



## Nonlinear free vibration analysis of moderately thick sandwich plates with viscoelastic core using finite strip method

Arezoo Hajrahimi, Nasrin Jafari\* and Saeid Sarrami

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

**Abstract:** Sandwich plates as structural members, have received a lot of attention in industrial structures and large construction projects due to their low specific weight, resistance to fatigue and high bending strength. Since Industrial structures are commonly reposed to dynamic loads, plate vibration can result in injury to structures, especially when the excitation frequency is close to the natural frequency of the structure. Therefore, nonlinear vibration analysis of plates is one of the most attended topics in the dynamics of structures. In this article, the nonlinear free vibration of sandwich plates with a viscoelastic core is studied based on von Karman's assumptions and using the First-order shear deformation theory. The viscoelastic properties of the plate core follow Boltzmann's integral law. Also, the Laplace transform is used to convert equations from the time domain to the Laplace domain. For the discretization of the equations, the finite strip numerical method is used. Finally, by numerically solving an eigenvalue problem in the Laplace-Carson domain, the nonlinear frequencies of sandwich plates with a viscoelastic core with different vibration amplitudes are calculated. The results show that, with the increase of the vibration amplitude and the coefficients of the relaxation function of the viscoelastic core, the ratio of the nonlinear frequencies decreases in this type of plates.

**Keywords:** Sandwich plates, Viscoelastic core, Finite strip method, Nonlinear free vibration, Boltzmann's integral, Von Karman's assumptions, First-order shear deformation theory.

Received: Mar. 03, 2024; Revised: Apr. 18, 2024; Accepted: Apr. 23, 2024; Published Online: Jul. 22, 2024.

\* Corresponding Author: [jafarin@iut.ac.ir](mailto:jafarin@iut.ac.ir)

How to Cite: Hajrahimi Arezoo, Jafari Nasrin and Sarrami Saeid, Nonlinear free vibration analysis of moderately thick sandwich plates with viscoelastic core using finite strip method, Journal of Computational Methods in Engineering; 2024, 43(1), 123-140; DOI: 10.47176/jcme.43.1.1028





## تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های ساندویچی نسبتاً ضخیم با هسته ویسکوالاستیک به روش نوار محدود

آرزو حاج رحیمی، نسرين جعفری\* و سعيد صرامی<sup>ID</sup>

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

**چکیده** - ورق‌های ساندویچی به عنوان اعضای سازه‌ای، به علت وزن مخصوص پایین، مقاومت در برابر خستگی و نیز مقاومت خمشی بالا در سازه‌های صنعتی و پروژه‌های بزرگ عمرانی مورد توجه بسیار قرار گرفته‌اند. از آنجا که سازه‌های صنعتی معمولاً تحت بارهای دینامیکی قرار می‌گیرند، لرزش صفحات می‌تواند منجر به آسیب سازه‌ها شود به ویژه وقتی فرکانس تحریک نزدیک به فرکانس طبیعی سازه باشد. بنابراین تحلیل ارتعاش غیرخطی ورق‌های ساندویچی یکی از موضوعات پر کاربرد در دینامیک سازه‌ها به شمار می‌رود. در این مقاله ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک بر اساس فرضیات ون کارمن و با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول مورد مطالعه قرار می‌گیرد. خواص ویسکوالاستیک هسته‌ی ورق از قانون انتگرال بولتزمن پیروی می‌کند. همچنین از تبدیل لاپلاس برای تبدیل معادلات از حوزه زمان به دامنه لاپلاس استفاده می‌شود. برای گسسته‌سازی معادلات از روش عددی نوار محدود استفاده می‌شود. در نهایت با حل عددی مسئله‌ای مقدار ویژه در حوزه لاپلاس کارسون فرکانس‌های غیرخطی ورق‌های ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک با دامنه‌های ارتعاش متفاوت محاسبه می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دامنه ارتعاش و ضرایب تابع آسودگی هسته ویسکوالاستیک نسبت فرکانس‌های غیرخطی در این گونه از ورق‌ها کاهش می‌یابد.

**واژه‌های کلیدی:** ورق‌های ساندویچی، هسته ویسکوالاستیک، روش نوار محدود، ارتعاش آزاد غیرخطی، انتگرال بولتزمن، فرضیات ون کارمن، تئوری برشی مرتبه اول.

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۱۲/۱۳، بازنگری: ۱۴۰۳/۰۱/۳۰، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۰۴، اولین انتشار: ۱۴۰۳/۰۵/۰۱

\*: نویسنده مسئول، رایانامه: [jafarin@iut.ac.ir](mailto:jafarin@iut.ac.ir)



## فهرست علائم

|                                           |            |                                  |                 |
|-------------------------------------------|------------|----------------------------------|-----------------|
| ضریب پواسون                               | $\nu$      | مؤلفه جابه‌جایی در امتداد محور X | $u$             |
| نماد تغییرات                              | $\delta$   | مؤلفه جابه‌جایی در امتداد محور Y | $v$             |
| وارون زمان آسودگی                         | $\lambda$  | مؤلفه جابه‌جایی در امتداد محور Z | $w$             |
| انرژی کرنشی                               | $U$        | چرخش صفحه حول محور Y             | $\Phi_x$        |
| انرژی جنبشی                               | $T$        | چرخش صفحه حول محور X             | $\Phi_y$        |
| حجم ورق                                   | $V$        | بردار کرنش درون صفحه             | $\epsilon_p$    |
| ضریب تصحیح برش                            | $q$        | بردار کرنش خمشی                  | $\kappa$        |
| حداکثر دامنه ارتعاش ورق                   | $c$        | بردار کرنش برشی                  | $\Gamma$        |
| سطح ورق                                   | $A$        | بردار کرنش غیرخطی                | $\epsilon_{NL}$ |
| ماتریس کرنش خمشی                          | $B_b$      | ماتریس سختی ورق                  | $K$             |
| ماتریس کرنش برشی                          | $B_s$      | بردار نیروهای درون صفحه          | $P$             |
| ماتریس کرنش هندسی                         | $B_G$      | بردار لنگرهای خمشی               | $M$             |
| مدول بالک                                 | $K$        | بردار نیروهای برشی               | $Q$             |
| تابع آسودگی                               | $\eta$     | ماتریس مدول درون صفحه            | $D_p$           |
| چگالی ورق                                 | $\rho$     | ماتریس مدول خمشی                 | $D_b$           |
| توابع شکل برای درجات آزادی $\Phi_x$ و $w$ | $N$        | ماتریس مدول برشی                 | $D_s$           |
| تابع شکل برای درجه آزادی $\Phi_y$         | $M$        | ماتریس مدول جرمی                 | $D_m$           |
| ضرایب تابع آسودگی                         | $d_2, d_1$ | ضخامت ورق                        | $h$             |
| زمان آسودگی                               | $t_s$      | مدول الاستیسیته                  | $E$             |

## ۱- مقدمه

پرداختند. آنها ارتعاش آزاد و تشدید صفحات با تنش اولیه و همچنین ارتعاش اجباری صفحات را با در نظر گرفتن میرایی، مورد بحث و بررسی قرار دادند. یونگ کیانگ و داوی [۳] ارتعاش غیرخطی هندسی پانل‌های لانه زنبوری ساندویچی را در حالتی که یک سطح تحت تأثیر آب باشد مورد مطالعه قرار دادند. آنها روش هموتوبی<sup>۱</sup> را به عنوان روش تحلیل انتخاب کردند. وانگ و همکاران [۴] به تجزیه و تحلیل ارتعاش اجباری غیرخطی صفحات گرافن چند لایه پرداختند. آنها بر اساس فرمول واندروالس<sup>۲</sup> و نیز فرضیات ون کارمن یک مدل غیرخطی برای تحلیل ارتعاش ورق‌های چندلایه که در معرض تحریک هارمونیک خارج از صفحه بود ساختند. دازدمیر [۵] به مطالعه‌ی

تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌ها به دفعات برای کاربردهای مختلف صنعتی گزارش شده است. در گام اول طراحی انواع سازه‌های مهندسی، شناخت کامل رفتار ارتعاشی و دینامیکی اجزای سازه‌ای نظیر تیرها، ورق‌ها، پوسته‌ها و موارد مشابه بسیار حائز اهمیت است. طبق مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاش، شوشتری و رفیعی [۱] به تجزیه و تحلیل ارتعاش اجباری غیرخطی تیرهای گیردار پرداختند. آنها از تئوری اویلر برنولی، معیار ون کارمن و روش گالرکین برای به دست آوردن معادله غیرخطی مرتبه دوم استفاده کردند. چونگ و زو [۲] به مطالعه‌ی ارتعاش غیرخطی صفحات نازک با تنش اولیه به روش نوار محدود اسپلاین

ارتعاش اجباری ورق ساندویچی با هسته پیزوالکتریک پرداخت. برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر حرکت نیز از روش اجزای محدود استفاده کرد. ژانگ [۶] با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه بالای ردی و اصل همپلتون، پاسخ گذرای غیرخطی ورق ساندویچی لانه زنبوری آگزتیک تحت بارهای ضربه‌ای را به دست آورد. چن و همکاران [۷] به مطالعه‌ی تحلیلی و عددی ارتعاش اجباری و آزاد ورق‌های ساندویچی تقویت شده با میلگردهای فولادی پرداختند. آنها برای تحلیل عددی از روش اجزای محدود استفاده کردند.

