



Buckling analysis of orthotropic rectangular plates with adhesive connection by generalized differential quadrature method

Hossein Nejatbakhsh,  Ahmad Reza Ghasemi*  and Saeid Amir

Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract: Orthotropic plates used in composite structures are subject to local buckling, including compressive buckling. In the process of designing and building most large structures or instruments with complex geometry, joints in the structure are unavoidable. Today, adhesive joints are widely used in connecting composite structures due to some advantages over mechanical joints. In this article, the buckling phenomenon of orthotropic rectangular multilayer plates connected with glue has been investigated, and the force effects of the glue layer under buckling loading conditions have been studied. In order to obtain the critical buckling loads under different boundary conditions, the generalized differential quadrature method (GDQM) has been used. Buckling analysis is presented based on first-order shear deformation theory (FSDT) for carbon/epoxy, glass/epoxy and Kevlar/epoxy composite materials with different porcelain layers. The effect of thickness and type of the adhesive as a bonding layer has been investigated. In plates made of a type of porcelain layer, two-way carbon epoxy plates show higher buckling strength, and in general, the higher the ratio of length to width of the plates is, the higher the buckling strength will be. In the connections, the obtained results have been compared with the results from the finite element analysis in ABAQUS commercial software.

Keywords: Compressive buckling, Composite plates, Lap- joint, Adhesive joint, GDQM.

Received: Dec. 26, 2023; Revised: Jun. 09, 2024; Accepted: Jun. 18, 2024; Published Online: Mar. 11, 2025.

* Corresponding Author: Ghasemi@Kashanu.ac.ir

How to Cite: Nejatbakhsh Hossein, Ghasemi Ahmad Reza and Amir Saeid, Buckling analysis of orthotropic rectangular plates with adhesive connection by generalized differential quadrature method, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 43(2), 29-49; doi.org/10.47176/jcme.43.2.1022.





تحلیل کماتش صفحات مستطیلی غیرهمسانگرد با اتصال چسبی به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته

حسین نجات بخش^۱، احمدرضا قاسمی^{۱*} و سعید امیر

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده - صفحات غیرهمسانگرد^۱ مورد استفاده در سازه‌های کامپوزیتی در معرض کماتش‌های موضعی از جمله کماتش فشاری قرار دارند. در فرآیند طراحی و ساخت اغلب سازه‌های بزرگ و یا سازه‌ها با هندسه پیچیده، اتصالات در سازه‌ها گریزناپذیر است. امروزه اتصالات چسبی به دلیل برخی مزیت‌ها نسبت به اتصالات مکانیکی کاربرد گسترده‌ای در اتصال سازه‌های کامپوزیتی پیدا کرده است. در این مقاله به بررسی پدیده کماتش صفحات چندلایه مستطیلی غیرهمسانگرد متصل شده با چسب پرداخته شده است و اثرات نیرویی لایه چسب تحت شرایط بارگذاری کماتشی بررسی شده است. به منظور به دست آوردن بارهای بحرانی کماتش تحت شرایط مرزی مختلف از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته^۲ استفاده شده است. تحلیل کماتش بر مبنای روابط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۳ برای مواد کامپوزیت کربن/اپوکسی، شیشه/اپوکسی و کولار/اپوکسی با لایه چینی‌های مختلف ارائه شده است. اثر ضخامت و جنس چسب به عنوان لایه اتصال بررسی شده است. در صفحات از یک نوع لایه چینی، صفحات از جنس کربن اپوکسی دو جهته استحکام کماتشی بالاتری را از خود نشان می‌دهند و به صورت کلی هر چه نسبت طول به عرض صفحات بیشتر شود، استحکام کماتشی افزایش می‌یابد. در اتصالات با نتایج به دست آمده با استفاده از روش آنالیز اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس^۴ مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: کماتش فشاری، صفحات کامپوزیتی، اتصال لب‌لب^۵، اتصال چسبی، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته.

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۱۰/۰۵، بازنگری: ۱۴۰۳/۰۳/۲۰، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۲۹، اولین انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۲۱

* نویسنده مسئول، رایانامه: Ghasemi@Kashanu.ac.ir

حق انتشار این مستند، متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است. © ۱۴۰۳

این مقاله تحت گواهی زیر منتشر شده و هر نوع استفاده غیرتجاری از آن مشروط بر استناد صحیح به مقاله و با رعایت شرایط مندرج در

آدرس زیر مجاز است:



فهرست علائم

نیروهای برشی	Q_{ix}, Q_{iy}	جابجایی صفحات میانی	u_i^0, v_i^0, w_i^0
ماتریس سفتی کششی	A_{jk}^i	کرنش صفحات میانی	$\varepsilon_{ixx}^0, \varepsilon_{iyy}^0$
ماتریس کوپلینگ	B_{jk}^i	کرنش صفحات میانی	$\gamma_{ixy}^0, \gamma_{ixz}^0, \gamma_{iyz}^0$
ماتریس سفتی خمشی	D_{jk}^i	انحنا	$\kappa_{ixx}, \kappa_{iyy}, \kappa_{ixy}$
تنش برشی عرضی	$\sigma_{xz}^c, \sigma_{xz}^f$	چرخش	ϕ_{ix}, ϕ_{iy}
انرژی کرنشی	U	نیروهای منتهجه	$N_{ixx}, N_{iyy}, N_{ixy}$
کار مجازی	V	ممان‌های منتهجه	$M_{ixx}, M_{iyy}, M_{ixy}$
شرایط مرزی ساده	S	ضرایب ماتریس سفتی	\bar{Q}_{jk}
شرایط مرزی آزاد	F	شرایط مرزی گیردار	C
ماتریس سفتی	$[K]$	تعداد نقاط شبکه	N
بار بحرانی کمانش	N_{cr}	ماتریس نیروی خارجی	$[P]$
ضخامت صفحات	t_1, t_2	ضریب تصحیح برش	K_s
مدول الاستیک عرضی	E_y	مدول الاستیک طولی	E_x
مشخصه طول برش چسب	ω	مدول الاستیک برشی	E_s
ضریب سختی برشی چسب	K_{II}	ضریب سختی نرمال چسب	K_I

۱- مقدمه

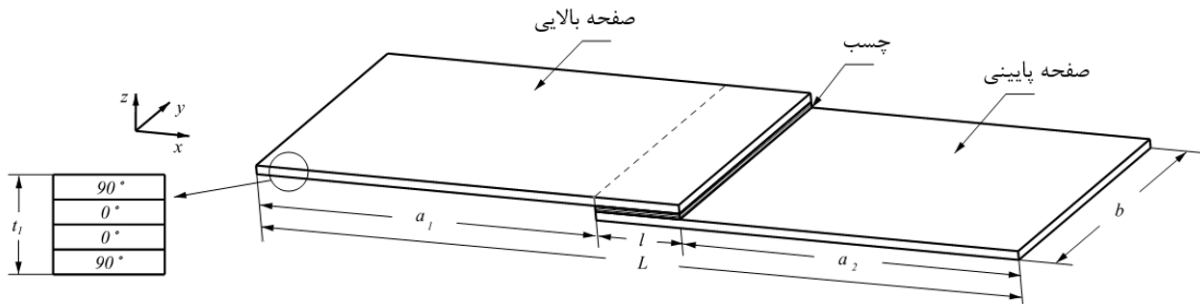
استفاده از سازه‌های کامپوزیتی به دلیل نسبت استحکام به وزن مطلوب و سهولت ساخت به امری ضروری در صنایع هوایی و مدرن تبدیل شده است. به دلیل هزینه‌های ساخت سازه‌ها با هندسه پیچیده، استفاده از سازه‌های کامپوزیتی کاملاً یکپارچه متداول نیست. به همین دلیل استفاده از اتصالات مکانیکی و یا اتصالات چسبی در سازه‌های پیچیده کامپوزیتی گریزناپذیر است. اتصال چسبی به دلیل ویژگی‌های مکانیکی مطلوب از جمله وزن کمتر، توزیع تنش نسبتاً یکنواخت و سهولت اجرا در اتصالات کامپوزیتی سازه‌ها نقش گسترده‌ای دارند. در سال‌های اخیر مطالعات زیادی در زمینه تحلیل تنش و کمانش صفحات همسانگرد^۱ و غیرهمسانگرد و یا بررسی استحکام چسب بین صفحات به هم متصل شده، انجام شده است.

