور کند. این تعریف نشان دهنده تغییر در جهت تقعر منحنی است. در محل نقطه عطف یا مشتق دوم تابع صفر است و یا بردارهای مشتق اول و دوم با هم موازی هستند.

شرط لازم (و نه کافی) برای تیزی در یک نقطه آن است که مشتق اول در محل آن صفر باشد. یعنی در محل نقطه تیز سرعت صفر است. قواعد ریاضی وجود حلقه هم کاملاً مشخص هستند و در مرجع [۸٦] مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

### ٤-۲- منحنی بیزیر

از آنجا که هر دو الگوریتم پایه‌های توانی و بیزیر از چند جمله‌ای‌ها در بیان توابع مختصات استفاده می‌کنند، از نظر ریاضی هم‌خانواده و معادل محسوب می‌شوند. به بیان دیگر هر منحنی که توسط یکی از این دو الگوریتم قابل بیان باشد، توسط دیگری هم می‌تواند بیان شود. با این حال الگوریتم بیزیر حالت کلی‌تری از روش پایه‌های توانی است. توجه کنید که بحث ما درباره الگوریتم بیزیر نسبتاً خلاصه است [۸۷-۹۰].

الگوریتم پایه‌های توانی دارای معایب زیر است [۸۲]:

الف- این روش در مواجهه با شکل منحنی تا حدودی ناتوان است. در واقع ضرایب $\mathbf{a}_i$، که مختصات چند نقطه خاص را در بر دارند بینش هندسی محدودی نسبت به شکل منحنی ارائه می‌کنند.

ب- الگوریتم‌های اجرایی چند جمله‌ای‌های پایه توانی بیشتر ماهیت جبری دارند تا ماهیت هندسی (مانند الگوریتم هرنر)، بنابراین ارتباط فکری بین هندسه منحنی و تابع برقرار نمی‌شود.

ج- روش‌های پایه توانی از نظر عددی کاملاً ضعیف هستند. به عنوان مثال در صورتی که ضرایب تابع تغییرات شدیدی از نظر بزرگی داشته باشند فرایند محاسباتی هرنر وابسته به ارقام اعشار و نحوه گرد کردن خواهد بود [۹۱].

الگوریتم بیزیر با انگیزه درمان این نقایص ابداع شد. منحنی مرتبه $n$ام بیزیر توسط معادله زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{C}(u) \equiv \left(x(u), y(u), z(u)\right) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)\mathbf{P}_i \qquad 0 \le u \le 1 \qquad (۸۶)$$

توابع پایه $B_{i,n}(u)$ چند جمله‌ای‌های کلاسیک مرتبه $n$ام برنشتین هستند که اگر چه قدمت آن‌ها به سال ۱۹۱۲ باز می‌گردد در مرجع [ ۹۲] به صورت زیر تبیین شده‌اند:

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!}u^i(1-u)^{n-i} \qquad (۸۷)$$

ضرایب هندسی الگوریتم $(\mathbf{P}_i)$ مختصات نقاط مسیر منحنی هدف هستند که اصطلاحاً نقاط کنترل نامیده می‌شوند. برای درک بهتر الگوریتم ارائه شده به نمونه‌های محاسباتی زیر توجه کنید:

**نمونه اول:**

در صورتی که $n = 1$ باشد با کاربرد معادله (۸۷) خواهیم داشت

$$B_{0,1} = (1-u)$$

$$B_{1,1} = u$$

جایگذاری توابع پایه فوق در تابع بیزیر ارائه شده توسط عبارت (۸۶) معادله پارامتری زیر را نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{C}(u) \equiv (1-u)\mathbf{P}_0 + u\mathbf{P}_1$$

تابع به دست آمده نشان دهنده خط راستی است که بین دو نقطه $\mathbf{P}_0$ و $\mathbf{P}_1$ قرار دارد.

**نمونه دوم:**

در صورتی که سه نقطه کنترل وجود داشته باشد و $n = 2$ اختیار شود با کاربرد روابط (۸۶) و (۸۷) منحنی بیزیر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{C}(u) \equiv (1-u)^2\mathbf{P}_0 + 2u(1-u)\mathbf{P}_1 + u^2\mathbf{P}_2$$

معادله حاصل یک قوس سهمی است که بین نقاط $\mathbf{P}_0$ تا $\mathbf{P}_2$ قرار دارد و دارای ویژگی‌های زیر است

الف- چند ضلعی که رئوس آن نقاط کنترل $\mathbf{P}_i$ باشند چند ضلعی کنترل نامیده می‌شود و این چند ضلعی شکل منحنی را به خوبی تقریب می‌زند.

ب- نقاط کنترل ابتدا و انتها در تابع ارائه شده صدق می‌کنند:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{C}(0)$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{C}(1)$$

ج- امتدادهای مماس بر منحنی در دو انتهای آن به ترتیب موازی با بردارهای $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$ و $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$ هستند.

د- منحنی در مثلث $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ محصور (محاط) است.

**نمونه سوم:**

در صورتی که $n = 3$ باشد با کاربرد روابط (۸۶) و (۸۷) خواهیم داشت

$$\mathbf{C}(u) \equiv (1-u)^3\mathbf{P}_0 + 3u(1-u)^2\mathbf{P}_1 + 3u^2(1-u)\mathbf{P}_2 + u^3\mathbf{P}_3$$

ویژگی‌های این تابع هم به صورت زیر بیان می‌شوند:

الف- چند ضلعی کنترل شکل منحنی را به خوبی تقریب می‌زند.

ب- نقاط کنترل ابتدا و انتها در تابع ارائه شده صدق می‌کنند:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{C}(0)$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{C}(1)$$

ج- امتدادهای مماس بر منحنی در دو انتهای آن به ترتیب موازی با $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$ و $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$ هستند.

د- خصوصیت ناحیه محدب[۵۸]: منحنی در ناحیه محدب حاصل از تعریف نقاط کنترل محاط است.