به علت خاصیت میرایی مواد ویسکوالاستیک که منجر به مستهلک شدن پاسخ بعد از گذشت زمان می‌شود، تحلیل ارتعاش غیرخطی سازه‌های ویسکوالاستیک یک مسئله مهم به شمار می‌رود. اشمتاو [۸] به بررسی ارتعاش غیرخطی و تجزیه و تحلیل پایداری دینامیکی ورق‌های مستطیلی ارتوتروپیک ویسکوالاستیک با استفاده از نظریه کیرشهف پرداخت. محمودخانی و همکاران [۹] ارتعاش آزاد و اجباری غیرخطی ورق‌های ساندویچی ویسکوالاستیک با هسته‌ی تراکم ناپذیر را مورد بحث و بررسی قرار دادند. آمبیلی [۱۰] بر اساس فرضیات ون کارمن و استفاده از مدل جامد کلومین، به تحلیل ارتعاش غیرخطی ورق‌های ویسکوالاستیک مستطیلی نازک پرداخت. سیلوا و همکاران [۱۱] تحلیل دینامیکی غیرخطی ورق‌های ساندویچی ویسکوالاستیک را با تکنیک انبساط هونن لوار<sup>۳</sup> مورد بحث و بررسی قرار دادند. لقمان و همکاران [۱۲] ارتعاشات غیرخطی تیر اوپلر- برنولی با عملکرد ویسکوالاستیک را بررسی کردند. جعفری و ازهری [۱۳] به تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های نسبتاً ضخیم ویسکوالاستیک بر اساس ارتعاش آزاد ورق‌های الاستیک پرداختند.

با وجود مقالات و پژوهش‌های فراوانی که در زمینه تحلیل ارتعاش غیرخطی ارائه شده است و در این قسمت به چند نمونه از آنها اشاره شد، در این مقاله با استفاده از روش ساده شده‌ی جداسازی متغیرها به دو تابع زمان و مکان و با روش عددی نوار محدود برای نخستین بار تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های

ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در قسمت ۲ برای به دست آوردن معادلات حرکت از تئوری برشی مرتبه اول و فرضیات ون کارمن استفاده می‌شود. رابطه‌ی تنش کرنش هسته ویسکوالاستیک از قانون انتگرال بولتزمن پیروی می‌کند. برای هسته مذکور مدول بالک ثابت و مدول برشی تابعی از زمان فرض می‌شود. برای به دست آوردن معادله حاکم از اصل همپلتون<sup>۴</sup> و برای ساده سازی از تکنیک جداسازی متغیرها استفاده می‌شود. در نهایت با حل یک مسئله مقدار ویژه در حوزه لاپلاس کارسون فرکانس‌های غیرخطی برای این گونه از ورق‌ها محاسبه می‌شود. در قسمت ۳ صحت‌سنجی برای فرکانس‌های خطی ورق الاستیک ساندویچی سه‌لایه و فرکانس‌های غیرخطی ورق ویسکوالاستیک تک‌لایه انجام می‌شود تا از درستی برنامه و گسسته‌سازی معادلات اطمینان حاصل شود. در ادامه پس از صحت‌سنجی، فرکانس‌های غیرخطی ورق ساندویچی سه‌لایه با هسته ویسکوالاستیک نیز در دو حالت با ضخامت‌های متغیر محاسبه می‌شوند. اثر ضخامت به پهنای نیز بر نسبت فرکانس‌های غیرخطی ورق ساندویچی تحت بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت در قسمت ۴ نتیجه‌گیری کلی ارائه می‌شود.

## ۲- معادلات حرکت

از آنجا که هسته ورق مورد بررسی در این مقاله ویسکوالاستیک است، در قسمت ۲-۱ روابط ارتعاش آزاد غیرخطی برای ورق ویسکوالاستیک تک‌لایه ارائه می‌شود. در قسمت ۲-۲ نیز روابط برای ورق‌های لایه‌ای بسط داده می‌شوند.

### ۲-۱- ورق‌های تک‌لایه ویسکوالاستیک

طبق تئوری برشی مرتبه اول مؤلفه‌های جابه‌جایی ورق ویسکوالاستیک به صورت رابطه‌ی (۱) بیان می‌شود:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{cases} = \begin{cases} u_0(x, y, t) - z\Phi_x(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) - z\Phi_y(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

در رابطه‌ی (۱)  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  به ترتیب مؤلفه‌های

$$\sigma(x, y, z, t) = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle^T \quad (7)$$

رابطه‌ی تنش کرنش مواد ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن قانون انتگرال بولتزمن طبق رابطه‌ی (۸) تعریف می‌شود [۱۴]:

$$\sigma(x, y, z, t) = C(t)\epsilon(x, y, z, t=0) + \int_0^t C(t-\tau)\dot{\epsilon}(x, y, z, \tau)d\tau, \quad \dot{\epsilon} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (8)$$

در رابطه‌ی (۸)،  $C(t)$  تانسور مدول سختی است.

با فرض اینکه مدول بالک ثابت و مدول برشی تابعی از زمان باشد، برای هسته‌ی ویسکوالاستیک رابطه‌ی (۹) در نظر گرفته می‌شود [۱۵]:

$$K(t) = K, G(t) = \frac{3}{2}K\eta(t) \quad (9)$$

در رابطه‌ی (۹)  $K$  مدول بالک،  $G$  مدول برشی و  $\eta$  نیز تابع آسودگی است و می‌توان آن را به صورت تابعی نمایی مطابق رابطه‌ی (۱۰) نوشت:

$$\eta(t) = d_1 + d_2 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{1}{t_s}, d_1 + d_2 = 1 \quad (10)$$

در رابطه‌ی (۱۰)،  $t_s$  زمان آسودگی است.  $d_1$  و  $d_2$  نیز ضرایب تابع آسودگی هستند.

بنابراین برای یک ماده ویسکوالاستیک، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به صورت رابطه‌ی (۱۱) تعریف می‌شود:

$$E = \frac{9K\eta}{2+\eta}, \quad \nu = \frac{1-\eta}{2+\eta} \quad (11)$$

با انتگرال‌گیری در راستای ضخامت ورق، بردارهای نیروهای درون صفحه، لنگرهای خمشی و نیروهای برشی به صورت روابط (۱۲) تا (۱۴) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} P(x, y, t) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rangle^T dz = \\ D_p(t)\epsilon_{NL}(x, y, t=0) + \\ \int_0^t D_p(t-\tau)\dot{\epsilon}_{NL}(x, y, \tau)d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

جابه‌جایی روی میان صفحه ورق در امتداد  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  است.  $\Phi_x$  و  $\Phi_y$  نیز به ترتیب چرخش صفحه عمود بر میان صفحه حول محورهای  $X$  و  $Y$  است. از آنجایی که هسته ورق مورد بررسی ویسکوالاستیک است، مؤلفه‌های  $u$ ،  $v$  و  $w$  به صورت تابعی از زمان بیان شده است.

طبق فرضیات ون کارمن روابط کرنش جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی (۲) بیان می‌شود:

$$\epsilon(x, y, z, t) = \left\{ \begin{matrix} \epsilon_p \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} -z\mathbf{K} \\ \mathbf{\Gamma} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \epsilon_{NL} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\} \quad (2)$$

در رابطه‌ی (۲) بردارهای کرنش درون صفحه، کرنش غیرخطی، کرنش خمشی و کرنش برشی به ترتیب با روابط (۳) تا (۶) تعریف می‌شوند:

$$\epsilon_p(x, y, t) = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{matrix} \right\} \quad (3)$$

$$\epsilon_{NL}(x, y, t) = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

$$\kappa(x, y, t) = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{matrix} \right\} \quad (5)$$

$$\mathbf{\Gamma}(x, y, t) = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \end{matrix} \right\} \quad (6)$$

بردار تنش نیز به صورت رابطه‌ی (۷) تعریف می‌شود:

$$-\int_A \rho h \left[ \ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0 + \frac{h^2}{12} \ddot{\Phi}_x \delta \Phi_x + \frac{h^2}{12} \ddot{\Phi}_y \delta \Phi_y \right] dA$$

معادله‌ی تعادل سیستم در هر لحظه بر اساس اصل همپتون طبق رابطه‌ی (۲۱) بیان می‌شود:

$$\delta U - \delta T = 0 \quad (21)$$

با جایگذاری روابط (۱۹) و (۲۰) در رابطه‌ی (۲۱) رابطه‌ی (۲۲) حاصل می‌شود:

$$\left( \int_A \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_0 \\ \delta v_0 \end{Bmatrix} dA + \int_A \rho h \langle \ddot{u}_0 \ \ddot{v}_0 \rangle \begin{Bmatrix} \delta u_0 \\ \delta v_0 \end{Bmatrix} dA \right) +$$

$$\int_A \mathbf{P}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} dA + \int_A \mathbf{M}^T \delta \boldsymbol{\kappa} dA + \int_A \mathbf{Q}^T \delta \Gamma dA +$$

$$\int_A \rho h \left( \ddot{w}_0 \delta w_0 + \frac{h^2}{12} \ddot{\Phi}_x \delta \Phi_x + \frac{h^2}{12} \ddot{\Phi}_y \delta \Phi_y \right) dA = 0$$