یانگ و همکاران در سال ۱۹۶۶ روابط حاکم بر صفحات ناهمگن به همراه تغییر شکل‌های برشی عرضی و اینرسی دورانی را به صورت سه‌بعدی برای صفحات غیرهمسانگرد و همسانگرد با لایه‌های متقارن ارائه کردند [۱]. کو و همکاران در سال ۱۹۹۳ ارتعاش صفحات چندلایه چسبانده شده لب‌به‌لب را بررسی

کردند. در این تحقیق صفحات چندلایه با اتصال لب‌به‌لب با نتایج مربوط به صفحات بدون اتصال مقایسه شدند [۲]. دوو و همکاران در سال ۱۹۹۶ با روش عددی کارآمد و بسیار دقیق محاسباتی به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای تحلیل کمانش الاستیک صفحات و ستون‌ها ارائه کردند [۳]. یوچ اوغلو و همکاران نیز در سال ۱۹۹۶ روی ارتعاشات آزاد خمشی صفحات مستطیلی غیرهمسانگرد چسبیده شده به هم، به صورت اتصال تک لبه‌ای مطالعه کردند و تأثیر تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی در صفحات را بررسی کردند [۴]. هلمز و همکاران در سال ۲۰۲۲ به تجزیه و تحلیل کمانش یک اتصال کامپوزیتی با چسب مورب باریک پرداختند. آن‌ها یک مدل تحلیلی از رفتار یک اتصال کامپوزیت مورب چسب تحت بارگذاری فشاری محوری با استفاده از روش ریتز بر اساس تئوری تیر چندلایه انجام دادند و بار بحرانی کمانش بر اثر تغییر زاویه چسب، ضخامت چسب و مدول چسب را به صورت تحلیلی بررسی کردند [۵]. کوچک زاده در سال ۲۰۰۷ به تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی چندلایه مستطیلی با شرایط جدایش لایه در لبه، تحت بارگذاری فشاری در صفحه با استفاده از روش اجزای محدود

پردازد. در این مطالعه به مقایسه روش تحلیل در پیش‌بینی بار کمانش و حالت کمانش با نتایج تجربی و تحلیلی موجود در مقالات و تأثیر ابعاد و شرایط مرزی بر بار کمانش پرداخته شده است [۶]. فتاحی و همکاران در سال ۲۰۰۸ به مطالعه کمانش صفحات مستطیلی غیرهمسانگرد تحت بارهای مختلف پرداختند. معادلات کمانش حاکم برای صفحات همسانگرد از روش ریلی - ریتز با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته انجام و مقادیر ویژه به دست آوردند و با نتایج حل اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار انسیس^۷ مقایسه کردند [۷]. رودریگز و همکاران در سال ۲۰۱۱ تجزیه و تحلیل تنش و معیارهای خرابی اتصالات تک‌لبه چسبی را بررسی کردند. در این تحقیق روش‌های فولکرسن، گولاند و رایسنر، هارت اسمیت و اوچالوو و ایدینوف بررسی و با استفاده از روش اجزای محدود مقایسه شد و معیارهای اصلی شکست بررسی گردید [۸]. عابدی و کوچک زاده در سال ۲۰۱۳ به بررسی کمانش دو پوسته مخروطی همسانگرد به هم متصل تحت فشار محوری و شرایط مرزی ساده پرداختند. معادلات حاکم با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای به دست آوردن بارهای بحرانی کمانش دقیق استفاده شده است [۹]. کوچک زاده و شکوری در سال ۲۰۱۳ به مطالعه رفتار ارتعاشی دو پوسته مخروطی چندلایه متصل به هم و بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های حالت پرداختند. در این مطالعه پوسته‌های مخروطی به هم پیوسته را به‌عنوان حالت کلی پوسته‌های استوانه‌ای - مخروطی به هم پیوسته، ورق‌های استوانه‌ای یا مخروطی متصل، پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل با ضخامت‌های پلکانی و همچنین صفحات حلقوی در نظر گرفته شد. در این مطالعه با به دست آوردن معادلات حاکم از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای حل آن استفاده گردید [۱۰]. ویجایا کومار و همکاران در سال ۲۰۱۴ به مطالعه تغییرات تنش بر روی اتصال کامپوزیت لب‌به‌لب با استفاده از روش مونت‌کارلو پرداختند. آن‌ها با روش اجزای محدود و روش تصادفی مونت‌کارلو، اتصالات صفحات از جنس کامپوزیت را بررسی کردند. سطوح با استفاده از روش برهم‌نگاری تصاویر

دیجیتال^۸ بررسی گردید و با مدل اجزای محدود مقایسه شد. آن‌ها نشان دادند مدول و ضخامت چسب بر حداکثر تنش برشی چسب تأثیر دارد [۱۱]. بخشی خانیکی و همکاران در سال ۲۰۱۷ بر روی آنالیز کمانش تیرهای غیریکنواخت به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته پرداخت. در این تحقیق معادله حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همیلتون^۹ برای تیرهای گرادیان کرنش غیرمحملی غیریکنواخت ارائه شده و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر حل شده است و بارهای کمانش بحرانی به‌دست آمده است [۱۲]. طالع‌زاده و همکاران در سال ۲۰۱۸ به بررسی کمانش محوری یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌اول پرداختند. معادلات حاکم در دو جهت طولی و محیطی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته حل شده و با مدل اجزای محدود آباکوس مقایسه شده است [۱۳]. پوده و همکاران در سال ۲۰۱۸ به مطالعه کمانش صفحات مستطیلی غیرهمسانگرد تحت انواع بارگذاری غیرخطی پرداختند. آن‌ها معادلات کمانش حاکم برای یک صفحه همسانگرد را با استفاده از معادلات تشکیل‌دهنده مواد غیرهمسانگرد و به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته استفاده کردند و مقادیر ویژه را برای نسبت ابعاد صفحه، تعداد لایه‌ها و برای نوع شرایط مرزی مختلف بررسی کردند [۱۴]. بلکاسم در سال ۲۰۱۸ به بررسی رفتار کمانش در صفحات کامپوزیتی چندلایه هیبریدی کربن/شیشه با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی پرداخت و بار کمانش بحرانی تحت شرایط مرزی مختلف بررسی کرد. نتایج حاصل با نظریه‌های مرتبه‌اول و سایر نظریه‌های مرتبه بالاتر از مقالات مقایسه شد [۱۵]. اوغلو و همکاران در سال ۲۰۱۹ رفتار مکانیکی اتصال لب‌به‌لب چسبی صفحات همسانگرد تحت نیروی فشاری را بررسی کردند. آن‌ها اتصالات چسبی با ضخامت مختلف را برای اتصال لب‌به‌لب و رفتار شرایط کمانش شبه-استاتیکی بررسی کردند [۱۶]. اوغلو و همکاران در سال ۲۰۲۰ اثرات بار فشاری بر روی اتصال تک لبه چسب با پارامترهای مختلف را بررسی کردند.



