Journal of Computational Methods in Engineering, 2024, 43(1), 141-157; DOI: 10.47176/jcme.43.1.1029

JOURNAL OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING

Journal of Computational Methods in Engineering

Journal homepage: https://jcme.iut.ac.ir/

ISSN: 2228-7698 EISSN: 2423-5741

Original Article

Modeling simple shear deformation in hyperelastoplasticity: A Numerical integration algorithm in the intermediate configuration

Reza Toluei and Mahsa Kharazi*

Department of Mechanical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

Abstract: The proposal and development of time integration algorithms in hyperelastic-based plasticity or hyperelastoplasticity, are consistently required due to complex issues such as objectivity. Through the multiplicative decomposition of the deformation gradient tensor, a local configuration known as the intermediate or plastic configuration is generated alongside the reference and the current configurations. Utilizing the intermediate configuration for time integrations eliminates the need to analyze the impact of rigid rotations in the current configuration. Moreover, as the Cauchy stress is derived from parameters in the intermediate configuration, there is no necessity to assess its objectivity. By employing the multiplicative decomposition of the gradient tensor of plastic deformation, equations for kinematic hardening can be derived, eliminating the need to verify objectivity. Therefore, in this article, the algorithm for the subloading surface model, based on the intermediate configuration, is derived by adapting the von Mises model. The rationale behind employing the von Mises model lies in its simplicity compared to the subloading surface model, along with its widespread usage. Additionally, in numerical implementation, the subloading surface model is more complex than the von Mises model. Building upon this, the problem of simple shear deformation with small and large elastic strains, incorporating isotropic, kinematic, and combined hardening in plasticity, has been investigated. The obtained results have been compared with the experimental data and findings from various references. The comparison between the results presented in this article and the available data indicates agreement, suggesting the viability of employing this model in practical applications.

Keywords: Hyperelastic-based plasticity, Objectivity, Time integration algorithm, Simple shear deformation.

Received: Mar. 06, 2024; Revised: Apr. 24, 2024; Accepted: Apr. 27, 2024; Published Online: Jul. 22, 2024.

* Corresponding Author: kharazi@sut.ac.ir

How to Cite: Toluei Reza and Kharazi Mahsa, Modeling simple shear deformation in hyperelastoplasticity: A Numerical integration algorithm in the intermediate configuration, Journal of Computational Methods in Engineering; 2024, 43(1), 141-157; DOI: 10.47176/jcme.43.1.1029

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۳، شماره ۱، ۱۴۰۳، ص. ۱۵۷-۱۴۱ DOI: 10.47176/jcme.43.1.1029

نشریه روش‌های عددی در مهندسی

صفحه خانگی نشریه: https://jcme.iut.ac.ir/

شاپا: ۷۶۹۸-۲۲۲۸ شاپا الکترونیکی: ۵۷۴۱-۲۴۲۳

نشریه علمی - پژوهشی روش‌های عددی در مهندسی

مقاله پژوهشی

مدل‌سازی تغییر شکل برش ساده در هایپرالاستوپلاستیسیته با استفاده از الگوریتم انتگرال‌گیری عددی در هیات میانی

رضا طلوعی و مهسا خرازی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

چکیده- پیشنهاد و توسعه‌ی الگوریتم‌های انتگرال‌گیری زمانی در پلاستیسیته مبتنی بر هایپرالاستیسیته یا هایپرالاستوپلاستیسیته به دلیل پیچیدگی‌های موجود مانند عینیت همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. با تجزیه‌ی تانسور گرادیان تغییر شکل به صورت ضربی، علاوه بر هیات‌های اولیه و کنونی یک هیات محلی به نام هیات میانی یا پلاستیک به وجود می‌آید که با به‌کارگیری آن برای انتگرال‌گیری‌های زمانی، نیازی به بررسی تأثیر چرخش‌های صلب در هیات کنونی نیست و عینیت تنش کوشی با وجود محاسبه آن از پارامترهای موجود در هیات میانی، نیاز به بررسی ندارد. همچنین با تجزیه ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک می‌توان برای سخت‌شوندگی سینماتیک معادلات را به گونه‌ای استخراج کرد که نیازی به بررسی عینیت نباشد. بنابراین در این مقاله، الگوریتم ارائه شده برای مدل سطح سابلودینگ بر اساس هیات میانی با اعمال تغییراتی برای مدل فون میزز ارائه شده است. علت استفاده از مدل فون میزز سادگی این مدل نسبت به مدل سطح سابلودینگ و پرکاربرد بودن این مدل در مسائل کاربردی است. همچنین به لحاظ پیاده‌سازی عددی، مدل سطح سابلودینگ نسبت به مدل فون میزز دارای پیچیدگی‌های بیشتری است. بر این اساس، مسئله تغییر شکل برش ساده در کرنش‌های الاستیک کوچک و بزرگ با سخت‌شوندگی‌های همسانگرد، سینماتیک و ترکیبی در پلاستیسیته بررسی شده و نتایج به‌دست آمده از الگوریتم انتگرال‌گیری زمانی پیشنهادی با داده‌های آزمایشگاهی و نتایج مراجع متفاوت مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. مقایسه نتایج و داده‌های موجود نشان می‌دهد که تطابق قابل قبولی بین نتایج وجود دارد و استفاده از این مدل در مسائل کاربردی می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: پلاستیسیته مبتنی بر هایپرالاستیک، عینیت، الگوریتم انتگرال‌گیری زمانی، تغییر شکل برش ساده.

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۱۲/۱۶، بازنگری: ۱۴۰۳/۰۲/۰۵، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۰۸، اولین انتشار: ۱۴۰۳/۰۵/۰۱

*: نویسنده مسئول، رایانامه: kharazi@sut.ac.ir

فهرست علائم

X و x	بردارهای مکان در هیاتهای اولیه و تغییرشکل یافته
$\mathbf{F}$	تانسور گرادیان تغییر شکل
$\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}$	تانسورهای متقارن لاگرانژی و اویلری کوشی-گرین راست و چپ
$\mathbf{L}$	تانسور گرادیان سرعت
$\mathbf{D}$ و $\mathbf{W}$	بخش‌های متقارن و پادمتقارن تانسور گرادیان سرعت
$\mathbf{F}^{\mathrm{e}}$	تانسور گرادیان تغییر شکل الاستیک
$\mathbf{F}^{\mathrm{p}}$	تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک
$\mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$	تانسور گرادیان تغییر شکل سخت‌شوندگی سینماتیک-الاستیک
$\mathbf{F}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}}$	تانسور گرادیان تغییر شکل سخت‌شوندگی سینماتیک-اتلاف
$\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}$	تانسور کوشی-گرین راست الاستیک
$\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$	تانسور کوشی-گرین چپ برای سخت‌شوندگی سینماتیک-الاستیک
J	ترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل
$\overline{\mathbf{S}}$	تنش پایولا-کیرشهف دوم در هیات میانی
$\mathbf{I}$	تانسور واحد
$\overline{\mathbf{M}}$	تنش مندل
c و b	ثوابت ماده
$\overline{\mathbf{S}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$	متغیری شبیه تنش پایولا-کیرشهف دوم برای سخت‌شوندگی سینماتیک
$\overline{\mathbf{M}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$	متغیری شبیه تنش مندل برای سخت‌شوندگی سینماتیک
$\overline{\mathbf{M}}$	تفاضل $\overline{\mathbf{M}}$ و $\overline{\mathbf{M}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$
$\overline{\mathbf{M}}'$	مقدار انحرافی $\overline{\mathbf{M}}$
k	سخت‌شوندگی همسانگرد
d و K	ثوابت ماده برای سخت‌شوندگی همسانگرد
H	کرنش پلاستیک معادل
$\overline{\mathbf{D}}^{\mathrm{p}}$، $\overline{\mathbf{L}}^{\mathrm{p}}$ و $\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{p}}$	تانسور گرادیان سرعت پلاستیک، تانسور نرخ تغییر شکل پلاستیک واسپین پلاستیک
$\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{p}}$	تابع نمایی
$\overline{\mathbf{Q}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$	تابع نمایی
$R_{re}(\mathrm{Y})$	بردارهای باقیمانده
Y	بردار مجهولات
$\mathbb{J}$	ماتریس ژاکوبین
علائم یونانی	
ψ	تابع انرژی کرنشی هایپرالاستیک در واحد حجم
Λ و μ	ثوابت ماده
ψ^{e}	تابع انرژی کرنشی الاستیک
$\psi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$	تابع انرژی کرنشی برای سخت‌شوندگی سینماتیک
φ^{yld}	سطح تسلیم
σ_{y0}	تنش تسلیم اولیه
σ_{ys}	ثابت ماده برای سخت‌شوندگی همسانگرد
$\dot{\lambda}$	نرخ ضریب پلاستیک
$\delta_{\bar{I}\bar{J}}$	مؤلفه‌های دلتای کرونکر
γ	تغییر شکل برش اعمالی
زیرنویس	
$\bar{I}$، $\bar{J}$، $\bar{K}$ و $\bar{L}$	اندیس‌های آزاد
$\bar{M}$ و $\bar{N}$	اندیس‌های تکرار شونده

۱-مقدمه

در پلاستیسیته‌ی مبتنی بر هایپرالاستیک، از تجزیه‌ی ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل استفاده می‌شود که موجب تعریف هیات میانی علاوه بر هیات‌های اولیه و کنونی می‌شود. همین امر سبب می‌شود که در هر یک از این هیات‌ها بتوان معادلات ساختاری یا انتگرال‌گیری‌های زمانی را توسعه داد. همچنین لازم به ذکر است که در پلاستیسیته‌ی مبتنی بر هایپرالاستیک می‌توان از معادلات ارائه شده و الگوریتم‌های پیاده‌سازی آنها، در مواد پلیمری همانند فلزات یا آلیاژهای فلزی استفاده کرد.