ه- خصوصیت حرکت محدود[۵۹]: هیچ خط راستی بیش از

تعداد دفعاتی که چند ضلعی کنترل را قطع می‌کند، منحنی ایجاد شده را قطع نمی‌کند. (در حالت سه‌بعدی هیچ صفحه‌ای بیش از تعداد دفعاتی که چند وجهی کنترل را قطع می‌کند، رویه ایجاد شده را قطع نمی‌کند). این خاصیت نشان می‌دهد که منحنی بیزیر به خوبی و با فاصله اندک چند ضلعی کنترل را تعقیب می‌کند و بیش از چند ضلعی کنترل دچار چرخش نمی‌شود.

و- در ابتدا یعنی در محل $u=0$ منحنی در امتدادی معادل $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ دوران می‌کند و در انتها یعنی در محل $u=1$ چرخش منحنی در امتدادی معادل $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ است.

ز- وجود حلقه در چندضلعی کنترل در شرایطی می‌تواند باعث ایجاد حلقه در منحنی بیزیر شود و در شرایطی هم منجر به ایجاد حلقه در منحنی نمی‌شود.

در صورتی که مراتب بالاتری از منحنی‌های بیزیر را هم ایجاد کنیم، شرایط فوق در ساختار آن‌ها ملاحظه می‌شود. در هر الگوریتم برازش منحنی، خصوصیات منحنی یا رویه ایجاد شده به انتخاب توابع پایه الگوریتم و خصوصیات هندسی آن‌ها بستگی دارد. در الگوریتم بیزیر این توابع دارای ویژگی‌های زیر هستند:

الف- نامنفی بودن:

$$B_{i,n}(u)\geq 0 \quad (\forall i \;\&\; \forall n)\;\&\left(\forall u \middle| (0\leq u\leq 1)\right) \qquad (۸۸)$$

ب- قسمتی از واحد بودن:

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)=1 \quad \forall n \;\&\left(\forall u \middle| (0\leq u\leq 1)\right) \qquad (۸۹)$$

ج- مقدار واحد در شرایط زیر:

$$B_{0,n}(0)=B_{n,n}(1)=1 \quad \forall n \qquad (۹۰)$$

د- تابع $B_{i,n}(u)$ تنها در یک نقطه از دامنه خود حداکثر خواهد بود. مختصات این نقطه $u=\frac{i}{n}$ است.

ه-خاصیت تقارن[۶۰]:

برای هر مقدار دلخواه $n$، مجموعه چند جمله‌ای‌های $B_{i,n}(u)$ نسبت به نقطه $u=\frac{1}{2}$ متقارن هستند.

و- رابطه بازگشتی[۶۱]:

عبارت زیر که موسوم به رابطه بازگشتی است، توابع مرتبه بالاتر را با توجه به توابع مرتبه پایین محاسبه می‌کند:

$$B_{i,n}(u)=(1-u)B_{i,n-1}(u)+uB_{i-1,n-1}(u) \qquad (۹۱)$$

توجه کنید که در حالات غیرمعمول $i<0$ یا $i>n$ که در خلال کاربرد عبارت بازگشتی رخ می‌دهند، مقدار تابع بیزیر برابر صفر جایگزین می‌شود.

ز- مشتق اول توابع پایه الگوریتم بیزیر به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$B'_{i,n}(u)=\frac{dB_{i,n}(u)}{du}=n\left(B_{i-1,n-1}(u)-B_{i,n-1}(u)\right) \qquad (۹۲)$$

البته باید توجه داشت که در شرایط نامتعارف زیر مقدار صفر جایگزین پارامترها می‌شود:

$$B_{-1,n-1}(u)=B_{n,n-1}(u)=0$$

جهت استفاده از رابطه بازگشتی، ابتدا با استفاده از معادله (۸۷) خواهیم داشت:

$$B_{0,0}(u)=1$$

در ادامه با کاربرد رابطه بازگشتی(۹۱) سایر توابع به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
B_{0,1}(u)&=uB_{-1,0}(u)+(1-u)B_{0,0}(u)\\
&=u\times 0+(1-u)\times 1=1-u\\
B_{1,1}(u)&=uB_{0,0}(u)+(1-u)B_{1,0}(u)\\
&=u\times 1+(1-u)\times 0=u\\
B_{0,2}(u)&=uB_{-1,1}(u)+(1-u)B_{0,1}(u)\\
&=u\times 0+(1-u)\times(1-u)=(1-u)^2\\
B_{1,2}(u)&=uB_{0,1}(u)+(1-u)B_{1,1}(u)\\
&=u\times(1-u)+(1-u)\times u=2u(1-u)\\
B_{2,2}(u)&=uB_{1,1}(u)+(1-u)B_{2,1}(u)\\
&=u\times u+(1-u)\times 0=u^2
\end{aligned}$$

عبارت بازگشتی (۹۱) الگوریتم ساده‌ای را ارائه می‌کند که می‌توان به وسیله آن مقادیر جملات چند جمله‌ای برنشتین را به ازای مقدار مشخصی از پارامتر $u$ محاسبه کرد. اصول این الگوریتم را می‌توان با یک برنامه کامپیوتری به سادگی به کار برد. مسیر محاسبه $B_{1,3}$ در شکل (۳) نشان داده شده است.