شکل ۱ - صفحات کامپوزیتی با اتصال چسبی لب به لب

چسب انجام شده است. همچنین کمانش صفحات از جنس مختلف با لایه چینی‌های مختلف بررسی گردیده است. مقادیر به کمک آنالیز اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس بررسی گردیده است.

۲- معادلات حاکم

در این قسمت معادلات حاکم بر صفحات مستطیلی با اتصال لب به لب ارائه شده است. تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی با اتصال چسبی مطابق با فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه-اول در نظر گرفته شده است. اتصال دو صفحه مستطیلی غیرهمسانگرد با استفاده از لایه چسب با اتصال لب به لب در شکل ۱ نشان داده شده است. اتصال لب به لب بین صفحه بالایی و صفحه پایینی است. مقدار b عرض صفحات و a_1 و a_2 به ترتیب طول بدون اتصال صفحات بالایی و پایینی است که در این مقاله یکسان در نظر گرفته شده است. l مقدار طول چسب اتصال دو صفحه و L طول صفحات متصل به هم هستند.

مؤلفه‌های جابجایی شامل u ، v و w به ترتیب در راستای x و y و z است. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، همانند فرضیات تئوری ورق‌های کلاسیک^۹ (تئوری کیرشهوف)، دو فرض معتبر است. ۱- خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل هم مستقیم باقی می‌مانند و ۲- خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی، تغییر طول نمی‌دهند. در تئوری برشی مرتبه اول، برخلاف فرضیات تئوری کلاسیک، صفحات عمود بر سطح میانی، بعد از تغییر شکل دیگر بر سطح میانی عمود باقی

آن‌ها استحکام و قابلیت جذب انرژی اتصالات لب به لب تحت بار کمانش را بررسی کردند [۱۷]. رمضانی و همکاران در سال ۲۰۲۰ مطالعه تجربی جامع بر روی اتصالات تک لبه دو چسب با استفاده از روش برهمنگاری تصاویر دیجیتال پرداختند. آن‌ها پارامترهای مختلف مانند ضخامت چسب، نسبت ضخامت و طول چسب را بررسی کردند [۱۸]. کوچک‌زاده و همکاران در سال ۲۰۲۱ به بررسی تعیین بار کمانش کلی پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی تحت فشار محوری پرداختند. در این مطالعه با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل حداقل انرژی پتانسیل معادلات تعادل به دست آمده و به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته بار بحرانی کمانش به دست می‌آید [۱۹]. مارکیونه در سال ۲۰۲۱ به تحلیل تنش در اتصالات چسب لب به لب تحت بارهای فشاری پرداخت. ایشان به مطالعه عددی توزیع تنش در لایه چسب تحت شرایط کمانش فشاری با مدل‌سازی در نرم‌افزار انسیس پرداخت [۲۰]. نجات‌بخش و همکاران در سال ۲۰۲۲ به بررسی اثر سختی خمشی تکیه‌گاهی بر نیروی بحرانی کمانش فشاری در صفحات غیرهمسانگرد پرداختند. آن‌ها با توجه به سختی خمشی تکیه‌گاهی در شرایط مرزی مختلف، گراف‌هایی برای محاسبه کمانش بحرانی فشاری در صفحات غیرهمسانگرد ارائه کردند [۲۱].

در مقاله حاضر به بررسی مقادیر کمانش بحرانی برای صفحات غیرهمسانگرد اتصال لب به لب با اتصال چسبی با شرایط مرزی متفاوت تحت نیروی فشاری پرداخته شده است. بررسی کمانش اتصال لب به لب با طول هم‌پوشانی و ضخامت متفاوت

منتجه‌های تنش حاصل از ممان خمشی و تنش‌های برشی عرضی به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شوند [۲۳].

$$\begin{aligned} N_{ixx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ixx} dz & M_{ixx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{ixx} dz \\ N_{iyy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{iyy} dz & M_{iyy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{iyy} dz \\ N_{ixy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ixy} dz & M_{ixy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{ixy} dz \\ Q_{ix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ixz} dz & h_1 &= \frac{-t_1}{2} \\ Q_{iy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{iyz} dz & h_2 &= \frac{-t_2}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

بر اساس روابط تنش-کرنش درون صفحه‌ای و روابط (۴) و (۵) رابطه (۶) به دست می‌آید [۲۳].

$$\begin{bmatrix} N_{ixx} \\ N_{iyy} \\ N_{ixy} \\ M_{ixx} \\ M_{iyy} \\ M_{ixy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{16}^i & B_{11}^i & B_{12}^i & B_{16}^i \\ A_{12}^i & A_{22}^i & A_{26}^i & B_{12}^i & B_{22}^i & B_{26}^i \\ A_{16}^i & A_{26}^i & A_{66}^i & B_{16}^i & B_{26}^i & B_{66}^i \\ B_{11}^i & B_{12}^i & B_{16}^i & D_{11}^i & D_{12}^i & D_{16}^i \\ B_{12}^i & B_{22}^i & B_{26}^i & D_{12}^i & D_{22}^i & D_{26}^i \\ B_{16}^i & B_{26}^i & B_{66}^i & D_{16}^i & D_{26}^i & D_{66}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{ixx}^0 \\ \varepsilon_{iyy}^0 \\ \gamma_{ixy}^0 \\ \kappa_{ixx} \\ \kappa_{iyy} \\ \kappa_{ixy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{ix} \\ Q_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^i & A_{45}^i \\ A_{45}^i & A_{55}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{ixz} \\ \gamma_{iyz} \end{bmatrix}$$

که در این روابط مقادیر A_{jk}^i و B_{jk}^i و D_{jk}^i به صورت روابط (۷) تعریف می‌شود [۲۳].

$$\begin{aligned} A_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} \bar{Q}_{jk}^{im} dz & j, k &= 1, 2, 6 \\ B_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} z \cdot \bar{Q}_{jk}^{im} dz & j, k &= 1, 2, 6 \\ D_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} z^2 \cdot \bar{Q}_{jk}^{im} dz & j, k &= 1, 2, 6 \\ A_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} K_s \cdot \bar{Q}_{jk}^{im} dz & j, k &= 4, 5 \\ K_s &= \frac{5}{6} \end{aligned} \quad (7)$$

که z_{m-1} و z_m نشان دهنده فواصل اندازه‌گیری شده از صفحه

نمی‌مانند در نتیجه با در نظر گرفتن این تئوری، مؤلفه‌های کرنش نرمال ε_x و ε_y کرنش برشی γ_{xy} و γ_{xz} و γ_{yz} وجود داشته و تنها کرنش نرمال ε_z صفر است. بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، جابجایی‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲].

$$u_i = u_i^0 + z \phi_{ix} \quad v_i = v_i^0 + z \phi_{iy} \quad w_i = w_i^0 \quad (1)$$

در رابطه فوق برای صفحه یک $i = 1$ و برای صفحه دو $i = 2$ است. z فاصله هر نقطه دلخواه از صفحه میانی صفحه است. مقادیر ε_{ix}^0 و ε_{iy}^0 و γ_{ixz}^0 و γ_{iyz}^0 و γ_{ixy}^0 و γ_{ixz}^0 کرنش‌های مرتبط با میدان جابجایی صفحه میانی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲].