در سال ۲۰۰۳ ایدسمان [۱]، حالت‌های مختلفی از تجزیه‌ی ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل در مدل هایپرالاستوپلاستیک برای ماده همسانگرد را ارائه کرد. در این مطالعه، تانسور تغییر

شکل الاستیک و پلاستیک به صورت قطبی تجزیه شدند و پس از تجزیه‌ی قطبی، ترکیب‌های مختلفی از تانسورهای تجزیه شده در مدل‌سازی صفحه‌ای سوراخ‌دار به صورت کرنش صفحه‌ای مورد استفاده قرار گرفتند. در نهایت در این مطالعه نشان داده شد که با ترکیبات مختلف، معادلات نهایی به‌دست آمده با هم معادل هستند.

در سال ۲۰۰٤ دتمر و ریس [۲]، معادلات سخت‌شوندگی سینماتیک فردریک-آرمسترانگ را برای مسائل با کرنش محدود ارائه کردند. در این تحقیق، سخت‌شوندگی سینماتیک به دو نوع تقسیم شد. نوع اول، از نوع شابوش بود که تنش برگشتی را به صورت متغیرهای درونی تعریف می‌کرد و نوع دوم، بر پایه‌ی مدل رئولوژیک بود و با به‌کارگیری مکانیک محیط‌های پیوسته تعریف شده بود. بر این اساس، در نوع دوم متغیرهای درونیِ کرنش‌مانند به کار گرفته شدند و معادلات در هیات مرجع حل شدند. همچنین در این مطالعه، سه نوع انتگرال‌گیری زمانی مختلف تعریف شدند که پاسخ‌های حاصل از الگوریتم‌های ارائه شده در مسئله برش ساده برای فولاد با دقت خیلی خوبی بر هم منطبق بودند، ولی برای نوعی پلیمر شیشه‌ای در همان بارگذاری از هم فاصله داشتند.

در سال ۲۰۰۸ ولادیمیراف و همکاران [۳]، از مدل نئوهوکین برای تغییر شکل الاستیک استفاده کردند، تا محدودیتی برای کاربرد در مواد مختلف وجود نداشته باشد. در این پژوهش، برای سخت‌شوندگی همسانگرد از تابع نمایی وس و برای سخت‌شوندگی سینماتیک از مدل رئولوژیکی که تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک را به دو قسمت الاستیک و پلاستیک به صورت ضربی تجزیه می‌کند، استفاده شد. همچنین انرژی آزاد هلمهولتز به سه قسمت تقسیم شد و معادلات مشخصه با استفاده از این انرژی به‌دست آمدند. با توجه به مدل سخت‌شوندگی سینماتیکی و اینکه در این مدل از سه هیات برای حل می‌توان بهره جست، در این تحقیق معادلات در هیات میانی نوشته شدند و برای به‌دست آوردن مجهولات از هیات اولیه استفاده شد. از جمله مسائل مورد بررسی در این تحقیق مدل‌سازی برگشت فنری در فرایند شکل‌دهی بود که نتایج عددی به‌دست آمده از آن همخوانی نزدیکی با نتایج تجربی را نشان دادند.

در سال ۲۰۰۹ حیدری و همکاران [٤]، از مدل هایپرالاستوپلاستیک در توصیف اویلری استفاده کردند. در این مطالعه، گرادیان تغییر شکل به صورت ضربی تجزیه و قسمت الاستیک به صورت قطبی چپ تجزیه شد و در مدل‌سازی تانسور متعامد چرخش صلب الاستیک و تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک با هم و تانسور کشسان چپ به صورت جدا در نظر گرفته شدند. بر این اساس و با تعریف تانسور متعامد چرخش صلب الاستیک و به‌کارگیری آن با تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک، تانسور اسپین به صورت جدیدی تعریف شد که در نرخ‌های عینی تانسورهای اویلری مورد استفاده قرار گرفت. نتایج عددی به‌دست آمده در این مطالعه برای مسئله تغییر شکل برش ساده که از مدل مذکور به‌دست آمد، با نتایج آزمایشگاهی مرجع [۵] در تطابق خوبی بودند.

در سال ۲۰۱۰ اشراقی و همکاران [٦]، معادلات مشخصه‌ی جدیدی را بر مبنای هایپرالاستوپلاستیسیته[1] تعریف کردند. در این تحقیق، معادلات در دیدگاه لاگرانژی ارائه شدند و شکل اصلاح‌شده‌ای از تجزیه‌ی ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل برای قسمت الاستیک و پلاستیک در تجزیه‌ی قطبی مورد استفاده قرارگرفت. نتایج به‌دست آمده در این مطالعه برای مدل‌سازی تغییر شکل برش ساده با نتایج آزمایشگاهی مرجع [۵] در تطابق خوبی بودند.

در سال ۲۰۱۳ ژو و کانگ [۷]، مدلی را بر مبنای مدل اوهنو- عبدالکریم برای الاستوپلاستیک کرنش محدود برای مدل‌سازی اثر باوشینگر و رچیتینگ ارائه کردند. در این مدل، از تجزیه ضربی تانسور تغییر شکل استفاده شد. در این مطالعه تانسور تغییر شکل پلاستیک به صورت ضربی به دو قسمت انرژی‌دار و تلف شده تقسیم شد و با استفاده از انرژی آزاد هلمهولتز معادلات مربوط به سخت‌شوندگی سینماتیک در هیات میانی به‌دست آمدند. لازم به ذکر است، از آنجایی که در

این مطالعه معادلات در دیدگاه لاگرانژی نوشته شدند، معادلات سخت‌شوندگی سینماتیک نسبت به هیات مرجع بیان شدند.

در سال ۲۰۱۳ پاسکون و کودا [۸]، برای مدل‌سازی هایپرالاستوپلاستیک از هیات میانی استفاده کردند. در این تحقیق، تنش مندل و سخت‌شوندگی سینماتیک در هیات میانی ارائه شدند و برای تغییر شکل الاستیک از مدل‌های نئوهوکین استفاده شد. همچنین برای بیان نرخ تغییرات سخت‌شوندگی مذکور، از نرخ عینی جامن بهره برده شد. یکی از مسائل حل شده در این مطالعه تغییر شکل برش ساده بود که نتایج عددی به‌دست آمده از آن با نتایج مرجع [۲] در مطابقت بسیار خوبی بودند.

در سال ۲۰۱۳ اشراقی و همکاران [۹]، بر مبنای فرم هایپرالاستیسیته ارائه شده در قسمت اول تحقیق [۱۰]، معادلاتی را برای الاستوپلاستیک اویلری کرنش محدود ارائه کردند. در این پژوهش، از نرخ عینی زارمبا-جامن برای حالت الاستوپلاستیک کرنش محدود استفاده شد. با توجه به اویلری بودن معادلات ارائه شده، تانسور کوشی-گرین چپ در این مدل‌سازی مورد استفاده قرار گرفت و برای بیان نرخ تغییرات عینی این تانسور و همچنین قانون جریان و تنش برگشتی از نرخ عینی ذکر شده در بالا استفاده شد. نتایج عددی به‌دست آمده از این مطالعه برای تغییر شکل برش ساده با نتایج آزمایشگاهی مرجع [۵] در تطابق خوبی بودند.

در سال ۲۰۱٤ برپلس و همکاران [۱۱]، مدل‌های هایپوالاستوپلاستیسیته[۲] و هایپرالاستوپلاستیسیته را برای مدل‌سازی فرایندهای کشش عمیق و کشش خمشی ورق فلزی و شکل‌دهی گرم ورق پلیمری مورد استفاده قرار دادند. در دو مدل مذکور برای سخت‌شوندگی سینماتیک از مدل رئولوژیکی در توصیف لاگرانژی و برای سخت‌شوندگی همسانگرد از تابع نمایی وس استفاده شد. همچنین برای نرخ تغییرات عینی سخت‌شوندگی سینماتیک و تنش کیرشهف از نرخ جامن، گرین- نقدی و نرخ لگاریتمی استفاده شد.