با به کار بردن رابطه (۹۲) هم به سادگی می‌توان عبارتی کلی

برای مشتق منحنی بیزیر ارائه کرد. مطابق رابطه (۸۶) منحنی بیزیر به صورت زیر بیان شد:

$$\mathbf{C}(u)\equiv\big(x(u),y(u),z(u)\big)=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(u)\mathbf{P}_i \qquad 0\le u\le 1$$

با مشتق‌گیری از تابع فوق خواهیم داشت:

$$\mathbf{C}'(u)\equiv\left(\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(u)\mathbf{P}_i\right)'=\sum_{i=0}^{n}B'_{i,n}(u)\mathbf{P}_i$$

اعمال رابطه (۹۲) عبارت فوق را به صورت زیر بیان می‌کند:

$$\mathbf{C}'(u)=\sum_{i=0}^{n}n\big(B_{i-1,n-1}(u)-B_{i,n-1}(u)\big)\mathbf{P}_i$$

در نهایت با بسط و ساده‌سازی مجموعه فوق خواهیم داشت:

$$\mathbf{C}'(u)=n\sum_{i=0}^{n-1}B_{i,n-1}(u)\big(\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i\big) \qquad (۹۳)$$

با مشتق‌گیری مجدد از عبارت فوق مشتق دوم تابع بیزیر به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{C}''(u)=n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}B_{i,n-2}(u)\big(\mathbf{P}_{i+2}-2\mathbf{P}_{i+1}+\mathbf{P}_i\big) \qquad (۹۴)$$

با استفاده از روابط (۹۳) و (۹۴) می‌توان مشتقات یک تابع بیزیر را در نقاط مرزی به صورت زیر به دست آورد

$$\mathbf{C}'(0)=n\big(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0\big)$$
$$\mathbf{C}''(0)=n(n-1)\big(\mathbf{P}_0-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2\big)$$
$$\mathbf{C}'(1)=n\big(\mathbf{P}_n-\mathbf{P}_{n-1}\big)$$
$$\mathbf{C}''(1)=n(n-1)\big(\mathbf{P}_n-2\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_{n-2}\big)$$

مطابق عبارات فوق ملاحظه می‌شود که:

- مشتق یک منحنی بیزیر مرتبه $n$ام یک منحنی بیزیر با مرتبه $n-1$ است.
- عبارات حاصل برای مشتقات در دو انتها متقارن هستند. (به دلیل تقارن توابع پایه)
- مشتق مرتبه $k$ام در هریک از نقاط انتهایی فقط به $k+1$ نقطه از نقاط کنترل در آن نقطه بستگی دارد.

یک منحنی بیزیر مرتبه دوم را در نظر بگیرید. تابع نظیر این منحنی به صورت زیر قابل بیان است:

$$n=2 \;\Rightarrow\; \mathbf{C}(u)\equiv\sum_{i=0}^{2}B_{i,n}(u)\mathbf{P}_i$$

با بسط عبارت فوق خواهیم داشت

$$\mathbf{C}(u)\equiv(1-u)^2\mathbf{P}_0+2u(1-u)\mathbf{P}_1+u^2\mathbf{P}_2$$

عبارت فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{C}(u)\equiv$$
$$(1-u)\big[(1-u)\mathbf{P}_0+u\mathbf{P}_1\big]+u\big[(1-u)\mathbf{P}_1+u\mathbf{P}_2\big]$$

با دقت در عبارت فوق ملاحظه می‌شود که عبارات درون کروشه‌ها توابع بیزیر درجه یک هستند. بنابراین می‌توان گفت که تابع بیزیر مرتبه دوم از درون‌یابی خطی دو تابع بیزیر مرتبه یک حاصل می‌شود. در حالت کلی هر نقطه روی $\mathbf{C}(u)$ با کاربرد سه درون‌یابی خطی به دست می‌آید.

به عنوان مثال نقطه $u=u_0$ را در نظر بگیرید. در مرحله اول، با کاربرد درون‌یاب‌های مرتبه اول نقاطی را بین هر دو نقطه کنترل مجاور هم تعیین می‌شود.

$$\mathbf{P}_{1,0}\equiv(1-u)\mathbf{P}_0+u\mathbf{P}_1$$
$$\mathbf{P}_{1,1}\equiv(1-u)\mathbf{P}_1+u\mathbf{P}_2$$

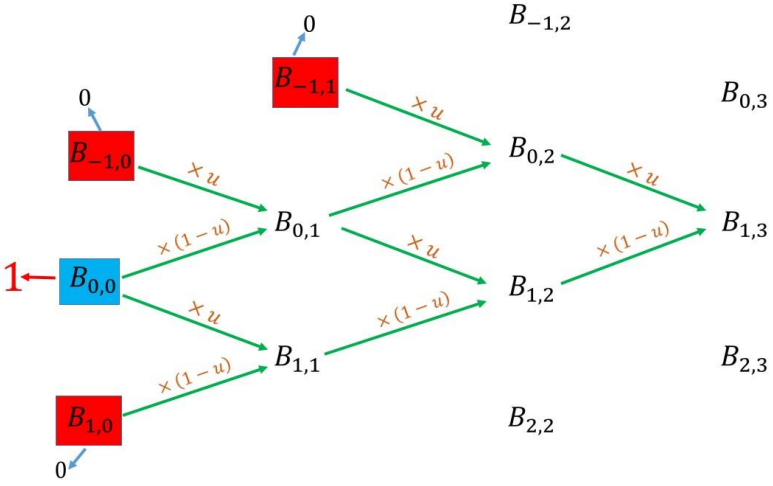
سپس در مرحله دوم باز هم با درون‌یابی مرتبه یک، نقاط جدیدی را بین نقاط مجاور حاصل شده در مرحله قبل محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{P}_{2,0}\equiv(1-u)\mathbf{P}_{1,0}+u\mathbf{P}_{1,1}$$

در این حالت چون تنها سه نقطه کنترل وجود داشت، در مرحله دوم فقط یک نقطه حاصل می‌شود که همان نقطه نظیر $u=u_0$ روی منحنی بیزیر است یعنی:

$$\mathbf{C}(u_0)\equiv\mathbf{P}_{2,0}$$

بدیهی است که اگر نقاط کنترل اولیه بیشتر بودند، مراحل محاسباتی فوق همانند آنچه بیان شد ادامه می‌یافتند تا در نهایت




**شکل ۳- نحوه محاسبه $B_{1,3}$ توسط رابطه بازگشتی**

یک نقطه حاصل شود. با وجود $n+1$ نقطه کنترل اولیه، $n$ مرحله محاسباتی ایجاد می‌شد و نقطه مورد نظر روی منحنی بیزیر با مرتبه $n$ قرار می‌گرفت. رابطه کلی زیر مرحله $j$ام محاسبات را نشان می‌دهد:

$$\mathbf{P}_{j,m} \equiv (1-u)\mathbf{P}_{j-1,m-1} + u\mathbf{P}_{j-1,m} \qquad (۹۵)$$
$$j = 1,\cdots,n \quad m = 1,\cdots,n+1-j$$