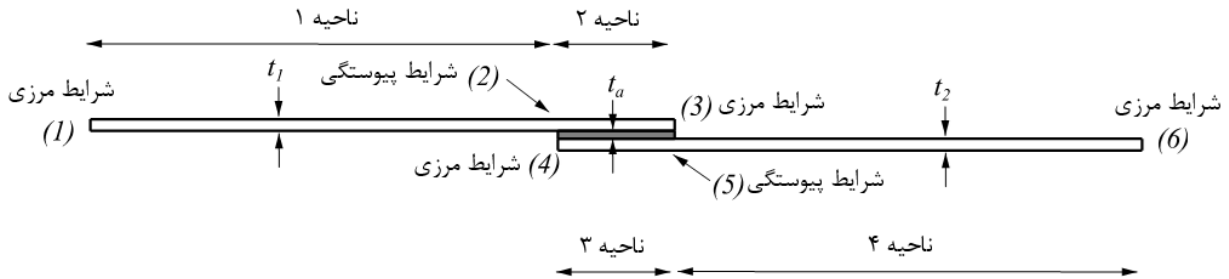
$$\begin{aligned} \varepsilon_{ixx}^0 &= \frac{\partial u_i^0}{\partial x} \\ \varepsilon_{iyy}^0 &= \frac{\partial v_i^0}{\partial y} \\ \gamma_{ixy}^0 &= \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\ \gamma_{ixz}^0 &= \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \\ \gamma_{iyz}^0 &= \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \end{aligned} \quad (2)$$

همچنین K_{ix} و K_{iy} و K_{ixy} به ترتیب بیانگر انحناء طولی، عرضی و برشی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱].

$$\begin{aligned} \kappa_{ixx} &= \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \\ \kappa_{iyy} &= \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\ \kappa_{ixy} &= \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

با توجه به روابط کرنش انحناء کرنش طولی، عرضی و برشی به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شوند [۲].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ixx} &= \varepsilon_{ixx}^0 + z \kappa_{ixx} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \\ \varepsilon_{iyy} &= \varepsilon_{iyy}^0 + z \kappa_{iyy} = \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\ \gamma_{ixy} &= \gamma_{ixy}^0 + z \kappa_{ixy} \\ &= \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\ &\quad + z \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \\ \gamma_{ixz} &= \gamma_{ixz}^0 = \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \\ \gamma_{iyz} &= \gamma_{iyz}^0 = \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \end{aligned} \quad (4)$$



شکل ۲- شرایط مرزی در اتصال دو صفحه مستطیلی با اتصال چسبی

که به طور کلی به هندسه و خواص مواد صفحات بستگی دارد که برای مقطع مستطیلی با خواص مکانیکی یکسان برابر $5/6$ است.

$$K_s = \frac{U_s^f}{U_s^c} = \frac{\frac{Q_0^2}{2G_{13}bh}}{\frac{3Q_0^2}{5G_{13}bh}} = \frac{5}{6} \quad (10)$$

با توجه به شرایط لایه چینی و خصوصیات مواد به کاررفته در صفحات مقادیر ماتریس [A]، [B] و [D] به دست می آید. \bar{Q}_{jk} ضرایب ماتریس سفتی به صورت روابط (۱۱) تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + Q_{22}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^2) \\ \bar{Q}_{22} &= (Q_{11}n^4 + Q_{22}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2, \bar{Q}_{55} = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2 \\ \bar{Q}_{45} &= -Q_{44}mn + Q_{55}mn, \bar{Q}_{54} = Q_{44}mn - Q_{55}mn \\ Q_{11} &= \frac{E_x}{1 - \nu_x\nu_y}, Q_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_x\nu_y}, Q_{12} = \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_x\nu_y} \\ Q_{44} &= G_{23}, Q_{55} = G_{66} = E_s, m = \cos(\theta), n = \sin(\theta) \end{aligned} \quad (11)$$

در این رابطه θ نشان دهنده زاویه لایه های کامپوزیت، E_x مدول طولی لایه، E_y مدول عرضی لایه، E_s مدول برشی لایه، ν_x ضریب پواسون طولی لایه و ν_y ضریب پواسون عرضی لایه

میانی صفحه چندلایه تا سطوح پایین و بالای لایه m ام است و مقدار \bar{Q}_{jk}^{im} نیز ضرایب ماتریس سختی لایه m ام است که برای صفحه یک $i = 1$ و برای صفحه دو $i = 2$ است. بر اساس فرضیات تئوری برشی مرتبه اول کرنش های برشی عرضی در ضخامت صفحات ثابت فرض می شوند، بنابراین تنش های برشی عرضی نیز ثابت خواهند بود. بر اساس معادلات تعادل، تنش برشی عرضی در ضخامت صفحه سهموی است. این اختلاف بین حالت تنش واقعی و حالت تنش ثابت تئوری برشی مرتبه اول، نیروی برشی عرضی در روابط انرژی، توسط ضریب تصحیح برشی K_s تصحیح می شود. توزیع تنش برشی واقعی برای مقطع مستطیلی با عرض b و ارتفاع h و تنش برشی عرضی در تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر است [۲۳].

$$\sigma_{xz}^c = \frac{3Q_0}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (8)$$

$$\sigma_{xz}^f = \frac{Q_0}{bh}$$

که در آن Q_0 بار عرضی و σ_{xz}^f تنش برشی عرضی در تئوری برشی مرتبه اول و σ_{xz}^c توزیع تنش برشی واقعی است. انرژی کرنش ناشی از تنش های عرضی در دو حالت به صورت رابطه (۹) است [۲۳].

$$\begin{aligned} U_s^c &= \frac{1}{2G_{13}} \int_A (\sigma_{xz}^c)^2 dA = \frac{3Q_0^2}{5G_{13}bh} \\ U_s^f &= \frac{1}{2G_{13}} \int_A (\sigma_{xz}^f)^2 dA = \frac{Q_0^2}{2G_{13}bh} \end{aligned} \quad (9)$$

K_s ضریب تصحیح برشی از نسبت U_s^f به U_s^c به دست می آید

$$\tau_{axz} = G_a \cdot \gamma_{axz}(x, y, t)$$

E_a مدول یانگ چسب و G_a مدول برشی چسب است. همچنین روابط کرنش جابجایی، مطابق روابط (۱۳) در زیر آورده شده است که با توجه به فرضیات تئوری برشی مرتبه اول تنها سه مؤلفه در آن وجود دارد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{az} &= \frac{\partial w_a}{\partial z} \\ \gamma_{axz} &= \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w_a}{\partial x} \\ \gamma_{ayz} &= \frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial w_a}{\partial y} \end{aligned} \quad (13)$$

مطابق معادلات تعادل و فرض تقارن تانسور تنش و نیروهای حجمی صفر، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tau_{axy} &= \tau_{ayx} \\ \tau_{axz} &= \tau_{azx} \\ \tau_{ayz} &= \tau_{azy} \end{aligned} \quad (14)$$

با انتگرال گیری ε_{az} در رابطه (۱۳) نسبت به z و جایگذاری با σ_{az} در رابطه (۱۲) روابط به صورت رابطه (۱۵) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{az} &= \frac{\partial w_a}{\partial z} \rightarrow \partial w_a = \varepsilon_{az} \cdot \partial z \\ \sigma_{az} &= E_a \cdot \varepsilon_{az} \rightarrow \varepsilon_{az} = \frac{\sigma_{az}}{E_a} \\ w_a &= \frac{z \cdot \sigma_{az}}{E_a} + w_{a0} \end{aligned} \quad (15)$$