در سال ۲۰۱۷ ایقوچی و همکاران [۱۲]، از مدل سطح سابلودینگ توسعه‌یافته[۳] در الاستوپلاستیک با کرنش محدود برای بارگذاری چرخه‌ای استفاده کردند. در این تحقیق، برای سخت‌شوندگی سینماتیک، تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک به دو قسمت انرژی‌دار و تلف‌شده تقسیم شد. برای انتقال سطح الاستیک، هیات میانی دیگری نیز به صورت محلی تعریف شد و تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک به دو قسمت تقسیم شد. همچنین برای تغییر شکل الاستیک، مدل اصلاح شده‌ی نئوهوکین به کار گرفته شد و برای سخت‌شوندگی همسانگرد از تابع نمایی وس استفاده شد. در این تحقیق معادلات به گونه‌ای ارائه شدند که تانسورهای کوشی-گرین راست الاستیک و پلاستیک و همچنین تنش پایولا-کیرشهف دوم در هیات‌های تعریف شده، مورد استفاده قرار گرفتند. مسئله تغییر شکل برش ساده از جمله مسائلی بود که در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفت.

در سال ۲۰۱۸ جیائو و فیش [۱۳]، از مدل‌های هایپرالاستوپلاستیسیته و هایپوالاستوپلاستیسیته استفاده کردند. در این تحقیق، مباحث موجود در دو مدل مذکور ارائه شد و نحوه انتخاب مناسب و صحیح نرخ عینی تنش به طور خلاصه آورده شد و نهایتاً رابطه‌ای موجود بین دو مدل ذکر شده استخراج شد. بدین ترتیب بر این اساس در این مطالعه، اسپین لگاریتمی سینماتیک اصلاح شده‌ای پیشنهاد شد. علاوه بر آن، در مدل هایپوالاستوپلاستیک، از نرخ‌های عینی جامن- زارمبا، لگاریتمی و لگاریتمی اصلاح شده استفاده شد و از مدل هایپرالاستوپلاستیک با استفاده از کرنش هنکی اویلری استفاده شد. نتایج به‌دست آمده از این مطالعه برای مسئله تغییر شکل برش ساده نشان دادند که تطابق بسیار خوبی بین نتایج به‌دست آمده با استفاده از نرخ عینی لگاریتمی اصلاح شده و مدل هایپرالاستوپلاستیک وجود دارد.

در سال ۲۰۱۹ ژانگ و منتانس [۱٤]، از تجزیه‌ی ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل در کرنش‌های محدود استفاده کردند. در این تحقیق، مدل هایپرالاستوپلاستیک با ارائه‌ی انتگرال‌گیری ضمنی جدیدی بر مبنای نرخ‌های الاستیک اصلاح کننده ارائه

شد. این مدل بر مبنای مدل رئولوژیکی در کرنش‌های کوچک و برگرفته از مدل اوهنو- ونگ بود. در این تحقیق، انتگرال‌گیری زمانی پیشنهادی در دیدگاه لاگرانژی بوده و مفهوم سخت‌شوندگی سینماتیک بدون استفاده از تنش‌های برگشتی ارائه شد. همچنین در مدل ارائه شده انتقال هموار از ناحیه‌ی الاستیک به پلاستیک و مدل‌سازی بهتر حلقه‌های هیسترزیس به‌دست آمد. در ادامه انگوین و همکاران [۱۵]، از مدل ارائه شده در مرجع [۱۴] برای حالت تنش صفحه‌ای در کرنش‌های محدود استفاده کردند. در این تحقیق، مسائل متنوع تنش صفحه‌ای از جمله تیرهای تحت خمش و صفحات سوراخدار تحت کشش بررسی شدند.

بدین ترتیب با مرور ادبیات موضوع می‌توان اذعان کرد که در مدل‌سازی مواد هایپوالاستوپلاستیک دیدگاه اویلری و در مدل‌سازی مواد هایپرالاستوپلاستیک دیدگاه‌های لاگرانژی و اویلری بیشتر مورد توجه **پژوهشگران** بوده‌اند. همچنین لازم به ذکر است که علاوه بر هیات‌های اولیه و کنونی، در هایپرالاستوپلاستیسیته می‌توان از هیات میانی برای ارائه معادلات ساختاری و پیاده‌سازی عددی آنها استفاده کرد که نسبت به دو هیات اولیه و کنونی کمتر مورد توجه **پژوهشگران** در مطالعات پیشین قرار گرفته است. بر مبنای مرجع [۱۶]، استفاده از الگوریتم انتگرال‌گیری در هیات میانی موجب سادگی در پیاده‌سازی عددی آن الگوریتم خواهد شد. بنابراین در این مقاله، الگوریتم انتگرال‌گیری عددی که در مرجع [۱۷] توسط نویسندگان حاضر برای مدل سطح سابلودینگ ارائه شده است، برای مدل فون میزز به دلیل پرکاربرد بودن و سادگی آن مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین، در الگوریتم ارائه شده سعی شده است تا از تانسورهای متقارن مجهول استفاده شود، که موجب کم شدن تعداد مجهولات و کاسته شدن پیچیدگی پیاده‌سازی عددی آن‌ها می‌شود. در انتها، برای نشان دادن کارایی مدل مسائل مختلفی مورد بررسی عددی قرار گرفته‌اند که از جمله آنها می‌توان به تغییر شکل برش ساده که از نمونه‌های پرکاربرد در هایپوالاستوپلاستیک، هایپرالاستیک و هایپرالاستوپلاستیک است، اشاره کرد. همچنین لازم به ذکر است که در این تحقیق، این مسئله برای کرنش‌های الاستیک کوچک و بزرگ با سخت‌شوندگی‌های همسانگرد، سینماتیک و ترکیبی در پلاستیسیته مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- سینماتیک

در مکانیک محیط‌های پیوسته یک جسم از بی‌نهایت ذره تشکیل شده است که این ذرات تحت تغییر شکل جابه‌جا می‌شوند و هیات‌های مختلفی را به وجود می‌آورند. اگر بردارهای مکان این ذرات در هیات‌های اولیه و تغییرشکل یافته با X و x نشان داده شوند، تانسور گرادیان تغییر شکل، $\mathbf{F}$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{F}=\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{X}} \tag{۱}$$

با در دست داشتن $\mathbf{F}$، تانسورهای متقارن لاگرانژی و اویلری کوشی-گرین راست و چپ به‌دست می‌آیند:

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F},\ \ \mathbf{B}=\mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{۲}$$

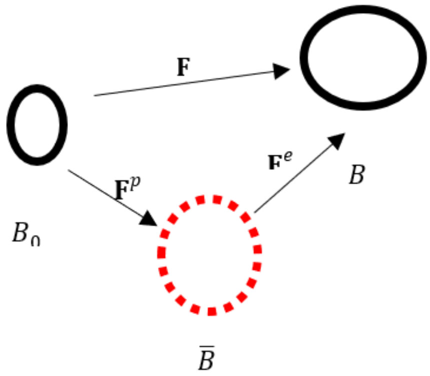
همچنین تانسور گرادیان سرعت، $\mathbf{L}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{L}=\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}=\mathbf{D}+\mathbf{W} \tag{۳}$$

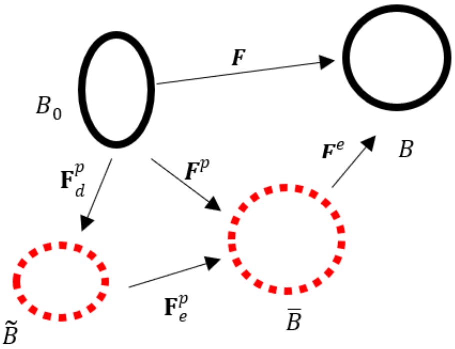
که در آن، $\mathbf{D}$ و$\mathbf{W}$ به ترتیب بخش‌های متقارن و پادمتقارن تانسور گرادیان سرعت هستند.

در مدل‌های پلاستیسیته‌ی مبتنی بر هایپرالاستیک، تانسور گرادیان تغییر شکل به صورت ضربی به تانسورهای گرادیان تغییر شکل الاستیک و پلاستیک تجزیه می‌شود که با این تجزیه، علاوه بر هیات‌های مرجع و کنونی، یک هیات فرضی و محلی بین هیات‌های ذکر شده تعریف می‌شود که به هیات میانی یا پلاستیک معروف است و با استفاده از تئوری‌های پلاستیسیته‌ی کریستالی [۱۸ و ۱۹] قابل توجیه است. شکل ۱ هیات‌های ذکر شده را نشان می‌دهد.

برای تجزیه‌ی ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل داریم:



شکل ۱- تجزیه ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل



شکل ۲- تجزیه ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\mathrm{e}}\mathbf{F}^{\mathrm{p}} \tag{٤}$$

که در آن، $\mathbf{F}^{\mathrm{e}}$ تانسور گرادیان تغییر شکل الاستیک و $\mathbf{F}^{\mathrm{p}}$ تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک هستند.