رابطه‌ی (۲۲) را می‌توان توسط دو رابطه‌ی (۲۳) و (۲۴) بازنویسی کرد:

$$\int_A \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_0 \\ \delta v_0 \end{Bmatrix} dA +$$

$$\int_A \rho h \langle \ddot{u}_0 \ \ddot{v}_0 \rangle \begin{Bmatrix} \delta u_0 \\ \delta v_0 \end{Bmatrix} dA = 0$$

$$\int_A \mathbf{P}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} dA + \int_A \mathbf{M}^T \delta \boldsymbol{\kappa} dA + \int_A \mathbf{Q}^T \delta \Gamma dA + \int_A \rho h \left( \ddot{w}_0 \delta w_0 + \frac{h^2}{12} \ddot{\Phi}_x \delta \Phi_x + \frac{h^2}{12} \ddot{\Phi}_y \delta \Phi_y \right) dA = 0 \quad (24)$$

در رابطه‌ی (۲۳) با فرض  $\ddot{u}_0 = \ddot{v}_0 = 0$  و با توجه به اثبات موجود در مرجع [۱۷]، می‌توان فرض کرد  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{P}(t)$  بنابراین نیروهای درون صفحه در رابطه‌ی (۱۲) به صورت رابطه‌ی (۲۵) بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \rangle^T z dz = \mathbf{D}_b(t) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t=0) + \int_0^t \mathbf{D}_b(t-\tau) \dot{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) d\tau \quad (13)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \langle \tau_{xz} \ \tau_{yz} \rangle^T dz = \mathbf{D}_s(t) \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t=0) + \int_0^t \mathbf{D}_s(t-\tau) \dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) d\tau \quad (14)$$

در روابط (۱۲) تا (۱۴)،  $h$  بیانگر ضخامت ورق است.  $\mathbf{D}_p$ ،  $\mathbf{D}_b$  و  $\mathbf{D}_s$  نیز به ترتیب ماتریس‌های مدول‌های درون صفحه، خمشی و برشی هستند. این ماتریس‌ها به همراه سایر مؤلفه‌های روابط (۱۲) تا (۱۴) در روابط (۱۵) تا (۱۸) تعریف می‌شوند:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{NL} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{NL}}{\partial t} \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial t} \quad \dot{\boldsymbol{\Gamma}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\mathbf{D}_p(t) = \frac{hE(t)}{(1-\nu(t)^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(t) & 0 \\ \nu(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(t)}{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{D}_b(t) = \frac{h^2}{12} \mathbf{D}_p(t) \quad (17)$$

$$\mathbf{D}_s(t) = \frac{E(t)hq}{2(1+\nu(t))} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

در روابط (۱۶) تا (۱۸)،  $E$  مدول الاستیسیته،  $\nu$  ضریب پواسون و  $q$  ضریب تصحیح برش طبق تئوری برشی مرتبه اول است. تغییرات انرژی کرنشی به صورت رابطه‌ی (۱۹) تعریف می‌شود:

$$\delta U = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \quad (19)$$

$$\int_A \mathbf{P}^T \delta (\boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL}) dA + \int_A \mathbf{M}^T \delta \boldsymbol{\kappa} dA + \int_A \mathbf{Q}^T \delta \Gamma dA$$

با در نظر گرفتن مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی مطابق با رابطه (۱) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت ورق، تغییرات انرژی جنبشی نیز طبق رابطه‌ی (۲۰) قابل بیان است [۱۶]:

$$\delta T = \quad (20)$$

با گسسته‌سازی به روش نوار محدود مطابق پیوست یک، بردار  $\mathbf{u}^e$ ،  $\boldsymbol{\beta}^e$ ،  $\boldsymbol{\kappa}^e$  و  $\boldsymbol{\Gamma}^e$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}\mathbf{U}^e \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\kappa}^e = \mathbf{B}_b \mathbf{U}^e, \quad \boldsymbol{\Gamma}^e = \mathbf{B}_s \mathbf{U}^e$$

$$\boldsymbol{\beta}^e = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2A} \mathbf{U}^{eT} \left( \int_A \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} dA \right) \mathbf{U}^e \\ \frac{1}{2A} \mathbf{U}^{eT} \left( \int_A \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} dA \right) \mathbf{U}^e \\ \frac{1}{A} \mathbf{U}^{eT} \left( \int_A \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} dA \right) \mathbf{U}^e \end{array} \right\} \quad (30)$$

که در رابطه‌ی (۳۰)،  $\mathbf{N}$  بیانگر توابع شکل است.

با استفاده از روابط (۳۰)، رابطه‌ی (۲۸) طبق رابطه‌ی (۳۱)

بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}^{eT} \left[ \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b(t) \mathbf{F}(0) \mathbf{B}_b dA + \int_A \mathbf{B}_b^T \left( \int_0^t \mathbf{D}_b(t-\tau) \dot{\mathbf{F}}(\tau) d\tau \right) \mathbf{B}_b dA \right] \\ & + \mathbf{U}^{eT} \left[ \int_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s(t) \mathbf{F}(0) \mathbf{B}_s dA + \int_A \mathbf{B}_s^T \left( \int_0^t \mathbf{D}_s(t-\tau) \dot{\mathbf{F}}(\tau) d\tau \right) \mathbf{B}_s dA \right] \\ & + \mathbf{U}^{eT} \left[ \int_A \mathbf{B}_G^T \mathbf{P}^*(t) \mathbf{F}^2(0) \mathbf{B}_G dA + \int_A \mathbf{B}_G^T \left( \int_0^t \mathbf{P}^*(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \mathbf{F}^2(\tau) d\tau \right) \mathbf{B}_G dA \right] c^2 \mathbf{F}(t) \\ & + \mathbf{U}^{eT} \left[ \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{D}_m \mathbf{N} dA \ddot{\mathbf{F}}(t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

که در رابطه‌ی (۳۱) ماتریس‌های کرنش برای یک خط گره (بر اساس گسسته‌سازی به روش نوار محدود) به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \\ 0 & \mathbf{M}_i & \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$(28)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{P}(t) =$$

$$\mathbf{D}_p(t) \boldsymbol{\beta}(0) + \int_0^t \mathbf{D}_p(t-\tau) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\tau) d\tau \quad (25)$$

که در رابطه‌ی (۲۵)،  $\boldsymbol{\beta}(t)$  مطابق رابطه‌ی (۲۶) بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{A} \int_A \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial x} \right)^2 dA \\ \frac{1}{A} \int_A \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial y} \right)^2 dA \\ \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial y} dA \end{array} \right\} \quad (26)$$

با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها، بردار جابه‌جایی‌های خارج از صفحه توسط دو تابع زمان و مکان تفکیک شده و به شکل رابطه‌ی (۲۷) بیان می‌شود [۱۷-۱۹]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ \Phi_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \end{array} \right\} = c \left\{ \begin{array}{l} \Phi_x^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Phi_y^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{w}^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{array} \right\} \mathbf{F}(t) = \quad (27)$$

$$c \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{F}(t), \quad c = \frac{\mathbf{w}_{0max}}{\mathbf{w}_{0max}(t=0)}$$

در رابطه‌ی (۲۷)،  $\mathbf{u}^e$  بردار جابه‌جایی الاستیک است که با تحلیل خمشی ورق ویسکوالاستیک در لحظه‌ی صفر (ورق الاستیک معادل) تحت بار گسترده یکنواخت محاسبه می‌شود. حداکثر دامنه ارتعاش ورق است که به صورت عددی بی‌بعد  $C$  تعریف می‌شود.  $\mathbf{F}(t)$  نیز بیانگر تابع زمان است. با تفکیک تمامی متغیرها به شکل رابطه‌ی (۲۷) و جایگذاری در رابطه‌ی (۲۴) رابطه‌ی (۲۸) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & c^2 \int_A \left[ \mathbf{D}_p(t) \mathbf{F}^2(0) \boldsymbol{\beta}^e + \left( \int_0^t \mathbf{D}_p(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \mathbf{F}^2(\tau) d\tau \right) \boldsymbol{\beta}^e \right]^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} dA \\ & + c \int_A \left[ \mathbf{D}_b(t) \mathbf{F}(0) \boldsymbol{\kappa}^e + \left( \int_0^t \mathbf{D}_b(t-\tau) \dot{\mathbf{F}}(\tau) d\tau \right) \boldsymbol{\kappa}^e \right]^T \delta \boldsymbol{\kappa} dA \\ & + c \int_A \left[ \mathbf{D}_s(t) \mathbf{F}(0) \boldsymbol{\Gamma}^e + \left( \int_0^t \mathbf{D}_s(t-\tau) \dot{\mathbf{F}}(\tau) d\tau \right) \boldsymbol{\Gamma}^e \right]^T \delta \boldsymbol{\Gamma} dA \\ & + c \int_A \rho h \left( \mathbf{w}^e \delta \mathbf{w} + \frac{h^2}{12} \Phi_x^e \delta \Phi_x + \frac{h^2}{12} \Phi_y^e \delta \Phi_y \right) \ddot{\mathbf{F}}(t) dA = 0, \\ & \dot{\mathbf{F}}(t) = \frac{d\mathbf{F}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{F}}(t) = \frac{d^2\mathbf{F}}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{Bmatrix} = \bar{P}_{2s_0} = \bar{D}_p \beta^e \quad (42)$$

$$\bar{D}_p = \begin{bmatrix} 3K\bar{\eta}_{2s_0} \frac{(2+\bar{\eta}_{2s_0})}{(1+2\bar{\eta}_{2s_0})} & 3K\bar{\eta}_{2s_0} \frac{(1-\bar{\eta}_{2s_0})}{(1+2\bar{\eta}_{2s_0})} & 0 \\ h \cdot 3K\bar{\eta}_{2s_0} \frac{(1-\bar{\eta}_{2s_0})}{(1+2\bar{\eta}_{2s_0})} & 3K\bar{\eta}_{2s_0} \frac{(2+\bar{\eta}_{2s_0})}{(1+2\bar{\eta}_{2s_0})} & 0 \\ 0 & 0 & 3/2K\bar{\eta}_{2s_0} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\bar{\eta}_{2s_0} = 2is_0 \int_0^\infty \eta(t) e^{-2is_0 t} dt = d_1 + \frac{d_2 2is_0}{2is_0 + \lambda} \quad (44)$$