در انتهای این فصل به مقایسه الگوریتم‌های بیزیر و پایه‌های توانی می‌پردازیم. بسیار واضح است که الگوریتم بیزیر از مبنای هندسی قویتری برخوردار است. روابط (۹۳) و (۹۴) که مشتقات توابع بیزیر را بیان می‌کنند به همراه استقرار منحنی در سطح محدب، الگوریتم را مستعد کاربردهای وسیع در طرح منحنی‌ها می‌کند. نقاط کنترل ابزار قدرتمندتری را نسبت به روش پایه‌های توانی برای طرح شکل منحنی در اختیار طراح قرار می‌دهند. به علاوه الگوریتم بازگشتی نسبت به روش هرنر حساسیت کمتری به خطاهای عددی دارد. با در نظر گرفتن این که الگوریتم بازگشتی تکرار ساده درون‌یابی‌های خطی بین نقاط واقع در همسایگی منحنی است مطالب فوق به سادگی درک می‌شوند. شاید تنها ایراد الگوریتم بیزیر این باشد که ارزیابی و تطبیق یک نقطه خاص با منحنی دشوار است.

### ٤-٣- درون‌یابی قطعه محور[٦٢] اسپلاین

برازش یک منحنی واحد بر $n+1$ نقطه هندسی $\{\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_n\}$ به گونه‌ای که از همه این نقاط عبور کند با توجه به تعداد نقاط موجود، منجر به ایجاد توابع جبری با مرتبه توانی بزرگ می‌شود که کاربرد آن‌ها در فرایندهای محاسبات عددی دشوار است. نقاطی که منحنی برازش شده از آن‌ها عبور می‌کند نقاط کنترل نامیده می‌شوند. برای رفع مشکل مذکور و کاهش درجه تابع برازش شده از توابع قطعه محور استفاده می‌شود. این فرایند، دامنه مورد نظر برای برازش منحنی را به چندین قسمت کوچک‌تر که شامل تعداد کمتری از نقاط است تفکیک می‌کند و بر هر کدام از این قطعات، یک منحنی عبور می‌دهد و در نهایت از ترکیب توابع این منحنی‌ها مقدار تابع را در هر نقطه دلخواه برآورد می‌کند [۸۲]. از این پس به هر کدام از جزء منحنی‌های برازش شده یک منحنی قطعه‌ای و به دامنه هر کدام از آن‌ها یک قطعه می‌گویند. از نظر هندسی به نقاط واقع در دو انتهای هر کدام از قطعات دامنه، نقاط قطع[٦٣] می‌گویند. نقاط قطع در واقع محدوده هر قطعه را مشخص می‌کنند. در حالت کلی نقاط قطع و نقاط کنترل مستقل از هم هستند و توابع قطعه‌ای برازش شده لزوماً از نقاط قطع نمی‌گذرند. اما جهت ایجاد پیوستگی مرتبه صفر، معمولاً در محل نقاط قطع هم نقطه کنترل در نظر گرفته می‌شود. به هر

حال اگر توابع قطعه‌ای مشخص شوند، می‌توانند نقش توابع پایه را در یک نمایش سری محدود ایفا کنند و تابع هدف را به صورت زیر ارزیابی کنند:

$$\mathbf{C}(u) \equiv \sum_{i=0}^{n} f_i(u)\mathbf{P}_i \qquad (۹۶)$$

از جمله روش‌هایی که توابع پایه رابطه (۹۶) را به راحتی معرفی می‌کند روش اسپلاین است. رابطه (۹۶) با اندکی تغییر توسط الگوریتم اسپلاین به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{C}(u) \equiv \sum_{i=0}^{n} N_{i,P}(u)\mathbf{P}_i \qquad (۹۷)$$

در این رابطه $N_{i,P}$ توابع پایه مرتبه P اسپلاین بوده و $\mathbf{P}_i$ هم نقاط کنترل را نشان می‌دهد.

برای تعیین توابع پایه، الگوریتم اسپلاین ضمن گذراندن هر کدام از توابع قطعه‌ای از نقاط دامنه نظیر خود، مقادیر مشتقات دو تابع قطعه‌ای مجاور را در نقطه قطع مشترک برابر قرار می‌دهد. با انجام چنین عملیاتی می‌توان پیوستگی تابع درون‌یاب را تا هر مرتبه دلخواهی تضمین کرد. برای بیان توابع پایه اسپلاین و بیان ویژگی‌های آن‌ها روش‌های مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به الگوریتم تفاضل‌های تقسیم شده[۶۴]، سری‌های توانی[۶۵] [۹۳]، روش شکوفایی[۶۶] [۹۴] و فرمول بازگشتی[۶۷] [۹۵ و۹۶] اشاره کرد. در متن حاضر با توجه به سادگی کاربرد رابطه بازگشتی به اختصار آن را بررسی می‌شود.

در صورتی که قطعه iام که نقاط قطع آن به ترتیب $u_i$ و $u_{i+1}$ هستند را در نظر گرفته شود، تابع مرتبه صفر نظیر این قطعه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (۹۸)$$