برای مدل‌سازی سخت‌شوندگی سینماتیکی، لیون یک مدل رئولوژیکی در حالت یک‌بعدی برای مسائل ترموویسکوپلاستیک ارائه کرد [۲۰]. سپس، با استفاده از این مدل رئولوژیکی و با استفاده از سینماتیک، در کرنش‌های محدود مدل جدیدی را تعریف کرد. در این مدل، تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک، $\mathbf{F}^{\mathrm{p}}$، به صورت ضربی به دو تانسور گرادیان تغییر شکل سخت‌شوندگی سینماتیک–الاستیک، $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$، و تانسور گرادیان تغییر شکل سخت‌شوندگی سینماتیک– اتلاف، $\mathbf{F}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}}$، تجزیه می‌شود. دو تانسور مذکور به ترتیب به قسمت انرژی ذخیره شده و قسمت انرژی اتلاف شده معروف هستند. با در نظر گرفتن این مدل و با توجه به شکل ۲، هیات فرضی و محلی دیگری، B، مابین هیات مرجع و هیات میانی تعریف می‌شود که این هیات به نام هیات سخت‌شوندگی سینماتیک– میانی شناخته می‌شود. هیات اولیه توسط $\mathbf{F}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}}$ به هیات مذکور تغییر شکل می‌دهد و بعد از تغییر شکل یافتن به وسیله‌ی $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$ به هیات میانی تبدیل می‌شود.

برای تجزیه‌ی ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک می‌توان نوشت:

$$\mathbf{F}^{\mathrm{p}} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}\mathbf{F}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}} \tag{٥}$$

با استفاده از تانسورهای تعریف شده در بالا می‌توان نوشت:

$$\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}} = \mathbf{F}^{\mathrm{eT}}\mathbf{F}^{\mathrm{e}}, \quad \overline{\mathrm{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} = \mathrm{F}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}\mathrm{F}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{pT}} \tag{٦}$$

که در آنها، $\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}$ تانسور کوشی–گرین راست الاستیک است و $\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$ تانسور کوشی–گرین چپ برای سخت‌شوندگی

سینماتیک- الاستیک است و هر دو تانسور در هیات میانی قرار دارند.

۳- هایپرالاستوپلاستیسیته

دو روش پلاستیسیته مبتنی بر هایپوالاستیک و پلاستیسیته مبتنی بر هایپرالاستیک در الاستوپلاستیک کرنش محدود وجود دارد. پلاستیسیته مبتنی بر هایپرالاستیک دارای مزایایی در مقایسه با پلاستیسیته مبتنی بر هایپوالاستیک ازجمله عدم اتلاف انرژی در تغییر شکل الاستیک و عدم وجود نوسان در تغییر شکل برش ساده است. علاوه بر این، پلاستیسیته مبتنی بر هایپوالاستیک تحت محدودیت تغییر شکل الاستیک کوچک کاربرد دارد. همچنین از منظر مسائل محاسباتی، معادله هایپوالاستیک شرایط انتگرال‌گیری کامل را برآورده نمی‌کند. در نتیجه برای غلبه بر دلایل ذکر شده استفاده از مدل هایپرالاستیک کاملاً اجتناب‌ناپذیر است. در مطالعات پیشین مدل‌های مختلف نئوهوکین با الگوریتم‌های انتگرال‌گیری زمانی مختلف در الاستوپلاستیسیته کرنش محدود مورد استفاده قرار گرفتند، که در این مقاله مدل مرجع [۳] به کار گرفته شده است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\psi(\mathbf{C}) = \frac{\Lambda}{4}\left(J^2-1-2\ln(J)\right)+\frac{\mu}{2}\left(\mathrm{trace}(\mathbf{C})-3-2\ln(J)\right) \tag{۷}$$

که در آن ψ تابع انرژی کرنشی هایپرالاستیک در واحد حجم و J دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل را نشان می‌دهند. همچنین Λ و μ ثابت‌های ماده هستند. زمانی که از تجزیه‌ی ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل برای الاستوپلاستیک کرنش محدود استفاده می‌شود، معادله‌ی فوق به صورت زیر با استفاده از پارامتر الاستیک نوشته می‌شود:

$$\psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}\right)= \frac{\Lambda}{4}\left(\det\left(\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}\right)-1-2\ln\sqrt{\det\left(\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}\right)}\right)+\frac{\mu}{2}\left(\mathrm{trace}\left(\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}\right)-3-2\ln\sqrt{\det\left(\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}\right)}\right) \tag{۸}$$

که در آن ψ تابع انرژی کرنشی هایپرالاستیک در واحد حجم و J دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل را نشان می‌دهند.

همچنین Λ و μ ثابت‌های ماده هستند. زمانی که از تجزیه‌ی ضربی تانسور گرادیان تغییر شکل برای الاستوپلاستیک کرنش محدود استفاده می‌شود، معادله‌ی فوق به صورت زیر با استفاده از پارامتر الاستیک نوشته می‌شود:

$$\overline{\mathbf{S}} = 2\frac{\partial\psi^{\mathrm{e}}\left(\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}\right)}{\partial\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}} = \frac{\Lambda}{2}\left(\det\left(\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}\right)-1\right)\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}+\mu\left(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}\right) \tag{۹}$$

$$\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}\overline{\mathbf{S}} \tag{۱۰}$$

که در آنها، $\overline{\mathbf{S}}$، $\mathbf{I}$ و $\overline{\mathbf{M}}$ به ترتیب تنش پایولا-کیرشهف دوم در هیات میانی، تانسور واحد و تنش مندل هستند.

بدین ترتیب، یک تابع انرژی کرنشی برای سخت‌شوندگی سینماتیک، $\psi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$، به شکلی مشابه با بخش برشی مدل هایپرالاستیک استفاده شده، تعریف می‌شود. بنابراین، می‌توان معادلات زیر را برای سخت‌شوندگی سینماتیکی بر مبنای $\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$ تعریف کرد:

$$\psi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}\left(\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}\right)= c\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{trace}\left(\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}\right)-3\right)-\ln\sqrt{\det\left(\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}\right)}\right) \tag{۱۱}$$

$$\overline{\mathbf{S}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} = 2\frac{\partial\psi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}\left(\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}\right)}{\partial\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}} = c\left(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}-1}\right) \tag{۱۲}$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} = \overline{\mathbf{S}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} = c\left(\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}-\mathbf{I}\right) \tag{۱۳}$$

که در آن، c ثابت ماده، $\overline{\mathbf{S}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$ متغیری شبیه تنش پایولا- کیرشهف دوم برای سخت‌شوندگی سینماتیک و $\overline{\mathbf{M}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$ متغیری شبیه تنش مندل برای سخت‌شوندگی سینماتیک هستند. بدین ترتیب، زمانی که $\psi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$ فقط یک تابع همسانگرد از $\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$ باشد، $\overline{\mathbf{S}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$ و $\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}$ هم‌محور می‌شوند و این امر سبب می‌شود که متغیرِ شبیه تنش مندل برای سخت‌شوندگی سینماتیک یک تانسور متقارن باشد.

برای سادگی در نوشتار، پارامتری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{M}} - \overline{\mathbf{M}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \qquad (١٤)$$

$$\varphi^{yld} = \sqrt{\frac{3}{2}\overline{\mathbf{M}}' : \overline{\mathbf{M}}'} - k \qquad (١٥)$$

که در آن، $\overline{\mathbf{M}}'$ مقدار انحرافی $\overline{\mathbf{M}}$ را نشان می‌دهد و k سخت‌شوندگی همسانگرد است که به وسیله‌ی معادله‌ی (١٦) تعریف می‌شوند:

$$k = \sigma_{y0} + KH + \left(\sigma_{ys} - \sigma_{y0}\right)\left[1 - exp\left(-dH\right)\right] \qquad (١٦)$$

که در آنها، σ_{y0} تنش تسلیم اولیه و σ_{ys}، d و K ثابت‌های ماده هستند و H کرنش پلاستیک معادل است. علاوه بر اینها، مندل [٢١] تانسور گرادیان تغییر شکل پلاستیک در هیات میانی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\overline{\mathbf{L}}^{\mathrm{p}} = \overline{\mathbf{D}}^{\mathrm{p}} + \overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\frac{\partial \varphi^{yld}}{\partial \overline{\overline{\mathbf{M}}}} \qquad (١٧)$$

که در معادله فوق، $\overline{\mathbf{L}}^{\mathrm{p}}$، $\overline{\mathbf{D}}^{\mathrm{p}}$، $\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{p}}$ و $\dot{\lambda}$ تانسور گرادیان سرعت پلاستیک، تانسور نرخ تغییر شکل پلاستیک، اسپین پلاستیک مواد و نرخ ضریب پلاستیک هستند. با فرض $\overline{\mathbf{W}}^{\mathrm{p}} = 0$ [٢٢] داریم:

$$\overline{\mathbf{D}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\frac{\partial \varphi^{yld}}{\partial \overline{\overline{\mathbf{M}}}} \qquad (١٨)$$