مطابق با رابطه‌ی (۴۵) ماتریس جرم تعریف می‌شود:

$$\mathbf{K}_m = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{D}_m \mathbf{N} dA \quad (45)$$

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \frac{\rho h^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \rho h \end{bmatrix} \quad (46)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس رابطه‌ی (۳۵) به فرم رابطه‌ی (۴۷) بیان می‌شود:

$$\left( (\bar{\mathbf{K}}_{s_0} - s_0^2 \mathbf{K}_m) e^{is_0 t} + c^2 \bar{\mathbf{K}}_{G2s_0} e^{3is_0 t} \right) \mathbf{U}^e = 0 \quad (47)$$

با در نظر گرفتن  $\cos 3s_0 t = -3\cos s_0 t + 4\cos^3 s_0 t$ ، رابطه‌ی (۴۷) را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۴۸) نوشت:

$$\left( \left( \bar{\mathbf{K}}_{s_0} - s_0^2 \mathbf{K}_m + \frac{3}{4} c^2 \bar{\mathbf{K}}_{G2s_0} \right) \cos s_0 t + \frac{1}{4} c^2 \bar{\mathbf{K}}_{G2s_0} \cos 3s_0 t \right) \mathbf{U}^e = 0 \quad (48)$$

یک حل تقریبی از رابطه‌ی (۴۸) به فرم رابطه‌ی (۴۹) بیان می‌شود:

$$\left( \left( \bar{\mathbf{K}}_{s_0} + \frac{3}{4} c^2 \bar{\mathbf{K}}_{G2s_0} \right) - s_0^2 \mathbf{K}_m \right) \mathbf{U}^e = 0 \quad (49)$$

که در رابطه‌ی (۴۹) ضریب  $s_0$  تابع زمان به صورت رابطه‌ی (۵۰) بیان می‌شود:

$$s_0 = \omega_{NL} + i\alpha_{NL}, \quad \alpha_{NL} \geq 0 \quad (50)$$

در روابط (۳۲) تا (۳۴)  $N_i$  و  $M_i$  بیانگر توابع شکل هستند (پیوست یک).

اگر تابع زمان برای تحلیل ارتعاش به فرم رابطه‌ی  $\mathbf{F}(t) = e^{is_0 t}$  باشد، رابطه‌ی (۳۱) را با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌توان به فرم رابطه‌ی (۳۵) بیان کرد [۱۷]:

$$\left( \bar{\mathbf{K}}_{s_0} \times \frac{1}{s - is_0} + c^2 \bar{\mathbf{K}}_{G2s_0} \times \frac{1}{s - 3is_0} - s_0^2 \mathbf{K}_m \times \frac{1}{s - is_0} \right) \mathbf{U}^e = 0$$

در رابطه‌ی (۳۵)،  $\bar{\mathbf{K}}_{s_0}$  ماتریس سختی در حوزه لاپلاس کارسون،  $\bar{\mathbf{K}}_{G2s_0}$  ماتریس سختی هندسی در حوزه لاپلاس کارسون و  $\mathbf{K}_m$  ماتریس جرم بوده و به صورتی که در ادامه آمده است، تعریف می‌شوند:

$$\bar{\mathbf{K}}_{s_0} = \int_A \mathbf{B}_b^T \bar{\mathbf{D}}_b \mathbf{B}_b dA + \int_A \mathbf{B}_s^T \bar{\mathbf{D}}_s \mathbf{B}_s dA \quad (36)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_b = \begin{bmatrix} 3K\bar{\eta}_{s_0} \frac{(2+\bar{\eta}_{s_0})}{(1+2\bar{\eta}_{s_0})} & 3K\bar{\eta}_{s_0} \frac{(1-\bar{\eta}_{s_0})}{(1+2\bar{\eta}_{s_0})} & 0 \\ h^3/12 \cdot 3K\bar{\eta}_{s_0} \frac{(1-\bar{\eta}_{s_0})}{(1+2\bar{\eta}_{s_0})} & 3K\bar{\eta}_{s_0} \frac{(2+\bar{\eta}_{s_0})}{(1+2\bar{\eta}_{s_0})} & 0 \\ 0 & 0 & 3/2K\bar{\eta}_{s_0} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_s = hq \begin{bmatrix} 3/2K\bar{\eta}_{s_0} & 0 \\ 0 & 3/2K\bar{\eta}_{s_0} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\bar{\eta}_{s_0} = is_0 \int_0^\infty \eta(t) e^{-is_0 t} dt = d_1 + \frac{d_2 is_0}{is_0 + \lambda} \quad (39)$$

در روابط (۳۷) تا (۳۹)،  $\bar{\eta}$  بیانگر تابع آسودگی در حوزه لاپلاس کارسون است.

ماتریس هندسی و مؤلفه‌های آن نیز به شکل روابط (۴۰) تا (۴۴) تعریف می‌شود:

$$\bar{\mathbf{K}}_{G2s_0} = \int_A \mathbf{B}_G^T \bar{\mathbf{P}}_{2s_0}^* \mathbf{B}_G dA \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{2s_0}^* = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_3 \\ \bar{P}_3 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} + \mathbf{z} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \\ \gamma_{yz}^1 \end{Bmatrix} = \quad (54)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Phi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Phi_y \end{Bmatrix} + \mathbf{z} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای یک ورق چند لایه مطابق شکل ۱ رابطه تنش کرنش برای لایه  $k$  مطابق رابطه‌ی (۵۵) تعریف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (55)$$

در رابطه‌ی (۵۵)  $\bar{\mathbf{Q}}$  ماتریس سختی کاهش یافته برای هر یک از لایه‌های ورق مرکب است که از انتقال ماتریس سختی  $\mathbf{Q}$  هر لایه در دستگاه مختصات محلی و با استفاده از ماتریس تبدیل  $\mathbf{T}$  مطابق با رابطه‌ی (۵۶) به دست می‌آید:

در رابطه‌ی (۵۰)،  $\omega_{NL}$  و  $\alpha_{NL}$  اعدادی حقیقی هستند. با حل مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی معادله‌ی (۴۹) در حوزه لاپلاس کارسون، فرکانس غیرخطی  $\omega_{NL}$ ، میرایی غیرخطی ویسکوز  $\alpha_{NL}$  و نیز نسبت میرایی غیرخطی  $\zeta = \frac{\alpha_{NL}}{\omega_L}$  طی یک فرایند تکراری که در ادامه شرح داده می‌شود، حاصل می‌شوند.

فرایند تکراری برای حل معادله‌ی (۴۹) در پنج گام و به صورت زیر است:

گام اول: ماتریس سختی در زمان صفر محاسبه شده و با در نظر گرفتن بردار نیرو و تحلیل الاستیکی ورق الاستیک بردار  $\mathbf{U}^e$  طبق رابطه‌ی  $\mathbf{KU}^e = \mathbf{F}$  به دست می‌آید. ماتریس جرم نیز طبق رابطه‌ی (۴۵) محاسبه شده و با حل مسئله مقدار ویژه فرکانس خطی حاصل می‌شود.

گام دوم: بردار  $\beta^e$  طبق رابطه‌ی (۳۰) محاسبه می‌شود.

گام سوم: ماتریس سختی هندسی در زمان صفر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}_G(t=0) = \int_A \mathbf{B}_G^T \mathbf{P} \mathbf{B}_G dA \quad (51)$$

که در رابطه‌ی (۵۱)، ماتریس  $\mathbf{P}$  به صورت رابطه‌ی (۵۲) بیان می‌شود:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_p(t=0) \beta^e \quad (52)$$

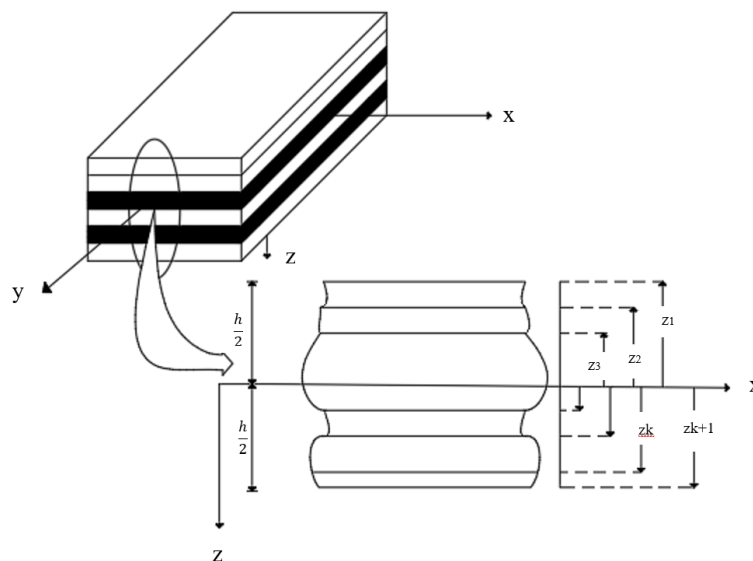
گام چهارم: مسئله‌ی مقدار ویژه برای مواد الاستیک حل می‌شود و  $\omega_{NL}$  در زمان صفر حاصل می‌شود.