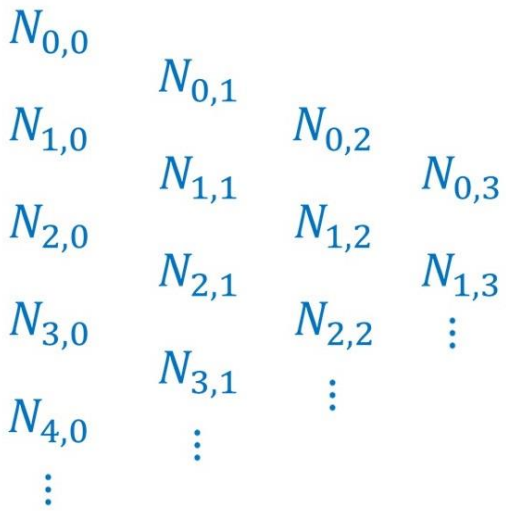
و با معلوم شدن آن، عبارت زیر توابع پایه مراتب بالاتر را ایجاد می‌کند:

$$N_{i,p}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \qquad (۹۹)$$

مطابق روابط فوق با معلوم بودن تابع پایه مرتبه صفر از رابطه (۹۸)، توابع مراتب بالاتر به ترتیب با کاربرد متوالی رابطه (۹۹) به دست می‌آیند. ملاحظه می‌شود که تابع پایه مرتبه صفر عملاً یک تابع پله‌ای است که در دامنه خود برابر واحد و در سایر حوزه‌ها برابر صفر است. همچنین توابع پایه مرتبه بالاتر از ترکیب دو تابع پایه مرتبه قبل در قطعه مورد بحث و قطعه مجاور آن به دست می‌آید. به هر حال با معلوم بودن نقاط حوزه و مرتبه لازم برای درون‌یابی به راحتی می‌توان توابع پایه را ایجاد کرد. لازم به ذکر است که در صورت مواجهه با عبارت بی‌معنی $\frac{0}{0}$ آن را برابر صفر منظور می‌شود. تابع پایه ایجاد شده که بر اساس مشخصات یک قطعه خاص تعیین شده است، در محدوده کل فاصله درون‌یابی قابل کاربرد است. محاسبه توابع پایه مرتبه P را با استفاده از مثلث بدون راس شکل (٤) می‌توان انجام داد.

## ۵- نتیجه‌گیری

نیاز به درون‌یابی توابع جبری به عنوان بخشی از الگوریتم‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل، محققین علوم مهندسی و پایه را بر آن داشت تا از گذشته‌های دور تحقیقات وسیعی را بر ابداع و توسعه روش‌های درون‌یابی برنامه‌ریزی کنند که به شرح نمونه‌هایی از آن‌ها در این مقاله پرداخته شد. در مسیر ابداع الگوریتم‌های درون‌یاب، حرکت به سوی ایده‌آل‌های محاسباتی، هدف اصلی محققین بوده است. استقلال از آرایش نقاط و نحوه پراکندگی آن‌ها در زیرناحیه‌های محاسباتی از اصلی‌ترین شاخصه‌های یک الگوریتم درون‌یابی موفق است. در بسیاری موارد و به ویژه زمانی که از پایه‌های چند جمله‌ای و آرایش منظمی از نقاط استفاده می‌شود، تعداد نقاط واقع در زیرناحیه‌ها هم بر این شاخص تأثیرگذار است. در چنین شرایطی تعیین شاخصی برای حداقل تعداد نقاط درون زیرناحیه‌ها ضروری است. لازم به ذکر است که کوچک بودن زیر ناحیه‌های محاسباتی که شرط فشردگی نامیده می‌شود، خود از معیارهای




**شکل ٤- مثلث بدون راس برای محاسبه توابع پایه اسپلاین**

یک درون‌یاب مناسب است که عملاً در برخی موارد در تقابل با شرایط فوق قرار می‌گیرد پرهیز از ناپایداری عددی دیگر شاخصه مهم در ساختار روش‌های درون‌یابی است. ناپایداری عددی به صورت تغییرات شدید نتایج الگوریتم با ایجاد تغییرات مختصری در هندسه زیرناحیه‌ها اتفاق می‌افتد و در بدترین شرایط منجر به عدم توفیق و واگرایی الگوریتم می‌شود. تغییر ماهیت چند جمله‌های پایه، چرخش دستگاه مختصات و کاربرد روش‌های مثلثی‌سازی، از راهکارهای غلبه بر این معضل محاسباتی است.

پس از ایجاد پایداری عددی و استقلال نتایج الگوریتم از آرایش نقاط، اهداف بعدی می‌توانند سازگاری و پیوستگی نتایج الگوریتم باشند. بدین معنی که اولاً الگوریتم قابلیت همگرایی به نتایج دقیق و شرایط بازتولید توابع هدف را تا مرتبه خاصی داشته باشد و ثانیاً تابع و مشتقات آن تا مرتبه مورد نظر پیوسته باشند. ایجاد این دو هدف با دقت در جزئیات الگوریتم و ایجاد شرایطی برای تأثیرگذاری آرام و تدریجی تغییرات زیرناحیه‌ها بر محاسبات می‌تواند محقق شود. در بسیاری از الگوریتم‌های درون‌یابی توابع وزن چنین شرایطی را بر فضای الگوریتم حاکم می‌کند.

وجود شرایط دلتای کرونیکر، نقطه جذاب دیگری است که توانایی محاسباتی الگوریتم را به ویژه در برابر مرزهای ضروری محیط تقویت می‌کند. اعمال شرایط مرزی ضروری در الگوریتم‌های حل معادلات دیفرانسیلی که درون‌یاب‌های آنها واجد این شرط هستند بسیار آسان است. اما در صورتی که الگوریتم واجد خصوصیات دلتای کرونیکر نباشد برای اعمال شرایط مرزی ضروری به الگوریتم‌های دیگری مانند روش ضرایب جریمه[٦٨] یا ضرایب لاگرانژ[٦٩] نیاز خواهد بود که باعث طولانی و پیچیده شدن روند حل معادلات دیفرانسیل می‌شود.

در کنار تمامی شرایط مطلوب محاسباتی فوق سادگی کاربرد و روانی محاسبات الگوریتم دیگر خصیصه‌ای است که نمی‌توان از آن چشم پوشید. الگوریتم‌های پیچیده اگرچه واجد تمامی شرایط مطلوب فوق باشند به دلیل دشواری برنامه‌ریزی و هزینه‌های محاسباتی و صرف زمان زیاد برای انجام محاسبات فاقد قابلیت کاربرد عملی خواهند بود و عملاً مورد اقبال عموم هم قرار نمی‌گیرند.