که این رابطه که در آن E_a مدول یانک چسب و w_{a0} جابجایی چسب در $z = 0$ است. جابجایی های u_a و v_a با انتگرال گیری از رابطه (۲) مشابه رابطه (۴) به دست می آید. در جهت ضخامت در لایه چسب تنش های سطحی و برشی یکنواخت فرض می شود. در نتیجه، کرنش های برشی و کرنش عمودی در ناحیه چسب به صورت زیر بیان می گردد. با داشتن شرط پیوستگی در جهت x و y به ترتیب بین صفحات اتصال و چسب در $z=0$ و $z = t_a$ روابط (۱۶) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \gamma_{axz} &= \frac{u_2^0 - u_3^0 - h_1 \cdot \phi_{2x} - h_2 \cdot \phi_{3x}}{t_a} \\ \gamma_{ayz} &= \frac{v_2^0 - v_3^0 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}}{t_a} \\ \varepsilon_{az} &= \frac{1}{t_a} (w_2 - w_3) \end{aligned} \quad (16)$$

u_1^0 و v_1^0 و w_1 مؤلفه های جابجایی در صفحه وسط صفحه

است. شرایط مرزی در اتصال دو صفحه مستطیلی در شکل ۲ آورده شده است.

در این شکل t_a ضخامت چسب و t_1 ضخامت صفحه بالایی و t_2 ضخامت صفحه پایینی است و شرایط مرزی اتصال دو صفحه در ابتدا و انتهای سازه و همچنین در ابتدا و انتهای طول همپوشانی نشان داده شده است. ابتدا و انتهای سازه با شرایط مرزی مختلف و در ابتدا و انتهای طول همپوشانی شرایط مرزی آزاد است. همچنین با توجه به نوع اتصال، سازه به چهار ناحیه تقسیم شده است. ناحیه ۱ و ۴ نشان دهنده صفحه مستطیلی کامپوزیتی بوده و ناحیه ۲ و ۳ نشان دهنده دو صفحه مستطیلی بوده که با یکدیگر با اتصال چسبی متصل شده اند. نقاط اتصال ۲ و ۵ شرایط پیوستگی بین صفحات برقرار است. برای ناحیه اتصال چسب فرضیات این مسئله بر مبنای فرضیات تئوری برشی مرتبه اول همانند فرضیات تئوری ورق های کلاسیک، در این مسئله به شرح زیر در نظر گرفته می شود. ۱- تغییر شکل ها کوچک است و همه مواد تشکیل دهنده الاستیک خطی هستند ۲- در ناحیه اتصال چسب، مدول نرمال عرضی بسیار پایین است، به طوری که تغییر شکل نرمال عرضی صفحات به هم چسبیده شده، در مقابل با چسب، ناچیز است ۳- چسب حالت تنش صفحه ای است و مقادیر تنش $\sigma_{ax} = \sigma_{ay} = \tau_{axy} = 0$ است. زیر نویس a برای چسب استفاده می شود ۴- تنش های جداکننده^{۱۱} و تنش برشی در امتداد ضخامت در لایه چسب یکنواخت فرض شده است ۵- از تنش های حرارتی در صفحات کامپوزیتی صرفه نظر گردیده و تغییری در میزان رطوبت رخ نمی دهد.

معادلات تعادل برای هر قسمت به دست می آید. معادلات تعادل بیان شده بر حسب جابجایی در ادامه ارائه شده است و با توجه به فرضیات ۳ و ۴ تنها سه مؤلفه تنش وجود دارد. مطابق قانون هوک سه بعدی، روابط تنش-کرنش و مؤلفه های کرنش مربوط به چسب از روابط (۱۲) به دست می آید [۲].

$$\begin{aligned} \sigma_{az} &= E_a \cdot \varepsilon_{az}(x, y, t) \\ \tau_{ayz} &= G_a \cdot \gamma_{ayz}(x, y, t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$U_4 = \frac{E_a}{2t_a} \int_{A_i} (w_2 - w_3)^2 dx dy$$

که برای A_i مقدار $i = 1$ برای صفحه بالایی و $i = 2$ برای صفحه پایینی و $i = 3$ انرژی کرنشی برشی چسب و $i = 4$ انرژی کرنشی نرمال چسب است. روابط کار مجازی به صورت رابطه (۲۰) تعریف می‌شوند.

$$\delta V_i = \int_{A_i} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\hat{\sigma}_{nmi}(\delta u_{ni} + z \delta \phi_{ni}) + \hat{\sigma}_{nsi}(\delta u_{si} + z \delta \phi_{si}) + \hat{\sigma}_{nzi} \delta w_{0i}] dz ds - \int_{\Omega_i} (q_{bi} + q_{ti} - k w_{0i}) \delta w_{0i} dx dy \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

$$\delta V_i = \int_{A_i} (\hat{N}_{nmi} \delta u_{ni} + \hat{N}_{nsi} \delta u_{si} + \hat{M}_{nmi} \delta \phi_{ni} + \hat{M}_{nsi} \delta \phi_{si} + \hat{Q}_{ni} \delta w_{0i}) ds + \int_{\Omega_i} (k w_{0i} \delta w_{0i} - q_i \delta w_{0i}) dx dy \quad i = 1, 2$$

که Ω_i نشان دهنده صفحه میانی در صفحات است. روابط انرژی جنبشی به صورت زیر تعریف می‌شوند. با جایگزین کردن انرژی کرنشی، کار مجازی در اصل حداقل انرژی پتانسیل به معادله حاکم برای صفحات خواهیم رسید.

$$\int_{\Omega} \left[N_{ixx} \delta \varepsilon_{ixx}^0 + M_{ixx} \delta \kappa_{ixx} + N_{iyy} \delta \varepsilon_{iyy}^0 + M_{iyy} \delta \kappa_{iyy} + N_{ixy} \delta \gamma_{ixy}^0 + M_{ixy} \delta \kappa_{ixy} + Q_{ix} \delta \gamma_{ixz} + Q_{iy} \delta \gamma_{iyz} + \frac{t_a G_a}{2} \gamma_{axz}^2 + \frac{t_a G_a}{2} \gamma_{ayz}^2 + \frac{E_a}{2t_a} w_2^2 + \frac{E_a}{2t_a} w_3^2 + \hat{N}_{nmi} \delta u_{ni} \right] dx dy \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه فوق را به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

بالایی است. ϕ_{1x} و ϕ_{1y} مؤلفه‌های چرخشی در صفحه بالایی است. u_2^0 و v_2^0 و w_2 مؤلفه‌های جابجایی در صفحه وسط صفحه پایینی است. ϕ_{2x} و ϕ_{2y} مؤلفه‌های چرخشی در صفحه پایینی است. معادلات تعادل صفحات مستطیلی با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل^{۱۲} به صورت رابطه (۱۷) تعریف شده است [۲۳].

$$\Pi = \delta U + \delta V = 0 \quad (17)$$

که در آن δU انرژی کرنش مجازی، δV کار مجازی انجام شده توسط نیروهای اعمال شده است.

$$\Pi = \delta(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) + \delta(V_1 + V_2) = 0 \quad (18)$$

که $i = 1$ برای صفحه بالایی و $i = 2$ برای صفحه پایینی و $i = 3, 4, a$ برای ناحیه چسب است. مقادیر U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 به ترتیب نشان دهنده انرژی کرنشی صفحه بالایی، صفحه پایینی، انرژی کرنشی برشی چسب و انرژی کرنشی نرمال چسب است. مقادیر V_1 ، V_2 به ترتیب نشان دهنده کار مجازی صفحه بالایی، صفحه پایینی است. روابط انرژی کرنشی به صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شوند.