٤- پیاده‌سازی الگوریتم انتگرال‌گیری زمانی

در روش‌های عددی، به دست آوردن پاسخ‌های دقیق و صحیح یک ماده به الگوریتم‌های انتگرال‌گیری زمانی بستگی زیادی دارد، اگرچه پیشنهاد و استفاده از طرح‌های انتگرال‌گیری جدید همیشه مورد تقاضا است. در الاستوپلاستیک کرنش محدود، همانطور که قبلاً گفته شد، به دلیل پیچیدگی‌های موجود به‌ویژه در هایپرالاستوپلاستیسیته، ارائه و استفاده از الگوریتم‌های انتگرال‌گیری زمانی جدید مورد نیاز است. در این بخش، الگوریتمی بر مبنای مرجع [١٧] برای مدل فون میزز ارائه می‌شود. البته لازم به ذکر است که در مقاله‌ی مذکور از مدل سطح سابلودینگ استفاده شده است. گفتن این نکته ضروری است که به لحاظ عددی، استفاده از مدل سطح سابلودینگ به عنوان مدلی غیرمتعارف موجب پیچیدگی در پیاده‌سازی الگوریتم انتگرال‌گیری عددی می‌شود. برای مثال، مدل فون میزز تنها از یک سطح تسلیم استفاده می‌کند، در حالی که در مدل سطح سابلودینگ از سطح الاستیک و سطح سابلودینگ استفاده می‌شود. لذا با در نظر گرفتن این نکات توسعه الگوریتم جدید با به‌کارگیری مدل فون میزز می‌تواند بسیار کاربردی باشد. برای این منظور، روابط (١٩) تا (٢٢) در بازه زمانی $\left[t_n, t_{n+1}\right]$ نوشته می‌شود:

$$\overline{\mathbf{C}}_{n+1}^{\mathrm{e}-1} = \overline{\mathbf{Q}}_{n+1}^{\mathrm{p}}\overline{\mathbf{C}}_{n+1,tr}^{\mathrm{e}-1}\overline{\mathbf{Q}}_{n+1}^{\mathrm{pT}} \qquad (١٩)$$

$$\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e},n+1}^{\mathrm{p}-1} = \overline{\mathbf{Q}}_{\mathrm{e},n+1}^{\mathrm{p}}\overline{\mathbf{Q}}_{n+1}^{\mathrm{p-T}}\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e},n}^{\mathrm{p}-1}\overline{\mathbf{Q}}_{n+1}^{\mathrm{p}-1} \qquad (٢٠)$$

$$H_{n+1} - H_n = \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda \qquad (٢١)$$

$$\varphi_{n+1}^{yld} = \sqrt{\frac{3}{2}\overline{\mathbf{M}}'_{n+1} : \overline{\mathbf{M}}'_{n+1}} - k_{n+1} \qquad (٢٢)$$

در معادلات فوق، $\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{p}} = exp\left(\Delta\lambda\frac{\overline{\mathbf{M}}'}{\sqrt{\overline{\mathbf{M}}' : \overline{\mathbf{M}}'}}\right)$ و $\overline{\mathbf{Q}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} = exp\left(2\frac{b}{c}\Delta\lambda\overline{\mathbf{M}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}'}\right)$ هستند. در بازه زمانی $\left[t_n, t_{n+1}\right]$، با استفاده از مقادیر معلوم گام قبلی $\left(k_n, H_n, \overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{e},n}^{\mathrm{p}-1}, \overline{\mathbf{C}}_n^{\mathrm{e}-1}\right)$، مقادیر آزمایشی در t_{n+1} به صورت زیر آورده می‌شوند:

$$\overline{\mathbf{C}}_{n+1,tr}^{\mathrm{e}-1} = \overline{\mathbf{C}}_{n,tr}^{\mathrm{e}-1}\ ,\ \overline{\mathbf{B}}_{e,n+1,tr}^{\mathrm{p}-1} = \overline{\mathbf{B}}_{e,n,tr}^{\mathrm{p}-1}\ , \quad H_{n+1,tr} = H_n\ ,\ k_{n+1,tr} = k_n \qquad (٢٣)$$

بنابراین، با استفاده از مقادیر آزمایشی، تنش مندل آزمایشی محاسبه می‌شود. سپس بایستی در مورد اینکه وضعیت تنش در حالت الاستیک یا پلاستیک قرار دارد، تصمیم‌گیری شود. تصمیم‌گیری برای حالت الاستیک یا پلاستیک با استفاده از معادلات (٢٤) و (٢٥) انجام می‌شود:

$$\varphi_{n+1}^{yld} < 0 \quad \text{elastic case} \qquad (٢٤)$$

$$\varphi_{n+1}^{yld} \geq 0 \quad \text{plastic case} \qquad (٢٥)$$

جدول ۱- پارامترهای ماده برای کرنش الاستیک کوچک [۱۳]

(GPa) μ	(GPa) Λ	(MPa) σ_{y0}	(MPa) K
۷۵	۱۶۲/۵	۷۵۰۰	۶۰۰

جدول ۲- پارامترهای ماده برای کرنش الاستیک کوچک [۲۲]

(GPa) μ	(GPa) Λ	(MPa) σ_{y0}	c (MPa)	b
۸۰/۷۶	۱۷۵	۴۵۰	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{6}$

هنگامی که مورد الاستیک ارضا می‌شود (معادله‌ی (۲۴))، مقادیر آزمایشی قابل قبول هستند و زمانی که معادله‌ی (۲۵) ارضا می‌شود، یک مرحله اصلاح کننده پلاستیک مورد نیاز است. در مرحله اصلاح پلاستیک، برای حل معادلات فوق با روش نیوتن- رافسون، باقیمانده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}} = \overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}_{n+1} - \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{p}}_{n+1}\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}_{n+1,tr}\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{pT}}_{n+1} = \mathbf{0}\\
&\boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}} = \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e},n+1} - \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{e},n+1}\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{p}-\mathrm{T}}_{n+1}\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e},n}\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{p}-1}_{n+1} = \mathbf{0}\\
&R_H = H_{n+1} - H_n - \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda = 0\\
&R_{\varphi^{yld}} = \sqrt{\frac{3}{2}\overline{\mathbf{M}}'_{n+1} : \overline{\mathbf{M}}'_{n+1}} - k_{n+1} = 0
\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

علاوه بر آن بردارهای باقیمانده و مجهولات به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_{re}(\mathrm{Y}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}} \\ \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}} \\ R_H \\ R_{\varphi^{yld}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}_{n+1} \\ \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e},n+1} \\ H_{n+1} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

با در نظر گرفتن معادله‌ی فوق، تعداد متغیرهای مجهول با توجه به متقارن بودن $\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}_{n+1}$ و $\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e},n+1}$ برابر ۱۴ هستند. لازم به ذکر است که در روش نیوتن- رافسون، محاسبه یک ماتریس ژاکوبین، که در معادله‌ی (۲۸) ارائه می‌شود، برای نرخ درجه دوم همگرایی مورد نیاز است. نحوه‌ی مشتق‌گیری جزئی باقیمانده‌ها نسبت به مجهولات به صورت مختصر در پیوست آورده می‌شوند. علاوه بر این، برای مشاهده‌ی جزئیات محاسبه مشتقات جزئی موجود در ماتریس ژاکوبین می‌توان از مرجع [۱۷] استفاده کرد.

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}}}{\partial \overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}} & \frac{\partial \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}}}{\partial \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}} & \frac{\partial \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}}}{\partial H} & \frac{\partial \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}}}{\partial \Delta\lambda} \\
\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}}}{\partial \overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}} & \frac{\partial \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}}}{\partial \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}} & \frac{\partial \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}}}{\partial H} & \frac{\partial \boldsymbol{R}_{\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}}}{\partial \Delta\lambda} \\
\frac{\partial R_H}{\partial \overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}} & \frac{\partial R_H}{\partial \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}} & \frac{\partial R_H}{\partial H} & \frac{\partial R_H}{\partial \Delta\lambda} \\
\frac{\partial R_{\varphi^{yld}}}{\partial \overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}-1}} & \frac{\partial R_{\varphi^{yld}}}{\partial \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e}}} & \frac{\partial R_{\varphi^{yld}}}{\partial H} & \frac{\partial R_{\varphi^{yld}}}{\partial \Delta\lambda}
\end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