واضح است که ابداع یک الگوریتم درون‌یابی که واجد تمامی شاخصه‌های فوق باشد اگر غیرممکن نباشد بسیار دشوار است. بنابراین هدف اصلی محققین از انجام تلاش‌های بی‌وقفه، ابداع یک الگوریتم درون‌یاب بهینه است که مهم‌ترین شرایط لازم را به طور کامل محقق کند و تا حدود زیادی به شرایط کم

اهمیت‌تر نزدیک باشد. مسیری که از گذشته‌های دور آغاز شده و هنوز در حال پیمایش و تکامل است.

**واژه‌نامه**

1. Interpolation
2. Approximation
3. Meshless
4. Stable
5. Instability
6. Reproduce
7. Subdomain
8. Continuity
9. Consistency
10. compact subdomain
11. banded system matrix
12. essential boundary conditions
13. finite integral representation methods
14. smoothed particle hydrodynamics
15. reproducing kernel particle method
16. finite series representation methods
17. least square method
18. weighted least square method
19. moving least square method
20. point interpolation methods
21. polynomial point interpolation method
22. radial point interpolation methods
23. partition of unity methods
24. parametric representation methods
25. local domains
26. smoothing domains
27. influence domains
28. weight functions
29. finite element method
30. basic functions
31. finite difference
32. taylor series
33. strong form
34. shape functions
35. dirac delta
36. smoothed function
37. kronecker delta
38. bell shaped
39. cubic spline
40. Wavelet
41. moments of weight
42. corrected weight functions
43. hierarchical partition of unity
44. diffuse element method
45. element free galerkin method
46. meshless local petrov galerkin method
47. finite sphere method
48. linearly independent
49. Multiquadric
50. Gaussian
51. Exponential
52. implicit equations
53. parametric functions
54. Bezier
55. B-spline
56. power basis
57. horner's method
58. convex hull property
59. variation diminishing property
60. Symmetry
61. recursive definition
62. piece wise
63. break point
64. divided differences
65. truncated power functions
66. Blossoming
67. recurrence formula
68. penalty function
69. lagrange multiplier

## References

## منابع


1. Liu G. R., “Moving Beyound the Finite Element Method”, *Mesh Free Methods*, CRC PRESS, Florida, 2000.
2. Liu M. B., and Liu G. R., “Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): An Overview and Recent Developments”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 17, pp.25-76, 2000.
3. Lucy L. B., “A Numerical Approach to The Testing of The Fission Hypothesis”, *Astronomical Journal*, Vol. 82(12), pp.1013-1024, 1977.
4. Gingold R. A. and Monaghan J.J., “Smoothed Particle Hydrodynamics, Theory and Application to Non-Spherical Stars”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
5. Monaghan J. J., “Smoothed Particle Hydrodynamics”, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 30, pp. 543-574, 1992.
6. Fulk D.A., and Quinn D.W., “An Analysis of 1-D Smoothed Particle Hydrodynamics Kernels”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 126(1), pp.165–180, 1996.
7. Liu M.B., Liu G.R., and Lam K.Y., “Constructing Smoothing Functions in Smoothed Particle Hydrodynamics with Applications”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 155(2), pp. 263–284, 2003.

8. Monaghan J.J., "Why Particle Methods Work", *SIAM (Society for Industrial and Applied Mechanics)*, Vol. 3(4), pp. 422-433, 1982.
9. Liu W.K., Adee J., Jun S., and Belytschko T., "Reproducing Kernel Particle Methods for Elastic and Plastic Problems", *Advanced Computational Methods for Material Modeling*, pp. 175-190, 1993.
10. Morris J.P., "A Study of the Stability Properties of Smooth Particle Hydrodynamics", *Publication of Astronomical Society of the Australia*, Vol. 13(1), pp. 97–102, 1996.
11. Omang M., Borve S., and Trulsen J., "Alternative Kernel Functions for Smoothed Particle Hydrodynamics in Cylindrical Symmetry", *Shock Waves*, Vol. 14(4), pp. 293–298, 2005.
12. Jin H.B., and Ding X., "On Criterions for Smoothed Particle Hydrodynamics Kernels in Stable Field", *Journal of Computational Physics*, Vol. 202(2), pp. 699– 709, 2005.
13. Swegle, J.W., Hicks D.L., and Attaway S.W., "Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis", *Journal of Computational Physics*, Vol. 116(1), pp. 123– 134, 1995.
14. Capuzzo-Dolcetta, R., and Di Lisio R., "A Criterion for the Choice of the Interpolation Kernel in Smoothed Particle Hydrodynamics", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 34(4), pp. 363–371, 2000.
15. Monaghan J.J., and Lattanzio J.C., "A Refined Particle Method for Astrophysical Problems", *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 149(1), pp. 135–143, 1985.
16. Morris J.P., "Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics with Applications", *Monash University*, 1996.
17. Libersky L. and Petschek A.G., "Smooth Particle Hydrodynamics with Strength of Materials", Proceedings of Advances in the Free-Lagrange Method (lecture notes in physics), Jackson Lake Lodge, Moran, Wyoming, pp. 248-257, 1990.
18. Johnson G.R., Peterson E.H. and Stryrk R. A., "Incorporation of an SPH Option into the EPIC Code for a Wide Range of High Velocity Impact Computations", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 14, pp. 385-394, 1993.
19. Randles P.W., and Libersky L.D., "Smoothed Particle Hydrodynamics: Some Recent Improvements and Applications", *Applied Mechanical Engineering*, Vol. 139: pp. 1-4, 1996.
20. Liu W.K., Cgen Y., Jun S., Chen J. S., Belytschko T., Pan C., Uras R. A. and Chang C.T., "Overview and Applications of the Reproducing Kernel Particle Methods", *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 3(1): pp. 3-80, 1996.
21. Haar, A., "Zur Theorie dr orthogonalen Funktionsysteme", *Mathematische Annelen*, Vol. 69, pp. 331–371, 1910.
22. Glowinski, R., Lawton, W.M., Ravachol, M. and Tenenbaum, E., "Wavelets Solution of Linear and Nonlinear Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems in One Space Dimension", Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, SIAM, Philadelphia, pp. 55–120, 1990.
23. Liu W.K., Jun S., and Zhang Y.F., "Reproducing Kernel Particle Methods", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20(8,9), pp. 1081-1106, 1995.
24. Liu W.K., Chen Y., Chang C.T., and Belytschko T., "Advances in Multiple Scale Kernel Particle Methods", *Computational Mechanics*, Vol.18, pp. 73-111, 1996.
25. Liu W.K., Jun S., Sihling D.T., Chen Y., and Hao W., "Multiresolution Reproducing Kernel Particle Method for Computational Fluid Dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 24, pp.1391-1415, 1997.
26. Chen J.S., Pan C., Wu C.T., and Liu W.K., "Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Analysis of Nonlinear Structures", *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 195-228, 1996.
27. Mosava V., "Reproducing Kernel Particle Method and its Modification", *Mathematica Bohemica*, Vol. 4, pp. 383-392, 2009.
28. Babuska I., Banerjee U., and Osborn J.E., "Survey of Meshless and Generalized Finite Element Methods: A Unified Aapproach", *Acta Numerica*, Vol. 12, pp. 1–125, 2003.
29. Chen J.S., Pan C., and Wu C.T., "Large Deformation Analysis of Rubber Based on a Reproducing Kernel Particle Methods", *Computational Mechanics*, Vol. 19, pp. 211–227, 1997.
30. Li S., and Liu W.K., "Reproducing Kernel Hierarchical Partition of Unity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 251–317, 1999.
31. Joyot P., Trunzierb J., and Chinesta F., "Enriched Reproducing Kernel Approximation: Reproducing Functions with Discontinuous Derivatives", *Meshfree Methods for Partial Differential Equation II*, Springer, Berlin: pp. 93–107, 2004.
32. Uras R.A., Chang C.T., Chen Y., and Liu W.K., "Multiresolution Reproducing Kernel Particle Methods in Acoustics", *Journal of Computational Acoustics*, Vol. 5(1), pp. 71-94, 1997.
33. Walsh J.L., "Some Interpolation Series", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 41(5), pp. 300-308, 1934.
34. Stigler S.M., "The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty Before 1900", *Harvard University Press*, ISBN 978-0-674-40340-6., 1986.
35. Jeffrey M.S., "Galton, Pearson, and the Peas: A Brief History of Linear Regression for Statistics Instructors", *Journal of Statistics Education*, Vol.