$$\delta U_i = \int_{A_i} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ijk} \delta \varepsilon_{ijk}) dz \right\} dx dy \quad j, k = x, y, z$$

$$\delta U_i = \int_{A_i} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{ixx} (\delta \varepsilon_{ixx}^0 + z \delta \kappa_{ixx}) + \sigma_{iyy} (\delta \varepsilon_{iyy}^0 + z \delta \kappa_{iyy}) + \sigma_{ixy} (\delta \varepsilon_{ixy}^0 + z \delta \kappa_{ixy}) + \sigma_{ixz} \delta \gamma_{ixz} + \sigma_{iyz} \delta \gamma_{iyz}] dz \right\} dx dy \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

$$\delta U_i = \int_{A_i} (N_{ixx} \delta \varepsilon_{ixx}^0 + M_{ixx} \delta \kappa_{ixx} + N_{iyy} \delta \varepsilon_{iyy}^0 + M_{iyy} \delta \kappa_{iyy} + N_{ixy} \delta \gamma_{ixy}^0 + M_{ixy} \delta \kappa_{ixy} + Q_{ix} \delta \gamma_{ixz} + Q_{iy} \delta \gamma_{iyz}) dx dy \quad i = 1, 2$$

$$U_3 = \frac{t_a G_a}{2} \int_{A_i} (\gamma_{axz}^2 + \gamma_{ayz}^2) dx dy$$

$$\frac{\partial N_{ixx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ixy}}{\partial y} + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_3 - h_1 \cdot \phi_{2x} - h_2 \cdot \phi_{3x}) - \hat{N}_{xxi} = 0 \quad (24\text{-الف})$$

$$\frac{\partial N_{ixy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{iyy}}{\partial y} + \frac{G_a}{t_a}(v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \quad (24\text{-ب})$$

$$\frac{\partial Q_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{iy}}{\partial y} - \frac{E_a}{2t_a}w_2^2 - \frac{E_a}{2t_a}w_3^2 = 0 \quad (24\text{-ج})$$

$$\frac{\partial M_{ixx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{ixy}}{\partial y} - Q_{ix} + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \quad (24\text{-د})$$

$$\frac{\partial M_{ixy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{iyy}}{\partial y} - Q_{iy} + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \quad (24\text{-ه})$$

حال با جایگذاری رابطه (۲) و (۳) و (۶) در رابطه (۲۴) خواهیم داشت:

$$A_{11}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) + A_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + A_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) + B_{11}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) + B_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) + B_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) + A_{16}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) \quad (25)$$

$$+ A_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + A_{66}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) + B_{16}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) + B_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) + B_{66}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_3 - h_1 \cdot \phi_{2x} - h_2 \cdot \phi_{3x}) - \hat{N}_{xxi} = 0 \quad (الف)$$

$$A_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) + A_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + A_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) + B_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) \quad (25)$$

$$+ B_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) + B_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \quad (ب)$$

$$+ A_{12}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_{ixx} \delta \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + M_{ixx} \delta \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + N_{ixy} \delta \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + M_{iyy} \delta \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} + N_{ixy} \delta \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + M_{ixy} \delta \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + M_{ixy} \delta \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} + Q_{ix} \delta \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + Q_{ix} \phi_{ix} + Q_{iy} \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + Q_{iy} \phi_{iy} + \frac{t_a G_a}{2} \gamma_{axz}^2 + \frac{t_a G_a}{2} \gamma_{ayz}^2 + \frac{E_a}{2t_a} w_2^2 + \frac{E_a}{2t_a} w_3^2 + \hat{N}_{nni} \delta u_{ni} \right] dx dy = 0 \quad (22)$$

با جایگذاری معادلات در اصل حداقل انرژی پتانسیل داریم:

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \left[- \left(\frac{\partial N_{ixx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ixy}}{\partial y} + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_3 - h_1 \cdot \phi_{2x} - h_2 \cdot \phi_{3x}) + \hat{N}_{xxi} \right) \delta u_0 - \left(\frac{\partial N_{ixy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{iyy}}{\partial y} + \frac{G_a}{t_a}(v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) \right) \delta v_0 - \left(\frac{\partial M_{ixx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{ixy}}{\partial y} - Q_{ix} + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) \right) \delta \phi_x - \left(\frac{\partial M_{ixy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{iyy}}{\partial y} - Q_{iy} + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) \right) \delta \phi_y - \left(\frac{\partial Q_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{iy}}{\partial y} - \frac{E_a}{2t_a} w_2^2 - \frac{E_a}{2t_a} w_3^2 \right) \delta w_0 \right] dx dy = 0 \quad (23)$$

از رابطه (۲۳) به معادلات (۲۴) می‌رسیم:

$$+\frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0$$

شرایط مرزی در دو لبه عرضی به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی لبه‌های صفحات در دو انتها در ناحیه (۱) و (۶) برای شرط مرزی ساده S ، شرط مرزی گیردار C و شرط مرزی آزاد F بررسی شده است. این شرایط به صورت زیر تعریف می‌گردد.

تکیه‌گاه ساده: $w = \phi_y = M_x = 0$
 تکیه‌گاه گیردار: $u = v = w = \phi_x = 0$
 تکیه‌گاه آزاد: $N_x = N_{xy} = M_x = M_{xy} = Q_x = 0$
 شرایط مرزی در ناحیه چسب، ناحیه (۳) و (۴) به صورت شرایط مرزی لبه‌های آزاد در نظر گرفته شده است. این شرایط به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} N_{ix} &= A_{11} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + A_{16} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + A_{16} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\ &\quad + B_{11} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\ &\quad + B_{16} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\ N_{iy} &= A_{12} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + A_{26} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + A_{26} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\ &\quad + B_{12} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\ &\quad + B_{26} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\ N_{ixy} &= A_{16} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\ &\quad + B_{16} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\ &\quad + B_{66} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\ M_{ix} &= B_{11} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\ &\quad + D_{11} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\ &\quad + D_{16} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\ M_{iy} &= B_{12} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\ &\quad + D_{12} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\ &\quad + D_{26} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + D_{26} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &+ A_{22}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + A_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\ &\quad + B_{12}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) + B_{22}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\ &+ B_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) + \frac{G_a}{t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} \\ &\quad - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \\ &K_s A_{44}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \right) + K_s A_{45}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \right) \\ &\quad + K_s A_{45}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \right) \\ &\quad + K_s A_{55}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \right) \quad (ج) \\ &\quad - \frac{E_a}{2t_a} w_2^2 - \frac{E_a}{2t_a} w_3^2 = 0 \\ &B_{11}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) + B_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) \\ &\quad + B_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) + D_{11}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) \\ &\quad + D_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\ &\quad + D_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) + B_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} \right) \\ &\quad + B_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + B_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\ &\quad + D_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) + D_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\ &\quad + D_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) - K_s A_{44}^i \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \right) \\ &\quad - K_s A_{45}^i \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \right) \\ &\quad + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \\ &B_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) + B_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) \\ &\quad + B_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\ &\quad + D_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) + D_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\ &\quad + D_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \\ &\quad + B_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} \right) \\ &\quad + B_{22}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + B_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\ &\quad + D_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) \\ &\quad + D_{22}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\ &\quad + D_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) - K_s A_{45}^i \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \right) \\ &\quad - K_s A_{55}^i \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \right) \end{aligned} \quad (25) \quad (د) \quad (ه)$$

ضرایب وزنی است که به صورت رابطه (۳۰) تعریف می شود
[۲۵].