۵- تغییر شکل برش ساده

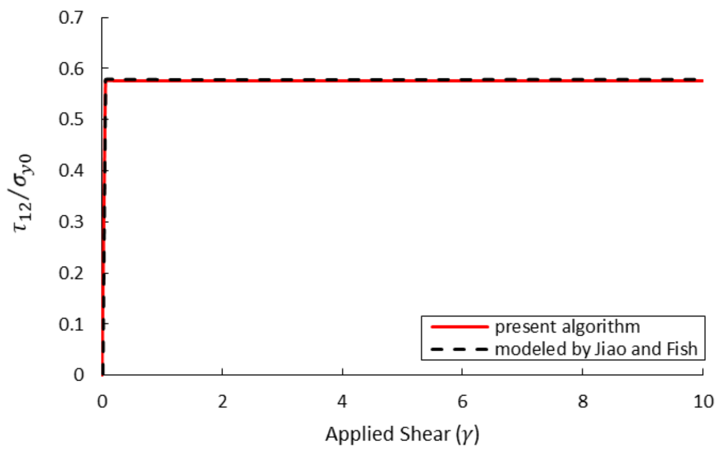
همانطور که پیش تر گفته شد، در اکثر تحقیقات پیشین تغییر شکل برش ساده برای اثبات صحت و کارایی مدل‌ها در الاستوپلاستیسیته کرنش بزرگ مورد بررسی قرار گرفته است. در این بخش، تغییر شکل برش ساده تحت کرنش الاستیک کوچک و بزرگ برای موادی که خواصشان در ادامه می‌آیند، مدل‌سازی می‌شود. لازم به ذکر است که تغییر شکل برش ساده تقریباً مشابه تغییر شکل یک لوله استوانه‌ای جدار نازک با انتهای گیردار است که تحت پیچش محدود قرار دارد. همچنین برای مدل‌سازی موارد مورد مطالعه در این مقاله، از خصوصیات مواد ارائه شده در مطالعات پیشین استفاده شده است که همگی در جدول‌های ۱ تا ۴ نشان داده شده‌اند.

جدول ۳- پارامترهای ماده برای فولاد زنگ‌نزن SUS 304 برای کرنش الاستیک کوچک [۵]

(GPa) μ	(GPa) Λ	(MPa) σ_{y0}	(MPa) σ_{ys}	d	c (MPa)	b
۷۸	۲۰۳/٤	۲۸۵/٦	٦۸۰	$\frac{5}{8}$	۲۰	۰/۲

جدول ٤- پارامترهای ماده برای کرنش الاستیک بزرگ [۱۳]

(GPa) μ	(GPa) Λ	(MPa) σ_{y0}	K (MPa)
۷٥	۱٦۲/٥	۹۰۰۰۰	۷۲۰۰



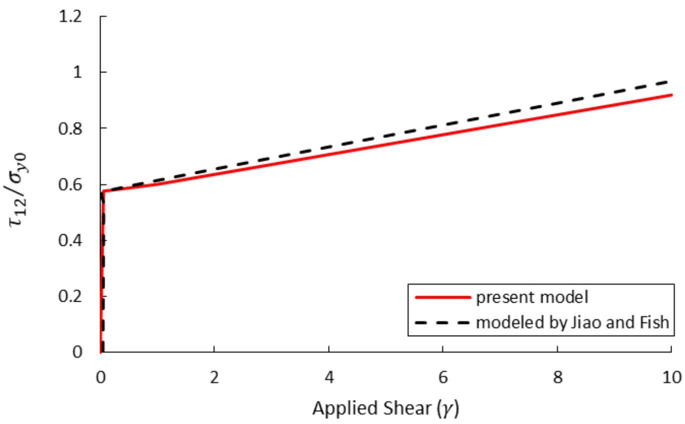
شکل ۳- نسبت $\frac{\tau_{12}}{\sigma_{y0}}$ برای ماده‌ی جدول ۱ با در نظر گرفتن پلاستیسیته کامل

همچنین لازم به ذکر است که تانسور گرادیان تغییر شکل برش ساده که در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته است، در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

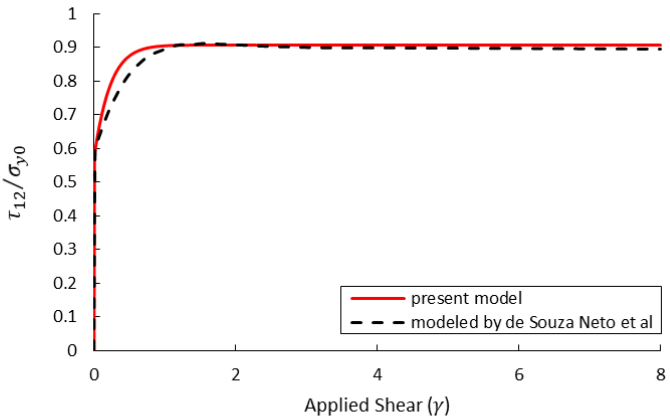
$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}1 & \gamma & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

۱-٥- تغییر شکل برش ساده با کرنش الاستیک کوچک

در این بخش، مسئله‌ی تغییر شکل برش ساده برای بلوکی با ابعاد واحد با کرنش الاستیک کوچک حل می‌شود. در حل این مسئله، پلاستیسیته به صورت کامل و همچنین با سخت‌شوندگی همسانگرد، سینماتیک و ترکیبی در نظر گرفته می‌شود. بدین منظور ابتدا مسئله‌ی مذکور برای ماده‌ی جدول ۱ با $\gamma=10$ تحت پلاستیک کامل حل می‌شود. همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، پاسخ ماده به صورت پلاستیک کامل به‌دست می‌آید. مطابق این شکل ماده در تنش ٤۳۳۰/۱۲ مگاپاسکال به تسلیم می‌رسد و تا انتهای تغییر شکل تنش در همان مقدار ثابت باقی می‌ماند. لازم به ذکر این نکته است که برخلاف برخی از مدل‌هایی که در مطالعات پیشین مورد استفاده قرار گرفته‌اند، در مدل حاضر بعد از $\gamma=4$ هیچگونه نوسان یا رفتاری به دور از واقعیت دیده نمی‌شود. با مقایسه‌ی نتایج مرجع [۱۳] و نتایج به‌دست آمده از مدل حاضر می‌توان مشاهده کرد که الگوریتم انتگرال‌گیری ارائه شده توانسته است با دقت بسیار خوبی پاسخ ماده را پیش‌بینی کند.



شکل ٤- نسبت $\frac{\tau_{12}}{\sigma_{y0}}$ برای مادهی جدول ١ با سختشوندگی همسانگرد

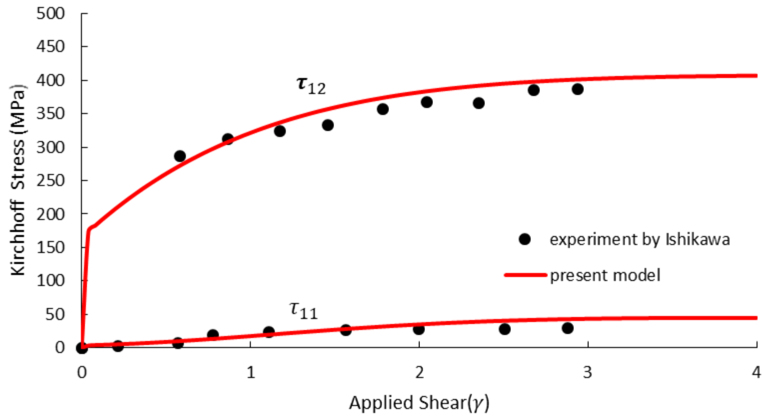


شکل ٥- نسبت $\frac{\tau_{12}}{\sigma_{y0}}$ برای مادهی جدول ٢ با سختشوندگی سینماتیک

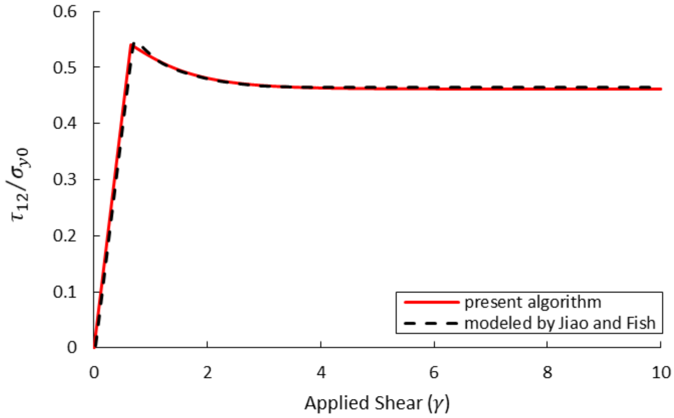
نتایج بهدست آمده برای مسئلهی تغییر شکل برش ساده با $\gamma = 10$ تحت پلاستیک با سختشوندگی همسانگرد خطی ($k = \sigma_{y0} + KH$) در شکل ٤ مشاهده میشود. برای این حالت از خواص جدول ١ استفاده شده است. همانطور که در این شکل دیده میشود بعد از رسیدن به تسلیم، به دلیل فرض خطی سختشوندگی همسانگرد، مقادیر نسبت تنش کیرشهف برشی به تنش تسلیم با شیب ثابتی تا انتهای تغییر شکل اعمالی افزایش پیدا میکند. همچنین مشاهده میشود نتایج بهدست آمده از مدل ارائه شده در این مقاله با نتایج مرجع [١٣] دارای تطابق خوبی هستند.