گام پنجم: نزدیک به  $\omega_{NL}$  محاسبه شده در گام قبل،  $S_0^n = \omega_{NL}^n + i\alpha_{NL}^n$  در نظر گرفته شده و مسئله‌ی مقدار ویژه طبق رابطه‌ی (۴۹) برای مواد ویسکوالاستیک حل می‌شود. این فرایند تکراری تا رسیدن به همگرایی مطلوب به فرم زیر ادامه می‌یابد:

$$\left( \omega_{NL}^{n+1} - \omega_{NL}^n \right)^2 + \left( \alpha_{NL}^{n+1} - \alpha_{NL}^n \right)^2 \leq \text{error} \quad (53)$$

## ۲-۲- روابط ورق لایه‌ای

رابطه کرنش جابه‌جایی طبق فرضیات ون کارمن طبق رابطه‌ی (۵۴) قابل تعریف است:



شکل ۱- نمایی از لایه‌های کامپوزیتی در راستای ضخامت ورق

$$\mathbf{Q}_b = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (60)$$

درایه‌های ماتریس  $\mathbf{Q}$  به شکل روابط (۶۱) تا (۶۶) تعریف می‌شوند:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (61)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (62)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (63)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (64)$$

$$Q_{44} = G_{23} \quad (65)$$

$$Q_{55} = G_{13} \quad (66)$$

$E_1$  و  $E_2$  به ترتیب مدول الاستیسیته لایه مرکب در راستای الیاف و عمود بر آن است.  $G_{12}$  نیز مدول برشی بوده و  $\nu_{12}$  و  $\nu_{21}$  ضرایب پواسون در دو امتداد اصلی لایه مرکب هستند. با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی تنش کرنش در راستای ضخامت

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T} \quad (56)$$

ماتریس تبدیل  $\mathbf{T}$  در رابطه‌ی (۵۶) به صورت رابطه‌ی (۵۷) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T} = \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & 0 & 0 \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 0 \\ -2\sin\alpha\cos\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

در رابطه‌ی (۵۷)،  $\alpha$  زاویه راستای الیاف با جهت مثبت محور  $X$  است. ماتریس سختی  $\mathbf{Q}$  در رابطه‌ی (۵۶) به صورت رابطه‌ی (۵۸) قابل بیان است:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (58)$$

ماتریس رابطه‌ی (۵۸) را می‌توان به دو جز خمشی و برشی به شکل روابط (۵۹) و (۶۰) در نظر گرفت:

قبیل نوع مواد استفاده شده (الاستیک یا ویسکوالاستیک) و نیز شرایط مرزی مختلف ورق ندارد.

### ۳-۱- صحت‌سنجی

فرکانس‌های خطی در دو حالت ورق‌های تک‌لایه نسبتاً ضخیم و ورق‌های سه‌لایه ساندویچی به ترتیب با روابط

$$\lambda = \frac{\omega_L b^2}{\Pi^2 h} \sqrt{\frac{12\rho}{d}} \quad \text{که در آن} \quad d = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$\bar{\omega} = \omega_L \sqrt{\frac{\rho h^2}{E_2}}$$

قبلی مقایسه شده و در قالب جدول‌های (۱) و (۲) ارائه شده است. همچنین فرکانس‌های غیرخطی ورق‌های الاستیک و ویسکوالاستیک تک‌لایه نیز با شرایط مرزی مختلف محاسبه و نتایج در جدول‌های (۳) و (۴) صحت‌سنجی و بررسی شده است. از مقایسه نتایج در جدول (۴) می‌توان نتیجه گرفت که تحت دامنه‌های ارتعاش یکسان مقادیر نسبت فرکانس‌های غیرخطی در شرایط مرزی SS از دیگر شرایط مرزی بیشتر است. همچنین کمترین مقدار فرکانس‌های غیرخطی برای شرایط مرزی CF گزارش شده است. در جدول‌های (۵) و (۶) نیز به ترتیب نسبت فرکانس غیرخطی و میرایی غیرخطی برای ورق‌های ویسکوالاستیک تک‌لایه به ازای افزایش ضرایب تابع آسودگی هسته محاسبه شده و نتایج مقایسه شده‌اند. با توجه به این جدول‌ها مشاهده می‌شود که نتایج مطالعه اخیر تطابق خوبی با نتایج مطالعات قبلی دارند.

### ۳-۲- بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک

در این قسمت نتایج ارتعاش آزاد غیرخطی ورق ساندویچی سه‌لایه با هسته ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. ورق ساندویچی مد نظر از دولایه‌ی بالایی و پایینی الاستیک و هسته ویسکوالاستیک تشکیل شده است. در جدول‌های (۷) و (۸) نتایج نسبت فرکانس غیرخطی ورق ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک تحت ضرایب تابع آسودگی متفاوت برای هسته

لایه‌های ورق، به ترتیب نیروهای محوری، لنگرهای خمشی و نیروهای برشی طبق روابط (۶۷) تا (۶۹) حاصل می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \quad (67)$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \quad (68)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (69)$$

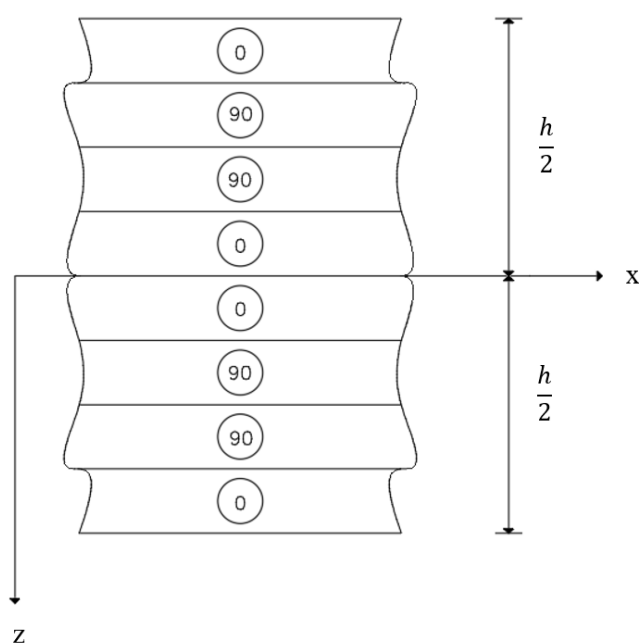
درایه‌های ماتریس‌های سختی روابط (۶۷) تا (۶۹) مطابق رابطه‌ی (۷۰) تعریف می‌شوند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^k(1, z, z^2) dz \quad (70)$$

ماتریس‌های **A** و **B** و **D** به ترتیب ماتریس‌های سختی کششی، سختی کوپلینگ و سختی خمشی نامیده می‌شوند. گفتنی است که ماتریس **B** در ورق‌های متقارن صفر است. منظور از ورق‌های متقارن ورق‌هایی است که ضخامت هر لایه و فاصله آنها از صفحه میانی و نیز زاویه لایه با راستای الیاف در هر دو طرف صفحه میانی یکسان باشد (شکل ۲).

### ۳- نتایج عددی

با استفاده از روابط ارائه شده در قسمت ۲ برنامه‌ای در محیط متلب تدوین شده است. این برنامه برای ورق‌های نسبتاً ضخیم نتایج قابل قبولی را در زمینه‌ی تحلیل استاتیکی، تحلیل پایداری، ارتعاش آزاد خطی و غیرخطی ارائه می‌دهد. نکته‌ی قابل توجه این است که روش حل مورد استفاده هیچ گونه محدودیتی از



شکل ۲- نمایی از ورق چند لایه متقارن

جدول ۱- فرکانس خطی بی بعد شده ورق‌های تک‌لایه نسبتاً ضخیم  $\frac{h}{B} = 0.1$

| شماره ی مود |        |        |        |        | $\lambda$   | شرایط مرزی      | $\frac{L}{B}$ |
|-------------|--------|--------|--------|--------|-------------|-----------------|---------------|
| ۵           | ۴      | ۳      | ۲      | ۱      |             |                 |               |
| ۳/۸۸۲۶      | ۳/۳۵۳۳ | ۲/۳۳۹۷ | ۱/۵۹۳۶ | ۱/۱۳۶۴ | مرجع [۲۰]   | مفصلی<br>گیردار | ۲/۵           |
| ۳/۸۸۲۶      | ۳/۳۸۸۷ | ۲/۳۴۸۷ | ۱/۵۹۴۷ | ۱/۱۳۶۴ | مطالعه حاضر |                 |               |
| ۵/۴۷۶۱      | ۴/۲۴۱۵ | ۳/۲۶۹۸ | ۲/۵۹۶۹ | ۲/۲۲۵۹ | مرجع [۲۰]   |                 |               |
| ۵/۷۲۱۶      | ۴/۳۷۹۴ | ۳/۳۴۸۷ | ۲/۶۴۴۸ | ۲/۲۵۸۰ | مطالعه حاضر |                 |               |
| ۸/۶۱۶۲      | ۷/۰۷۱۶ | ۴/۶۰۸۴ | ۴/۶۰۸۴ | ۱/۹۳۱۷ | مرجع [۲۰]   | مفصلی<br>گیردار | ۱             |
| ۸/۶۱۶۲      | ۷/۰۷۳۸ | ۴/۶۱۱۷ | ۴/۶۰۸۴ | ۱/۹۳۱۸ | مطالعه حاضر |                 |               |
| ۱۰/۳۷۸۸     | ۸/۸۰۹۸ | ۶/۲۸۵۸ | ۶/۲۸۵۸ | ۳/۲۹۵۴ | مرجع [۲۰]   |                 |               |
| ۱۰/۵۳۴۷     | ۹/۱۹۹۵ | ۶/۶۲۲۴ | ۶/۳۵۶۰ | ۳/۳۳۸۸ | مطالعه حاضر |                 |               |