9(3), 2001.
36. Golub G.H., and Loan F.V., "Matrix Computations", *The John Hopkins University Press*, Baltimore and London, 1996.
37. Nay R.A., and Uktu S., "An Alternative for the Finite Element Method", *Variational Methods in Engineering*, Vol. 1, 1972.
38. Batina J., "A Gridless Euler/Navier-Stokes Solution Algorithm for Complex Aircraft Applications", *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 93-0333, Reno NV, Januvary, pp. 11-14, 1993.
39. Cohen A., Davenport M.A., and Leviatan D., "On the Stability and Accuracy of Least Squares Approximations", *Foundations of Computational Mathematics*, Vol. 13, pp. 819-834, 2013.
40. Migliorati G., Nobile F., and Tempone R., "Convergence Estimates in Probability and in Expectation for Discrete Least Squares with Noisy Evaluations at Random Points", *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 142, pp. 167–182, 2015.
41. Cohen A., and Migliorati G., "Optimal Weighted Least-Squares Methods", *SMAI Journal of Computational Mathematics*, Vol. 3, pp. 181-203, 2017.
42. Doostan A., and Hampton j., "Coherence Motivated Sampling and Convergence Analysis of Least Squares Polynomial Chaos Regression", *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, Vol. 290, pp. 73–97, 2015.
43. Jakeman J.D., Narayan A., and Zhou T., "A Christoffel Function Weighted Least Squares Algorithm for Collocation Approximations", *Mathematics of Computation*, Vol. 86, pp. 1913–1947, 2017.
44. Solaimon O.M., "Application of Weighted Least Squares Regression in Forecasting", *International Journal of Recent Research in Interdisciplinary Sciences (IJRRIS)*, Vol. 2(3), pp. 45-54, 2015.
45. Chatterjee S., and Hadi A.S., "Regrassion Analysis by Example", *John Wiley and Sons*, 2006
46. Nayroles B., Touzot G., and Villon P., "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements", *Computational Mechanics*, Vol. 10, pp. 307-318, 1992.
47. Belytschko T., Lu Y., and Gu L., "Element Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.
48. Atluri S.N., and Zhu T., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", *Computational Mechanics*, Vol. 22, pp. 117-127, 1998.
49. De S., and Bathe K. J., "The Method of Finite Spheres", *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 329-345, 2000.
50. Onate E., Idelson S., Zienkiewicz O.C., and Taylor R.L., "A Finite Point Method in Computational Mechanics Applications to Convective Transport and Fluid Flow", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 3839-3866, 1996.
51. Onate E., Idelson S., Zienkiewicz O.C., and Taylor R.L., "A Stabilized Finite Point Method for Analysis of Fluid Mechanics Problems", *Computer Methods for Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139(1-4), pp. 315-347, 1996.
52. Onate E., Perazzo F., and Miquel J., "A Finite Point Method for Elasticity Problems", *Computers and Structures*, Vol. 79, pp. 2151-2163, 2001.
53. Onate E., "Derivation of Stabilized Equations for Advective-Diffusive Transport and Fluid Flow Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 151(1-2), pp. 233-267, 1998.
54. Lancaster P., and Salkauskas K., "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods", *Mathematics of Computation*, Vol. 37(155), pp. 141-158
55. Cleveland W.S., "Visualizing Data, AT & T Bell Laboratories", *Murray Hill*, NJ, 1993.
56. Dolbow J., and Belytschko T., "An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method", *Archives of Computational Methods in Engineering (State of the art reviews)*, Vol. 5(3), pp. 207-241, 1998.
57. Krongauz Y., and BelytSchko T., "Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations Using Finite Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 131(1-2), pp. 133-145, 1996.
58. BelytSchko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., and Krysl P., "Meshless Method: An Overview and Recent Developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 3-47, 1996.
59. Liu G.R., and Gu Y.T., "A Point Interpolation Method for Two Dimensional Solids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 937-951, 2001.
60. Liu G.R., and Gu Y.T., "A Matrix Triangularization Algorithm for the Polynomial Point Interpolation Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192(19), pp. 2269-2295, 2003.
61. Wang J.G., and Liu G.R., "Radial Point Interpolation Method for Elastoplastic Problems", *Proceeding of 1st International Conference on Structural Stability and Dynamics*, December 7-9, Taipei, Taiwan, pp. 703-708, 2000.
62. Hardy R.L., "Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 76(8), pp. 1905-1915, 1971.
63. Hardy R.L., "Theory and Applications of the Multiquadric-Biharmonic Method 20 Years of Discovery 1968-1988", *Computers and Mathematics*