شکل ٥ نسبت $\frac{\tau_{12}}{\sigma_{y0}}$ برای تغییر شکل برش ساده برای مادهی جدول ٢ با $\gamma = 10$ تحت پلاستیک با سختشوندگی سینماتیک را نشان میدهد. مطابق این شکل، نتایج در محدودهی الاستیک و پلاستیک در تطبیق بسیار خوبی با نتایج مرجع [٢٢] هستند، ولی در ناحیهی گذر از الاستیک به پلاستیک دارای اختلاف هستند. به نظر میرسد این اختلاف ناشی از انتگرالگیریهای عددی مختلفی باشد که در این مقاله و مرجع گفته شده استفاده شده است.

شکل ٦ تنشهای کیرشهف نرمال و برشی را برای فولاد زنگنزن SUS 304 با سختشوندگی ترکیبی همسانگرد و



شکل ٦- تنش کیرشهف برای ماده‌ی جدول ٣ با سخت‌شوندگی ترکیبی همسانگرد و سینماتیک

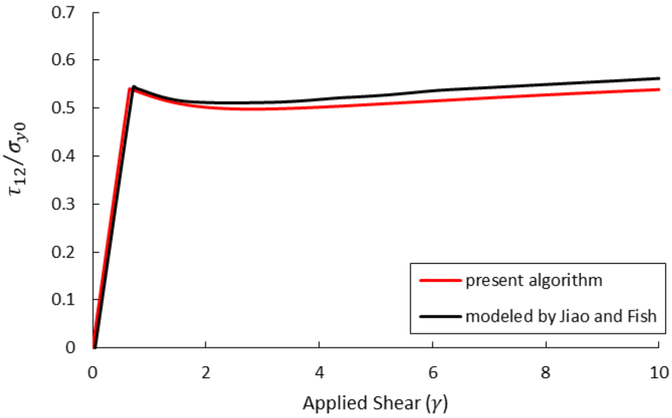


شکل ٧- نسبت $\frac{\tau_{12}}{\sigma_{y0}}$ برای ماده‌ی جدول ٢ با در نظر گرفتن پلاستیسیته کامل

سینماتیک برای $\gamma=4$ نشان می‌دهد. در این مدل‌سازی برای سخت‌شوندگی همسانگرد از معادله‌ی (١٦) استفاده شده است. مطابق این شکل، پاسخ‌های پیش‌بینی شده به وسیله‌ی الگوریتم انتگرال‌گیری ارائه شده در مقاله حاضردر تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی مرجع [٥] هستند.

٢-٥- تغییر شکل برش ساده با کرنش الاستیک بزرگ

در این بخش، تغییر شکل برش ساده برای بلوکی به ابعاد واحد با کرنش الاستیک بزرگ یک‌بار با پلاستیک کامل و یک‌بار با سخت‌شوندگی همسانگرد برای ماده‌ی جدول ٤ بررسی می‌شوند. انتخاب مواد در این بخش به گونه‌ای است که در کرنش الاستیک بزرگ‌تری وارد ناحیه‌ی پلاستیک می‌شوند. به عبارت دیگر، کرنش الاستیک نیز همانند کرنش پلاستیک دارای مقداری بزرگ است. بدین ترتیب ابتدا مسئله‌ی مذکور با $\gamma=10$ تحت پلاستیک کامل حل می‌شود. همانطور که در شکل ٧ مشاهده می‌شود، تطبیق بسیار خوبی بین نتایج مدل حاضر و نتایج مرجع [١٣] دیده می‌شود. مطابق آنچه در این شکل دیده می‌شود، در منطقه گذار، ماده نرم‌شدگی از خود نشان می‌دهد و سپس پاسخ ماده در مقدار تنش ثابتی (با توجه به پلاستیک کامل بودن) در نتایج مدل‌سازی دیده می‌شود.



شکل ۸- نسبت $\frac{\tau_{12}}{\sigma_{y0}}$ برای ماده‌ی جدول ۲ با سخت‌شوندگی همسانگرد

نمودار تغییرات نسبت $\frac{\tau_{12}}{\sigma_{y0}}$ برای تغییر شکل برش ساده با $\gamma=10$ تحت پلاستیک با سخت‌شوندگی همسانگرد خطی ($k=\sigma_{y0}+KH$) در شکل ۸ مشاهده می‌شود. همانطور که در این شکل دیده می‌شود بعد از رسیدن به تسلیم، ماده نرم می‌شود و سپس به دلیل فرض سخت‌شوندگی همسانگرد خطی تنش با شیب ثابتی محاسبه می‌شود. مطابق این نمودار نتایج حاصل از مدل حاضر در تطابق خوبی با نتایج مرجع [۱۳] هستند، ولی با افزایش مقدار γ، مقداری اختلاف در نتایج دیده می‌شود.

٦- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، الگوریتم انتگرال‌گیری زمانی برای هایپرالاستوپلاستیسیته با مدل فون میزز ارائه شده است. در این الگوریتم از تانسورهای متقارن برای کم کردن زمان محاسبات و کاهش تعداد مجهولات و کاستن پیچیدگی های مدل استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده برای تغییر شکل برش ساده با در نظر گرفتن چهار نوع ماده با کرنش‌های الاستیک کوچک و بزرگ برای پلاستیسیته‌ی کامل و پلاستیسیته با سخت‌شوندگی‌های همسانگرد، سینماتیک و ترکیبی نشان دادند که تطابق خوبی با نتایج موجود در ادبیات پژوهشی وجود دارد. همچنین نتایج مدل ارائه شده نشان داد که برای حالت کرنش الاستیک بزرگ این مدل قابلیت پیش‌بینی رفتار نرم‌شدگی ماده بعد از تسلیم را دارا است و می‌تواند به عنوان یک مدل کاربردی در شبیه‌سازی رفتار مواد هایپرالاستوپلاستیک مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌نامه

1. Hyperelastoplasticity
2. Hypoelastoplasticity
3. Extended subloading surface model

پیوست

در این قسمت، محاسبات مشتقات موجود در ماتریس ژاکوبین (معادله‌ی (۲۸)) آورده می‌شوند. برای محاسبه مشتقات جزئی نسبت به مجهولات، معادلات (پ-۱) تا (پ-۱۳) با استفاده از نوشتار اندیسی بیان می‌شوند که در آنها $\overline{I}$، $\overline{J}$، $\overline{K}$ و $\overline{L}$ اندیس‌های آزاد هستند و می‌توانند از ۱ تا ۳ متغیر باشند و $\overline{M}$ و $\overline{N}$ اندیس‌های تکرار شونده هستند. این مشتقات با استفاده از مشتق‌گیری زنجیره‌ای

به‌دست می‌آیند.

برای سطر اول ماتریس ژاکوبین داریم:

$$\frac{\partial R_{\mathrm{C}^{e-1},\bar I\bar J}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}}=\frac{1}{2}\left(\delta_{\bar I\bar K}\delta_{\bar J\bar L}+\delta_{\bar I\bar L}\delta_{\bar J\bar K}\right)-\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar I\bar M}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}}\bar{\mathbf{C}}^{e-1}_{tr,\bar M\bar N}\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar N\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar I\bar M}\bar{\mathbf{C}}^{e-1}_{tr,\bar M\bar N}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar N\bar J}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}} \tag{پ-۱}$$

$$\frac{\partial R_{\mathrm{C}^{e-1},\bar I\bar J}}{\partial \bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,\bar K\bar L}}=-\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar I\bar M}}{\partial \bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,\bar K\bar L}}\bar{\mathbf{C}}^{e-1}_{tr,\bar M\bar N}\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar N\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar I\bar M}\bar{\mathbf{C}}^{e-1}_{tr,\bar M\bar N}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar N\bar J}}{\partial \bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,\bar K\bar L}} \tag{پ-۲}$$

$$\frac{\partial R_{\mathrm{C}^{e-1},\bar I\bar J}}{\partial H}=-\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar I\bar M}}{\partial H}\bar{\mathbf{C}}^{e-1}_{tr,\bar M\bar N}\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar N\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar I\bar M}\bar{\mathbf{C}}^{e-1}_{tr,\bar M\bar N}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar N\bar J}}{\partial H} \tag{پ-۳}$$

$$\frac{\partial R_{\mathrm{C}^{e-1},\bar I\bar J}}{\partial \Delta\lambda}=-\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar I\bar M}}{\partial \Delta\lambda}\bar{\mathbf{C}}^{e-1}_{tr,\bar M\bar N}\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar N\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar I\bar M}\bar{\mathbf{C}}^{e-1}_{tr,\bar M\bar N}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{\bar N\bar J}}{\partial \Delta\lambda} \tag{پ-۴}$$