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq i, j}^N (x_i - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)} & i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N \\ \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_k} & i = j = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (30)$$

که در آن برای مشتقات بالاتر ضرایب وزنی به صورت رابطه (۳۱) محاسبه می شود.

$$A_{ij}^{(r)} = A_{ij}^{(1)} A_{ij}^{(r-1)} \quad r = 2, 3, \dots, N-1 \quad (31)$$

$$[A]^{(r)} = [A]^{(1)} [A]^{(r-1)} \quad r = 2, 3, \dots, N-1$$

یکی از مهم ترین نکات در همگرایی نتایج، علاوه بر تعداد نقاط، نحوه توزیع نقاط در حوزه حل است. دو نوع توزیع یکنواخت و غیریکنواخت در این روش پیشنهاد می شود که نقاط شبکه با توزیع یکنواخت به صورت رابطه (۳۲) است [۲۵].

$$x_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 0 \leq x \leq L_i = 1, 2, \dots, N \quad (32)$$

همچنین توزیع نقطه غیریکنواخت چبششف-گوس-لوباتو را می توان به صورت رابطه (۳۳) است. خاصیت این نوع توزیع آن است که تراکم نقاط در نظر گرفته شده در این نوع توزیع در نزدیکی نقاط مرزی بیشتر از نقاط میانی است.

$$x_i = \frac{L}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right] \quad 0 \leq x \leq L_i \quad (33)$$

$$= 1, 2, \dots, N$$

با توجه به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، جابجایی ها برای حل معادلات کماتش به صورت رابطه (۳۴) در نظر گرفته می شود.

$$[K]\{w\} = N_{x-cr}[P]\{w\} \quad (34)$$

۴- حل به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته:

میدان جابجایی به دست آمده با استفاده از روش جداسازی متغیرها به صورت رابطه (۳۵) تعریف می شوند [۲۳].

$$M_{ixy} = B_{16} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial v_i^0}{\partial x}$$

$$+ D_{16} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}$$

$$+ D_{66} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}$$

$$Q_{ix} = A_{44} \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + A_{44} \phi_{ix} + A_{45} \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + A_{45} \phi_{iy}$$

$$Q_{iy} = A_{45} \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + A_{45} \phi_{ix} + A_{55} \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + A_{55} \phi_{iy}$$

در ناحیه (۲) و (۵) شرایط سازگاری شامل پیوستگی جابه جایی، پیوستگی شیب و پیوستگی گشتاور خمشی به صورت زیر بررسی می گردد.

$$u_i = u_j$$

$$v_i = v_j$$

$$w_i = w_j$$

$$\phi_{xi} = \phi_{xj}$$

$$\phi_{yi} = \phi_{yj}$$

$$Q_{yi} = Q_{yj}$$

$$N_{xi} = N_{xj}$$

$$N_{yi} = N_{yj}$$

$$N_{xyi} = N_{xyj}$$

$$M_{xi} = M_{xj}$$

$$M_{yi} = M_{yj}$$

$$M_{xyi} = M_{xyj}$$

که اندیس i و j به ترتیب مربوط به ناحیه پیوستگی است.

۳- حل معادلات به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته:

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته مبتنی بر تقریب یک مشتق از یک تابع در یک نقطه مشخص با مجموع وزنی و مقادیر تابع در هر نقطه مجموعه در محدوده حل مسئله است. مشتق یک تابع نسبت به یک متغیر را می توان به صورت ترکیب خطی وزن دار از مقادیر تابع که در تعداد نقاط دامنه محاسبه شده اند، تقریب زد. برای انطباق یک چند جمله ای یکتا بر نقاط لاگرانژی^{۱۳} رابطه (۲۹) ارائه گردیده است [۲۵].

$$f_x(x_i) = \sum_{i=1}^N a_{ij} f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

$$\frac{d^r f}{dx^r} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} f(x_i)$$

که N تعداد نقاط شبکه در جهت x است. همچنین A_{ij} ماتریس

$$\begin{aligned}
 H_{24} = & -B_{12}\alpha\beta\varphi_x - B_{16}\alpha^2\varphi_x - B_{26}\beta^2\varphi_x \\
 & - B_{66}\alpha\beta\varphi_x + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) \\
 & - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}) \\
 H_{25} = & -B_{22}\beta^2\varphi_y - 2B_{26}\alpha\beta\varphi_y - B_{66}\alpha^2\varphi_y \\
 & + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) \\
 & - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{31} = & -\frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2) \\
 H_{32} = & -\frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2) \\
 H_{33} = & -K_s A_{44}\alpha^2 W + 2K_s A_{45}\alpha\beta W \\
 & - K_s A_{55}\beta^2 W \\
 & - \frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned}
 H_{34} = & -K_s A_{44}\alpha\varphi_x + K_s A_{45}\beta\varphi_x \\
 & - \frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2) \\
 H_{35} = & K_s A_{45}\alpha\varphi_y - K_s A_{55}\beta\varphi_y \\
 & - \frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)
 \end{aligned} \tag{ج}$$

$$\begin{aligned}
 H_{41} = & -B_{11}\alpha^2 U - B_{16}\alpha\beta U - B_{26}\beta^2 U - \\
 & B_{66}\beta^2 U + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + \\
 & t_2\phi_{2x})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{42} = & -B_{12}\alpha\beta V - B_{16}\alpha\beta V - B_{16}\alpha^2 V \\
 & - B_{66}\alpha\beta V \\
 & + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) \\
 & + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{43} = & -K_s A_{44}\alpha W - K_s A_{45}\beta W \\
 & + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) \\
 & + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned}
 H_{44} = & -K_s A_{44}\varphi_x - D_{11}\alpha^2\varphi_x - 2D_{16}\alpha\beta\varphi_x \\
 & - D_{66}\beta^2\varphi_x \\
 & + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) \\
 & + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})
 \end{aligned} \tag{د}$$

$$\begin{aligned}
 H_{45} = & -B_{12}\alpha\beta\varphi_y - B_{16}\alpha^2\varphi_y - B_{26}\beta^2\varphi_y \\
 & - B_{66}\alpha\beta\varphi_y \\
 & + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) \\
 & + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y \\
 v_0(x, y, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y \\
 w_0(x, y, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y \\
 \phi_x(x, y, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y \\
 \phi_y(x, y, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y
 \end{aligned} \tag{۳۵}$$