جدول ۲- فرکانس بی بعد شده ورق‌های سه‌لایه مربعی با شرایط مرزی مفصلی (۰/۹۰/۰)

| ۱۰      | ۲۰      | ۳۰      | ۴۰      | $\frac{E_1}{E_2}$ |
|---------|---------|---------|---------|-------------------|
| ۰/۳۲۷۳۹ | ۰/۳۷۱۱۰ | ۰/۳۹۵۴۰ | ۰/۴۱۱۵۸ | مرجع [۲۱]         |
| ۰/۳۲۴۳  | ۰/۳۶۵۸  | ۰/۳۸۸۸  | ۰/۴۰۴۱  | مطالعه حاضر       |

جدول ۳- نسبت فرکانس غیرخطی ورق مربعی الاستیک تک‌لایه تحت دامنه ارتعاش متفاوت

| شرایط مرزی | $\frac{\omega_{NL}}{\omega_L}$ | $\frac{W_{0max}}{h}$ |        |        |        |        |
|------------|--------------------------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
|            |                                | ۰/۲                  | ۰/۴    | ۰/۶    | ۰/۸    | ۱      |
| مفصلی      | مرجع [۱۷]                      | ۱/۰۱۷۲               | ۱/۰۶۶۹ | ۱/۱۴۴۹ | ۱/۲۴۵۶ | ۱/۳۶۳۸ |
|            | مطالعه حاضر                    | ۱/۰۱۶۳               | ۱/۰۶۳۶ | ۱/۱۳۸۱ | ۱/۲۳۴۹ | ۱/۳۴۹۲ |
| گیردار     | مرجع [۲۲]                      | ۱/۰۰۸۷               | ۱/۰۳۴۲ | ۱/۰۷۵۵ | ۱/۱۳۰۸ | ۱/۱۹۸۲ |
|            | مطالعه حاضر                    | ۱/۰۱۰۶               | ۱/۰۴۱۶ | ۱/۰۹۱۴ | ۱/۱۵۷۵ | ۱/۲۳۷۲ |

جدول ۴- نسبت فرکانس غیرخطی ورق مربعی ویسکوالاستیک با شرایط مرزی مختلف  $d_1 = 0.1, d_2 = 0.9$ 

| شرایط مرزی | $\frac{\omega_{NL}}{\omega_L}$ | $\frac{W_{0max}}{h}$ |        |        |        |        |
|------------|--------------------------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
|            |                                | ۰/۲۵                 | ۰/۵    | ۰/۷۵   | ۱      | ۱/۵    |
| CC         | مرجع [۱۷]                      | ۱/۰۰۷                | ۱/۰۳   | ۱/۰۶   | ۱/۱۱   | ۱/۲۳   |
|            | مطالعه حاضر                    | ۱/۰۰۶۳               | ۱/۰۲۵۰ | ۱/۰۵۵۴ | ۱/۰۹۶۳ | ۱/۲۰۵۴ |
| SS         | مرجع [۱۷]                      | ۱/۰۲                 | ۱/۰۸   | ۱/۱۸   | ۱/۳۰   | ۱/۵۹   |
|            | مطالعه حاضر                    | ۱/۰۱۹۳               | ۱/۰۷۵۱ | ۱/۱۶۲۲ | ۱/۲۷۴۲ | ۱/۵۵۰۱ |
| CS         | مرجع [۱۷]                      | ۱/۰۰۸                | ۱/۰۴   | ۱/۰۹   | ۱/۱۶   | ۱/۳۳   |
|            | مطالعه حاضر                    | ۱/۰۰۷۳               | ۱/۰۳۶۰ | ۱/۰۸۵۴ | ۱/۱۴۷۳ | ۱/۳۰۵۳ |
| CF         | مرجع [۱۷]                      | ۱/۰۰۴                | ۱/۰۲   | ۱/۰۴   | ۱/۰۷   | ۱/۱۶   |
|            | مطالعه حاضر                    | ۱/۰۰۳۳               | ۱/۰۱۵۰ | ۱/۰۳۵۵ | ۱/۰۵۶۳ | ۱/۱۳۵۴ |
| SF         | مرجع [۱۷]                      | ۱/۰۰۸                | ۱/۰۴   | ۱/۰۸   | ۱/۱۴   | ۱/۳    |
|            | مطالعه حاضر                    | ۱/۰۰۷۳               | ۱/۰۳۶۰ | ۱/۰۶۷۲ | ۱/۱۱۴۲ | ۱/۳۳۹۹ |

جدول ۵- نسبت فرکانس غیرخطی ورق مربعی ویسکوالاستیک با شرایط مرزی مفصلی و ضرایب آسودگی متفاوت

| $\frac{\omega_{NL}}{\omega_L}$ | $\frac{W_{0max}}{h}$ |      |     |      |   |     |             |      |     |      |
|--------------------------------|----------------------|------|-----|------|---|-----|-------------|------|-----|------|
|                                | ۰                    | ۰/۲۵ | ۰/۵ | ۰/۷۵ | ۱ | ۱/۵ | ۰           | ۰/۲۵ | ۰/۵ | ۰/۷۵ |
| $d_1 = 0.1$                    | مطالعه حاضر          | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |
|                                | مرجع [۱۷]            | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |
| $d_1 = 0.3$                    | مطالعه حاضر          | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |
|                                | مرجع [۱۷]            | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |
| $d_1 = 0.5$                    | مطالعه حاضر          | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |
|                                | مرجع [۱۷]            | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |
| $d_1 = 0.7$                    | مطالعه حاضر          | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |
|                                | مرجع [۱۷]            | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |
| $d_1 = 0.9$                    | مطالعه حاضر          | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |
|                                | مرجع [۱۷]            | ۱    | ۱   | ۱    | ۱ | ۱   | مطالعه حاضر | ۱    | ۱   | ۱    |

جدول ۶- نسبت میرایی غیرخطی ورق مربعی ویسکوالاستیک با شرایط مرزی مفصلی و با ضرایب آسودگی متفاوت

| $\frac{W_{0max}}{h}$                   |        |        |        |        |        |             |             |             |             |             |             |
|----------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\zeta = \frac{\alpha_{NL}}{\omega_L}$ |        |        |        |        |        |             |             |             |             |             |             |
| ۰                                      | ۰/۲۵   | ۰/۵    | ۰/۷۵   | ۱      | ۱/۵    | مطالعه حاضر | مطالعه حاضر | مطالعه حاضر | مطالعه حاضر | مطالعه حاضر | مطالعه حاضر |
| $d_1 = 0.1$                            | ۰/۰۱۵۹ | ۰/۰۱۵۹ | ۰/۰۱۵۴ | ۰/۰۱۴۹ | ۰/۰۱۴۳ | ۰/۰۱۲۸      | ۰/۰۱۲۶      | ۰/۰۱۱۱      | ۰/۰۱۱       | ۰/۰۰۸۹      | ۰/۰۰۸۸      |
| $d_1 = 0.2$                            | ۰/۰۱۳۸ | ۰/۰۱۳۷ | ۰/۰۱۳۲ | ۰/۰۱۲۱ | ۰/۰۱۲۱ | ۰/۰۱۲۱      | ۰/۰۱۲۱      | ۰/۰۱۱۱      | ۰/۰۱۱       | ۰/۰۰۷۴      | ۰/۰۰۷۷      |
| $d_1 = 0.3$                            | ۰/۰۱۲۰ | ۰/۰۱۲۱ | ۰/۰۱۱۱ | ۰/۰۱۱۵ | ۰/۰۱۱۱ | ۰/۰۱۱۱      | ۰/۰۱۱       | ۰/۰۰۹۹      | ۰/۰۰۸۸      | ۰/۰۰۶۶      | ۰/۰۰۶۶      |
| $d_1 = 0.4$                            | ۰/۰۱۰۵ | ۰/۰۱۰۵ | ۰/۰۱۰۴ | ۰/۰۰۹۳ | ۰/۰۰۹۳ | ۰/۰۰۸۲      | ۰/۰۰۸۲      | ۰/۰۰۷۱      | ۰/۰۰۷۱      | ۰/۰۰۶۰      | ۰/۰۰۰۶      |
| $d_1 = 0.5$                            | ۰/۰۰۸۸ | ۰/۰۰۸۸ | ۰/۰۰۸۲ | ۰/۰۰۷۷ | ۰/۰۰۷۷ | ۰/۰۰۷۷      | ۰/۰۰۷۷      | ۰/۰۰۷۱      | ۰/۰۰۷۱      | ۰/۰۰۴۹      | ۰/۰۰۴۹      |