که در معادلات فوق، $\delta_{\bar I\bar J}$ مؤلفه‌های دلتای کرونکر است. برای سطر دوم ماتریس ژاکوبین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial R_{\mathrm{B}_e^{p-1},\bar I\bar J}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}}=\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}} \tag{پ-۵}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\mathrm{B}_e^{p-1},\bar I\bar J}}{\partial \bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,\bar K\bar L}}&=\frac{1}{2}\left(\delta_{\bar I\bar K}\delta_{\bar J\bar L}+\delta_{\bar I\bar L}\delta_{\bar J\bar K}\right)-\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}}{\partial \bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,\bar K\bar L}}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}}{\partial \bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,\bar K\bar L}}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}\\&-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}}{\partial \bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,\bar K\bar L}}\end{aligned} \tag{پ-۶}$$

$$\frac{\partial R_{\mathrm{B}_e^{p-1},\bar I\bar J}}{\partial H}=\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}}{\partial H}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}}{\partial H}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}}{\partial H} \tag{پ-۷}$$

$$\frac{\partial R_{\mathrm{B}_e^{p-1},\bar I\bar J}}{\partial \Delta\lambda}=\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}}{\partial \Delta\lambda}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}}{\partial \Delta\lambda}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}-\bar{\mathrm{Q}}^{p}_{e,\bar I\bar M}\bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar M\bar N}\bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,n,\bar N\bar P}\frac{\partial \bar{\mathrm{Q}}^{p-1}_{\bar P\bar J}}{\partial \Delta\lambda} \tag{پ-۸}$$

برای سطر سوم ماتریس ژاکوبین به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial R_H}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}}=0\quad,\qquad \frac{\partial R_H}{\partial \bar{\mathrm{B}}^{p-1}_{e,\bar K\bar L}}=0,\qquad \frac{\partial R_H}{\partial H}=1,\qquad \frac{\partial R_H}{\partial \Delta\lambda}=-\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{پ-۹}$$

و نهایتاً برای سطر چهارم ماتریس ژاکوبین داریم:

$$\frac{\partial R_{\varphi^{yld}}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}}=\frac{\partial \varphi^{yld}}{\partial \bar{\mathrm{M}}_{\bar M\bar N}}\frac{\partial \bar{\mathrm{M}}_{\bar M\bar N}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}}+\frac{\partial \varphi^{yld}}{\partial \bar{\mathrm{M}}^{p}_{e,\bar M\bar N}}\frac{\partial \bar{\mathrm{M}}^{p}_{e,\bar M\bar N}}{\partial \bar{\mathrm{C}}^{e-1}_{\bar K\bar L}} \tag{پ-۱۰}$$

$$\frac{\partial R_{\varphi^{yld}}}{\partial \overline{\mathrm{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e},\bar{K}\bar{L}}}=\frac{\partial \varphi^{yld}}{\partial \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{e},\bar{M}\bar{N}}}\frac{\partial \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{e},\bar{M}\bar{N}}}{\partial \overline{\mathrm{B}}^{\mathrm{p}-1}_{\mathrm{e},\bar{K}\bar{L}}} \qquad \text{(پ-۱۱)}$$

$$\frac{\partial R_{\varphi^{yld}}}{\partial H}=\frac{\partial \varphi^{yld}}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial H} \qquad \text{(پ-۱۲)}$$

$$\frac{\partial R_{\varphi^{yld}}}{\partial \Delta\lambda}=0 \qquad \text{(پ-۱۳)}$$

که در آن، $\frac{\partial k}{\partial H}$ با در نظر گرفتن معادله‌ی (۱٦) برابر خواهد بود با: $K+d\left(\sigma_{ys}-\sigma_{y0}\right)exp\left(-dH\right)$.

منابع

References

1. Idesman, A.V., “Comparison of Different Isotropic Elastoplastic Models at Finite Strains Used in Numerical Analysis”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192 (41-42), pp.4659-4674, 2003.
2. Dettmer, W. and Reese, S., “On the Theoretical and Numerical Modelling of Armstrong–Frederick Kinematic Hardening in The Finite Strain Regime”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193 (1-2), pp. 87-116, 2004.
3. Vladimirov, I. N., Pietryga, M. P., and Reese, S., “On the Modelling of Non-Linear Kinematic Hardening at Finite Strains with Application to Spring back—Comparison of Time Integration Algorithms”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 75 (1), pp. 1-28, 2008.
4. Heidari, M., Vafai, A., and Desai, C., “An Eulerian Multiplicative Constitutive Model of Finite Elasto plasticity”, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 28 (6), pp.1088-1097, 2009.
5. Ishikawa, H., “Constitutive Model of Plasticity in Finite Deformation”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 15(3), pp.299-317, 2009.
6. Eshraghi, A., Jahed, H. and Lambert, S., “A Lagrangian Model for Hardening Behaviour of Materials at Finite Deformation Based on The Right Plastic Stretch Tensor”, *Materials & Design (1980-2015)*, Vol. 31 (5), pp. 2342-2354, 2010.
7. Zhu, Y., Kang, G. H., Kan, Q. H., Yu, C., and Ding, J., “An Extended Cyclic Plasticity Model at Finite Deformations Describing The Bauschinger Effect and Ratchetting Behavior”, *In 13th International Conference on Fracture June* (pp. 16-21), 2013.
8. Pascon, J. P. and Coda, H. B., “Large Deformation Analysis of Elastoplastic Homogeneous Materials via High Order Tetrahedral Finite Elements”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 76, pp. 21-38, 2013.
9. Eshraghi, A., Jahed, H. and Papoulia, K. D., “Eulerian Framework for Inelasticity Based on the Jaumann Rate and a Hyperelastic Constitutive Relation—Part II: Finite Strain Elastoplasticity”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80 (2), pp. 021028, 2013.
10. Eshraghi, A., Jahed, H. and Papoulia, K. D., “Eulerian Framework for Inelasticity Based on the Jaumann Rate and a Hyperelastic Constitutive Relation—Part II: Finite Strain Elasto plasticity”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80(2), pp. 021028, 2013.
11. Brepols, T., Vladimirov, I. N. and Reese, S., “Numerical Comparison of Isotropic Hypo-and Hyper elastic-Based Plasticity Models with Application to Industrial Forming Processes”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 63, pp.18-48, 2014.
12. Iguchi, T., Yamakawa, K., Hashiguchi, K. and Ikeda, K., “Extended Subloading Surface Model Based on Multiplicative Finite Strain Elastoplasticity Framework: Constitutive Formulation and Fully Implicit Return-Mapping Scheme”, *Trans Jpn Soc Mech Eng. https://doi. org/10.1299/Transjsme*, pp.17-00008, 2017.
13. Jiao, Y., and Fish, J., “On the Equivalence Between the Multiplicative Hyper-Elasto-Plasticity and The Additive Hypo-Elasto-Plasticity Based on The Modified Kinetic Logarithmic Stress Rate”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 340, pp. 824-863, 2018.
14. Zhang, M. and Montans, F. J., “A Simple Formulation for Large-Strain Cyclic Hyperelasto-Plasticity Using Elastic Correctors. Theory and Algorithmic Implementation”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 113, pp.185-217, 2019.
15. Nguyen, K., Sanz, M.A. and Montáns, F.J., “Plane-Stress Constrained Multiplicative Hyper elasto-Plasticity with Nonlinear Kinematic Hardening. Consistent Theory Based on Elastic Corrector Rates and Algorithmic Implementation ”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 128, pp. 102592, 2020.

16. Simo, J. C., “On the Computational Significance of The Intermediate Configuration and Hyperelastic Stress Relations in Finite Deformation Elastoplasticity ”, *Mechanics of Materials*, Vol. *4*(3-4), pp. 439-451, 1985.
17. Toluei, R. and Kharazi, M., “Implementation of Subloading Surface Model for Hyper Elasto Plasticity with Nonlinear Kinematic/Isotropic Hardening Based on Reference and Intermediate Configurations”, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 121, pp. 751-779, 2023.
18. Asaro, R. J., “Micromechanics of Crystals and Polycrystals”, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 23, pp. 1-115, 1983.
19. Peirce, D., Asaro, R. J. and Needleman, A., “An Analysis of Nonuniform and Localized Deformation in Ductile Single Crystals”, *Acta Metallurgica*, Vol. 30 (6), pp. 1087-1119, 1982.
20. Lion, A., “Constitutive Modelling in Finite Thermo Viscoplasticity: A Physical Approach Based on Nonlinear Rheological Models”, *International Journal of Plasticity*, Vol. 16 (5), pp. 469-494, 2000.
21. Mandel, J., “Plasticit´e Classique et Viscoplasticit´e”, *Vienna: Springer-Verlag*, 1972.
22. De Souza Neto, E. A., Peric, D. and Owen, D. R., “Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications”, *John Wiley & Sons*, 2011.