*with Applications*, Vol.19(8,9), pp. 163-208, 1990.
64. Kansa E.J., "Multiquadrics-A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics-I Surface Approximations and Partial Derivative Estimates", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 19(8,9), pp. 127-145, 1990.
65. Kansa E.J., "Multiquadrics-A scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics-II", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 19(8,9), pp. 147-161, 1990.
66. Coleman C.J., "On the Use of Radial Basis Functions in the Solution of Elliptic Boundary Value Problems", *Computational Mechanics*, Vol. 17, 418-422, 1996.
67. Sharan M., Kansa E.J., and Gupta S., "Application of the Multiquadric Method for Numerical Solution of Elliptic Partial Differential Equations", *Applied Mathematics and computation*, Vol. 84, pp. 275-302, 1997.
68. Wendland H., "Error Estimates for Interpolation by Compactly Supported Radial Basis Functions of Minimal Degree", *Journal of Approximation Theory*, Vol. 93, pp. 258-396, 1998.
69. Franke C., and Schaback R., "Convergence Order Estimates of Meshless Collocation Methods Using Radial Basis Functions", *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 8(4), pp. 381–399, 1998.
70. Cheng A.H.D., Goldberg M.A., Kansa E.J., and Zammito G., "Exponential Convergence and h-c Multiquadric Collocation Method for Partial Differential Equations", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol.19(5), pp. 571–694, 1971.
71. Felipe M.A.A., "Radial Basis Functions and Related Models", *Signal Processing*, Vol. 45, pp. 37-58, 1995.
72. Wang J.G., and Liu G.R., "A Point Interpolation Meshless Method Based on Radial Basis Functions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54(11), pp. 1623-1648, 2002.
73. Shepard D., "A Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly-Spaced Data", *Proceedings of the 23rd National Conference ACM*, pp. 517-523, 1968.
74. Wendland H., "Scattered Data Approximation", *Cambridge University Press*, Cambridge, 2005.
75. Cavoretto R., "Two and Three Dimensional Partition of Unity Interpolation by Product-Type Functions", *Applied Mathematics and Information Science*, Vol. 9(1), pp. 1-8, 2015.
76. Melenk J.M., and Babuska I., "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 289-314, 1996.
77. Babuska I., and Melenk J.M., "The Partition of Unity Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 727-758, 1997.
78. Cavoretto R., "Adaptive Radial Basis Function Partition of Unity Interpolation: A Bivariate Algorithm for Unstructured Data", *Journal of Scientific Computing*, Vol. 87(41), 2021.
79. Junk M., "Do Finite Volume Methods Need a Mesh?", *Meshfree Methods for Partial Differential Equations*, pp. 223-238, 2003.
80. Heryudono A., and Raessi M., "Adaptive Partition of Unity Interpolation Method with Moving Patches", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 210, pp. 49-65, 2023.
81. Cavoretto R., DeMarchi S., DeRossi A., Perracchione E., and Santin G., "Partition of Unity Interpolation Using Stable Kernel-Based Techniques", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 116, pp. 95-107, 2017.
82. Piegl L., and Tiller W., "The NURBS Book", *Springer*, New York, 1997.
83. Faux I.D., and Pratt M.J., "Computational Geometry for Design and Manufacture", *Ellis Horwood Ltd.*, Chichester, 1982.
84. Mortenson M.E., "Geometric Modeling", *John Wiley*, New York, 1985.
85. Beach R.C., "An Introduction to the Curves and Surfaces of Computer Aided Design", *Van Nostrand Reinhold*, New York, 1991.
86. Su B., and Liu D., "Computational Geometry-Curves and Surface Modeling", *Academic Press*, Boston, 1989.
87. Rogers D.F., and Adams J.A., "Mathematical Elements for Computer Graphics", *McGraw-Hill*, New York, 1990.
88. Gordon W.J., and Riesenfeld R.F., "Bernstein-Bezier Methods for the Computer-Aided Design of Free-Form Curves and Surfaces", *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 21(2), pp. 293-310, 1974.
89. Forrest A.R., "Interactive Interpolation and Approximation by Bezier Polynomials", *The Computer Journal*, Vol. 15(1), pp. 71-79, 1972.
90. Farin G.E., "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design- A Practical Guide", *Academic Press*, Boston, 1993.
91. Daniel M., and Daubisse J.C., "The Numerical Problem of Using Bezier Curves and Surfaces in the Power Basis", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 6, pp. 121-128, 1989.
92. Lorentz G. G., "Bernstein Polynomials", *Chelsea Publishing Co*., New York, 1986.
93. Schoenberg I.J., "Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 4, pp. 45-99, 1946.
94. Ramshaw L., "Blossoming: A Connect-the-Dots

Approach to Splines", *Report 19, Digital, System Research Center*, Palo Alto, CA, 1987.
95. Cox M.G., "The Numerical Evaluation of B-Splines", *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, Vol.10, pp. 134-149, 1972.
96. De Boor C., "On Calculating with B-Splines", *Journal of Approximation Theory*, Vol. 6, pp. 50-62, 1972.