جدول ۷- نسبت فرکانس غیرخطی ورق ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک با ضرایب تابع آسودگی متفاوت  $h_1 = h_2 = h_3 = 0.033$

| $\frac{W_{0max}}{h}$ |        |        |        |        |        | $\frac{\omega_{NL}}{\omega_L}$ |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------------------------------|
| ۰                    | ۰/۲۵   | ۰/۵    | ۰/۷۵   | ۱      | ۱/۵    |                                |
| ۱                    | ۱/۱۸۲۵ | ۱/۶۰۷۳ | ۲/۱۲۹۰ | ۲/۶۸۷۹ | ۳/۸۴۴۷ | $d_1 = 0.1$                    |
| ۱                    | ۱/۱۷۷۸ | ۱/۵۹۴۴ | ۲/۱۰۹۱ | ۲/۶۶۲۷ | ۳/۸۱۳۰ | $d_1 = 0.3$                    |
| ۱                    | ۱/۱۷۳۵ | ۱/۵۸۲۴ | ۲/۰۹۰۴ | ۲/۶۳۹۰ | ۳/۷۸۲۸ | $d_1 = 0.5$                    |
| ۱                    | ۱/۱۶۹۶ | ۱/۵۷۱۲ | ۲/۰۷۲۹ | ۲/۶۱۶۵ | ۳/۷۵۳۹ | $d_1 = 0.7$                    |
| ۱                    | ۱/۱۶۵۹ | ۱/۵۶۰۸ | ۲/۰۵۶۴ | ۲/۵۹۵۳ | ۳/۷۲۶۳ | $d_1 = 0.9$                    |

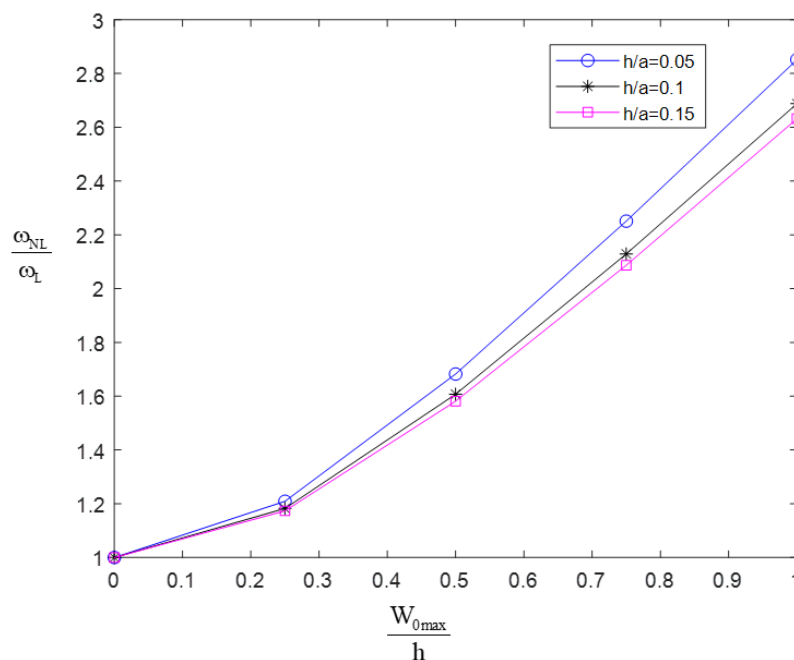
جدول ۸- نسبت فرکانس غیرخطی ورق ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک با ضرایب تابع آسودگی متفاوت

$$h_1 = h_3 = 0.01, h_2 = 0.08$$

| $\frac{W_{0max}}{h}$ |        |        |        |        |        | $\frac{\omega_{NL}}{\omega_L}$ |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------------------------------|
| ۰                    | ۰/۲۵   | ۰/۵    | ۰/۷۵   | ۱      | ۱/۵    |                                |
| ۱                    | ۱/۰۳۱۴ | ۱/۱۲۰۱ | ۱/۲۵۳۱ | ۱/۴۱۷۵ | ۱/۸۰۳۶ | $d_1 = 0.1$                    |
| ۱                    | ۱/۰۳۱۰ | ۱/۱۱۸۷ | ۱/۲۵۰۷ | ۱/۴۱۴۱ | ۱/۷۹۸۸ | $d_1 = 0.3$                    |
| ۱                    | ۱/۰۳۰۷ | ۱/۱۱۷۵ | ۱/۲۴۸۳ | ۱/۴۱۰۷ | ۱/۷۹۴۰ | $d_1 = 0.5$                    |
| ۱                    | ۱/۰۳۰۳ | ۱/۱۱۶۲ | ۱/۲۴۶۰ | ۱/۴۰۷۵ | ۱/۷۸۹۳ | $d_1 = 0.7$                    |
| ۱                    | ۱/۰۳۰۰ | ۱/۱۱۵۰ | ۱/۲۴۳۸ | ۱/۴۰۴۳ | ۱/۷۸۴۸ | $d_1 = 0.9$                    |

شده است. فرضیات در نظر گرفته شده برای پوسته و لایه‌های بالایی و پایینی به شرح زیر است:

در دو حالتی که ضخامت هسته و لایه‌های بالایی و پایینی یکسان و ضخامت هسته از دو لایه‌ی دیگر بیشتر باشد ارائه



شکل ۳- نسبت فرکانس غیرخطی ورق مربعی ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک در مقابل دامنه ارتعاش

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و روش عددی نوار محدود مورد بررسی قرار گرفت. با ارائه چند مثال عددی مشخص شد: (الف) مقادیر نسبت فرکانس‌های غیرخطی ورق‌های الاستیک و ویسکوالاستیک تک‌لایه با افزایش دامنه ارتعاش، افزایش می‌یابد. (ب) تحت دامنه ارتعاش یکسان، در ورق‌های الاستیک با شرایط مرزی مفصلی مقادیر نسبت فرکانس‌های غیرخطی نسبت به ورق‌های الاستیک با شرایط مرزی گیردار بیشتر است. (ج) با افزایش ضرایب تابع آسودگی، نسبت فرکانس غیرخطی برای ورق ویسکوالاستیک تک‌لایه ثابت می‌ماند اما مقادیر نسبت میرایی غیرخطی با کاهش مقادیر روبه‌رو می‌شود. (د) در ورق‌های ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک با افزایش ضرایب تابع آسودگی هسته، نسبت فرکانس‌های غیرخطی با کاهش مقادیر مواجه می‌شود. علت این کاهش مقادیر را می‌توان در اثر ایجاد شدن تنش در ورق‌های چند لایه دانست. (ه) در ورق ساندویچی با هسته

$$\text{skins: } \frac{a}{h} = 10, \quad \frac{E_1}{E_2} = 40,$$

$$\frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.6, \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.5, \quad \nu_{12} = 0.25$$

$$\text{core: } K = 3 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad q = \frac{5}{6}, \quad t_s = 1 \text{ s}$$

#### ۳-۳- بررسی اثر ضخامت به پهنا بر نسبت فرکانس غیرخطی

##### ورق ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک

در این قسمت اثر افزایش ضخامت بر پهنا بر نسبت فرکانس‌های غیرخطی بررسی شده است. فرضیات در نظر گرفته شده برای ورق‌های پوسته و هسته مانند قسمت ۲-۳ است. نتایج در شکل (۳) ارائه شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به پهنا، نسبت فرکانس‌های غیرخطی کاهش یافته است.

ویسکوالاستیک، تحت دامنه‌های ارتعاش یکسان با افزایش مقادیر مواجه می‌شود. نسبت ضخامت به پهنا نسبت فرکانس‌های غیرخطی با کاهش

## واژه‌نامه

1. homotopy method
2. Van der Waals equation
3. Karhunen-Loève expansion technique
4. Hamilton's principle

## پیوست یک-روش نوار محدود

نظر به اینکه حل معادلات دیفرانسیل ورق‌ها با روش‌های دقیق با پیچیدگی‌هایی همراه است، می‌توان گفت حل بسته و دقیق معادلات، فقط در موارد خاصی به نتیجه‌ی مطلوب می‌رسد. بنابراین برای رفع این مشکل روش‌های عددی مانند روش‌های اجزای محدود و نوار محدود توسعه و بسط داده شدند. در روش نوار محدود ورق تنها در یک جهت شبکه‌بندی می‌شود و تنها در یک جهت از توابع شکل استفاده می‌شود. درونیابی متغیرها توسط توابع تناوبی پیوسته که شرایط مرزی طولی را ارضا می‌کنند و توابع درونیابی چندجمله‌ای در جهت عرضی ورق انجام می‌شود. بنابراین ورق در راستای طولی مطابق شکل (۴) به چند نوار تقسیم می‌شود. تئوری برشی مرتبه اول در زمره مسائل  $C^0$  است و در آن هر خط گره سه درجه آزادی دارد که شامل یک جابه‌جایی و دو چرخش است. لازم به ذکر است که برای بالا بردن دقت محاسبات و نیز افزایش سرعت همگرایی از خط گره وسط هر نوار استفاده می‌شود.

تعدادی از توابع شکل در جهت طولی برای شرایط مرزی مختلف به صورت زیر است:

برای شرایط مرزی مفصلی در لبه‌های طولی:

$$Y_n = \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (\text{پ-۱})$$

برای شرایط مرزی گیردار در لبه‌های طولی:

$$Y_n = \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (\text{پ-۲})$$

برای شرایط مرزی مفصلی-گیردار در لبه‌های طولی:

$$Y_n = \sin\left(\frac{(n+1)\pi y}{a}\right) + \frac{(n+1)}{n} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (\text{پ-۳})$$

برای شرایط مرزی مفصلی-آزاد در لبه‌های طولی:

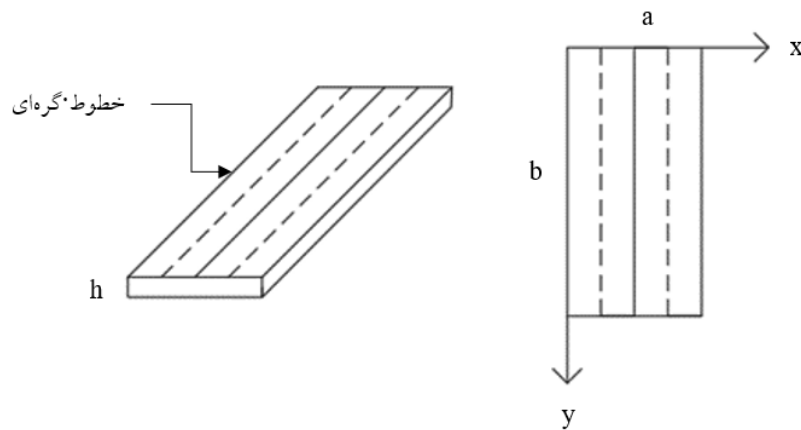
$$Y_n = \sin\left(\frac{\alpha_n y}{a}\right) \beta_n \sinh\left(\frac{\alpha_n y}{a}\right) \quad (\text{پ-۴})$$

$$\alpha_n = \frac{2n-3}{4} \pi \quad \beta_n = \frac{\sin(\alpha_n)}{\sinh(\alpha_n)}$$

برای شرایط مرزی گیردار-آزاد در لبه‌های طولی ورق:

$$Y_n = 1 - \cos\left(\frac{(n-0.5)\pi y}{a}\right) \quad (\text{پ-۵})$$

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد برای تغییر شکل‌ها در جهت عرضی ورق از توابع لاگرانژی استفاده می‌شود. با توجه به سه گرهی بودن هر نوار توابع شکل به صورت روابط (پ-۶) تا (پ-۸) تعریف می‌شود. در این روابط  $b_s$  عرض هر نوار است.



شکل ۴- تقسیم بندی ورق در روش نوار محدود

$$c_1(x) = \frac{2x^2}{b_s^2} - \frac{3x}{b_s} + 1 \quad (\text{پ-۶})$$

$$c_2(x) = \frac{4x}{b_s} - \frac{4x^2}{b_s^2} \quad (\text{پ-۷})$$

$$c_3(x) = \frac{2x^2}{b_s} - \frac{x}{b_s} \quad (\text{پ-۸})$$

در ادامه بر اساس روش نوار محدود به گسسته‌سازی جابه‌جایی‌ها و نیز چرخش‌های ورق پرداخته می‌شود:

$$\Phi_x(x, y) = \sum_{n=1}^r \sum_{i=1}^3 c_i \Phi_{xi} Y_n' = \sum_{n=1}^r (c_1 \Phi_{x1} + c_2 \Phi_{x2} + c_3 \Phi_{x3}) Y_n' = \sum_{n=1}^r \mathbf{N}_n \Phi_x \quad (\text{پ-۹})$$

$$\Phi_y(x, y) = \sum_{n=1}^r \sum_{i=1}^3 c_i \Phi_{yi} Y_n' = \sum_{n=1}^r (c_1 \Phi_{y1} + c_2 \Phi_{y2} + c_3 \Phi_{y3}) Y_n' = \sum_{n=1}^r \mathbf{M}_n \Phi_y \quad (\text{پ-۱۰})$$

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^r \sum_{i=1}^3 c_i w_i Y_n = \sum_{n=1}^r (c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3) Y_n = \sum_{n=1}^r \mathbf{N}_n w \quad (\text{پ-۱۱})$$

در روابط (پ-۹) تا (پ-۱۱) توابع شکل  $\mathbf{N}_n$  و  $\mathbf{M}_n$  به شکل روابط (پ-۱۲) و (پ-۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{N}_n = [N_{n1}, N_{n2}, N_{n3}] = [c_1 Y_n, c_2 Y_n, c_3 Y_n] \quad (\text{پ-۱۲})$$

$$\mathbf{M}_n = [M_{n1}, M_{n2}, M_{n3}] = [c_1 Y_n', c_2 Y_n', c_3 Y_n'] \quad (\text{پ-۱۳})$$

## References

1. Shooshtari, A., and Rafiee, M., "Nonlinear Forced Vibration Analysis of Clamped Functionally Graded Beams", *Acta Mechanica*, Vol. 221, No. 1, pp. 23-38, 2011.
2. Cheung, Y. K., Zhu, D. S., and Iu, V. P., "Nonlinear Vibration of Thin Plates With Initial Stress by Spline Finite Strip Method", *Thin-Walled Structures*, Vol. 32, No. 4, pp. 275-287, 1998.
3. Yongqiang, L., and Dawei, Z., "Geometrically Nonlinear Norced Vibrations of The Symmetric Honeycomb Sandwich Panels Affected by The Water", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 880-888, 2011.
4. He, X. Q., Wang, J. B., Liu, B., and Liew, K. M., "Analysis of Nonlinear Forced Vibration of Multi-Layered Graphene Sheets", *Computational Materials Science*, Vol. 61, pp.194-199, 2012.
5. Daşdemir, A. "Forced Vibrations of Pre-Stressed Sandwich Plate-Strip with Elastic Layers and Piezoelectric Core", *International Applied*

## منابع

- Mechanics* , Vol. 54, No. 4, pp.480-493, 2018.
6. Zhang, J., Zhu, X., Yang, X., and Zhang, W., "Transient Nonlinear Responses Of an Auxetic Honeycomb Sandwich Plate Under Impact Loads", *International Journal of Impact Engineering* , Vol. 134 , p. 103383,2019.
7. Zhou, Z., Chen, M., Xiong, Y., Jia, W., Dong, W., and Xie, K., "Experimental And Mixed Analytical–Numerical Studies for Free and Forced Vibrations of Z-Reinforced Sandwich Plates Stiffened by Steel Ribs", *Composite Structures*, Vol. 272, p. 114221,2021.
8. Eshmatov, B. Kh. "Nonlinear Vibrations and Dynamic Stability of Viscoelastic Orthotropic Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 300, No. 3-5, pp. 709-726, 2007.
9. Mahmoudkhani, S., Haddadpour, H., and Navazi, H. M., "The Effects of Nonlinearities on The Vibration of Viscoelastic Sandwich Plates", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 62, pp. 41-57, 2014.
10. Amabili, M., "Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 362, pp.142-156, 2016.
11. Silva, V. A. C., "Uncertainty Propagation and Numerical Evaluation of Viscoelastic Sandwich Plates Having Nonlinear Behavior", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 26, No. 7-8, pp. 447-458, 2020.
12. Loghman, E., Kamali, A., Bakhtiari-Nejad, F., and Abbaszadeh, M., "Nonlinear Free and Forced Vibrations of Fractional Modeled Viscoelastic FGM Micro-Beam", *Applied Mathematical Modelling* , Vol. 92, pp. 297-314, 2021.
13. Jafari, N., and Azhari, M., "Free Vibration Analysis of Viscoelastic Plates With Simultaneous Calculation of Natural Frequency and Viscous Damping", *Mathematics and Computers in Simulation* , Vol. 185, pp. 646-659, 2021.
14. Neng-hui, Z., and Chang-jun, C., "Non-Linear Mathematical Model of Viscoelastic Thin Plates With It's Applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 165, No. 1-4, pp.307-319, 1998.
15. Jafari, N., Azhari, M., and Boroomand, B., "Geometrically Nonlinear Analysis of Time-Dependent Composite Plates Using Time Function Optimization", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 116, pp. 219-229, 2019.
16. Amabili, M., "Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates", *Cambridge University Press*, 2008.
17. Jafari, N., and Azhari, M., "Nonlinear Free Vibration Analysis of Moderately Thick Viscoelastic Plates With Various Geometrical Properties", *Steel and Composite Structures*, Vol. 48, No. 3 , p. 293, 2019.
18. Zamani, H. A., Aghdam, M. M., and Sadighi, M., "Free Vibration Analysis of Thick Viscoelastic Composite Plates on Visco-Pasternak Foundation Using Higher-Order Theory", *Composite Structures*, Vol. 182, pp. 25-35, 2017.
19. Touati, D., and Cederbaum, G., "Dynamic Stability of Nonlinear Viscoelastic Plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, No. 17, pp. 2367-2376, 1994.
20. Liew, K. M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., "Transverse Vibration of Thick Rectangular Plates-I. Comprehensive Sets of Boundary Conditions", *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 1, pp. 1-29, 1993.
21. Khdeir, A. A., and Librescu, L., "Analysis of Symmetric Cross-Ply Laminated Elastic Plates Using a Higher-Order Theory: Part II-Buckling and Free Vibration", *Composite Structures*, Vol. 9, No. 4, pp. 259-277, 1988.
22. Singha, M. K., and Daripa, R., "Nonlinear Vibration and Dynamic Stability Analysis of Composite Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 328, No. 4-5, pp.541-554, 1999.