که در آن $\alpha = m\pi/a$ و $\beta = n\pi/b$ می‌باشد. با قرار دادن روابط (۳۵) در روابط (۲۵) ماتریس [H] به دست می‌آید که آرایه‌های آن به صورت رابطه (۳۶) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 H_{11} = & -A_{11}\alpha U - 2A_{16}\alpha\beta U - A_{26}\beta^2 U - \\
 & A_{66}\beta^2 U + \frac{G_a}{t_a}(u_1 - u_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + \\
 & t_2\phi_{2x}) - N_x \\
 H_{12} = & -A_{12}\alpha\beta V - A_{16}\alpha^2 V - A_{26}\beta^2 V \\
 & - A_{66}\alpha\beta V + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) \\
 & - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x}) \\
 H_{13} = & \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned}
 H_{14} = & -B_{11}\alpha^2\varphi_x - 2B_{16}\alpha\beta\varphi_x - B_{66}\beta^2\varphi_x \\
 & + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) \\
 & - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})
 \end{aligned} \tag{الف}$$

$$\begin{aligned}
 H_{15} = & -B_{12}\alpha\beta\varphi_y - B_{16}\alpha^2\varphi_y - B_{26}\beta^2\varphi_y \\
 & - B_{66}\alpha\beta\varphi_y + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) \\
 & - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{21} = & -A_{12}\alpha\beta U - A_{16}\alpha^2 U - A_{22}\beta^2 U - \\
 & A_{26}\beta^2 U - A_{26}\alpha\beta U + A_{66}\alpha\beta U + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - \\
 & v_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned}
 H_{22} = & -2A_{26}\alpha\beta V - A_{66}\alpha^2 V + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) \\
 & - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})
 \end{aligned} \tag{ب}$$

$$H_{23} = \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

پیوستگی با طول همپوشانی صفر در نظر گرفته شده است. ابعاد هر یک از صفحات کامپوزیتی به طول ۲۰۰ میلی‌متر و عرض ۱۰۰ میلی‌متر از جنس کربن/اپوکسی تک‌جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS در نظر گرفته شده است. نتایج محاسبات با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۴] مقایسه شده است و در جدول ۲ آمده است که تطابق بسیار خوبی حاصل شده است.

نتایج حاصل از روش عددی با حل اجزای محدود نیز مقایسه شد که نتایج بر هم منطبق است. شکل ۳ نمایی از کمانش صفحات متصل به هم در نرم‌افزار اجزای محدود آورده شده است.

۵-۲- محاسبه تنش برشی چسب

بررسی تنش برشی چسب به منظور عدم جدایش صفحات به هم متصل شده با چسب، قبل از پدیده کمانش الزامی است. برای محاسبه تنش برشی تئوری‌هایی مانند مدل ولکرسن، گلند و رسیئر، هارت-اسمیت و اجالوو و ادینوف ارائه گردیده است. در این مقاله از تئوری ولکرسن برای محاسبه تنش برشی چسب استفاده شده است. این روش به‌عنوان مدل تأخیر برش نیز مطرح شده است که مفهوم برش دیفرانسیلی را معرفی می‌کند. توزیع تنش برشی τ در چسب از رابطه (۳۷) محاسبه می‌گردد [۸].

$$\tau = \frac{N_{x-a}\omega \cosh(\omega x)}{2b \sinh(\frac{\omega l}{2})} + \left(\frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}\right)\left(\frac{\omega l}{2}\right) \frac{\sinh(\omega x)}{\cosh(\frac{\omega l}{2})} \quad (37)$$

t_1 ضخامت قطعه بالایی و t_2 ضخامت قطعه پایینی و t_a ضخامت چسب، b عرض ناحیه اتصال و l طول ناحیه اتصال، E_a مدول چسب می‌شود، G_a مدول برشی چسب، N_x نیروی اعمالی بر واحد طول چسب و مقدار ω به‌عنوان مشخصه طول برش چسب شناخته می‌شود، واحد آن از جنس معکوس طول است و از رابطه (۳۸) به دست می‌آید.

$$\omega = \sqrt{\frac{G_a}{E_a t_1 t_a} \left(1 + \frac{t_1}{t_2}\right)} \quad (38)$$

با فرض اینکه طول اتصال چسب l به قدری بزرگ باشد که مقدار $\cosh(\omega l) = \sinh(\omega l)$ شود و ضخامت صفحات به هم

$$\begin{aligned} H_{51} &= -B_{12}\alpha\beta U - B_{16}\alpha^2 U - B_{22}\beta^2 U - \\ & B_{26}\beta^2 U - B_{66}\alpha\beta U + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a} (v_1 - v_2) + \\ & \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (t_1 \phi_{1y} + t_2 \phi_{2y}) \\ H_{52} &= -B_{66}\alpha^2 V - 2B_{26}\alpha\beta V + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a} (v_1 - v_2) \\ & + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (t_1 \phi_{1y} + t_2 \phi_{2y}) \\ H_{53} &= -K_s A_{45} \alpha W - K_s A_{55} \beta W \\ & + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a} (v_1 - v_2) \\ & + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (t_1 \phi_{1y} + t_2 \phi_{2y}) \\ H_{54} &= -D_{16}\alpha^2 \phi_x - D_{12}\alpha\beta \phi_x - D_{26}\beta^2 \phi_x \\ & - D_{66}\alpha\beta \phi_x - K_s A_{45} \phi_x \\ & + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a} (v_1 - v_2) \\ & + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (t_1 \phi_{1y} + t_2 \phi_{2y}) \\ H_{55} &= -2D_{26}\alpha\beta \phi_y - D_{66}\alpha^2 \phi_y - D_{22}\beta^2 \phi_y \\ & - K_s A_{55} \phi_y + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a} (v_1 - v_2) \\ & + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (t_1 \phi_{1y} + t_2 \phi_{2y}) \end{aligned} \quad (36)$$

که $U^{(i)}$ ، $V^{(i)}$ ، $W^{(i)}$ ، $\phi_x^{(i)}$ و $\phi_y^{(i)}$ مشتقات مرتبه (i) جابجایی‌ها می‌باشند که با توجه به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته به دست می‌آیند.

۵- تحلیل و نتایج

نتایج حاصل از بار کمانش بحرانی سازه بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و با استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته ارائه شده است. شرایط مختلف لایه چینی صفحه یک و دو برای به‌صورت تک‌جهته^{۱۴} و دوجهته^{۱۵} و جنس‌های مختلف بررسی گردیده است. ضخامت هر لایه mm $t_{ply} = 0/25$ است. همچنین تنش برشی در شرایط لایه چینی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی گردیده است. جنس و ضخامت متفاوت برای اتصال چسبی بررسی گردیده است. خصوصیات مکانیکی مواد برای صفحات و چسب در جدول ۱ آمده است.

۵-۱- اعتبار سنجی

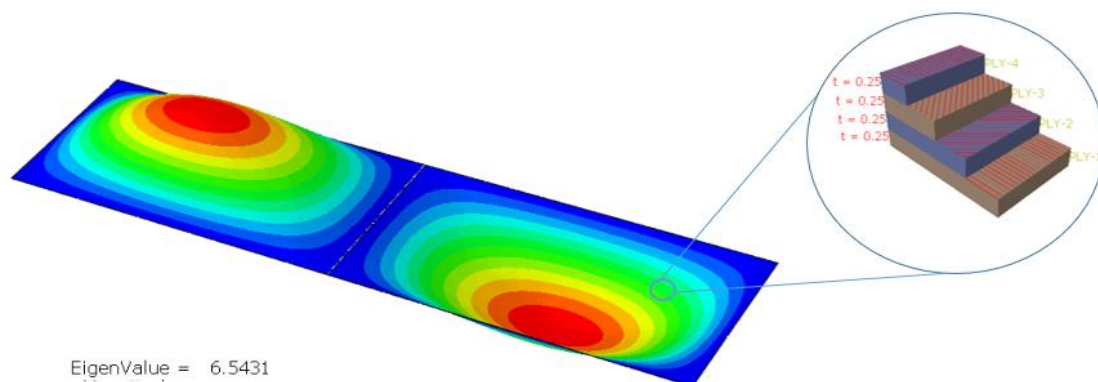
در این مقاله تحلیل کمانش صفحات با اتصال همپوشانی چسبی به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته انجام شده است. مقایسه کمانش بحرانی نتایج حاصل از دو صفحه به هم پیوسته با شرایط

جدول ۱- خصوصیات مکانیکی صفحات و چسب [۲۲] و [۲۷] و [۲۸]

$\rho_s (kg/m^3)$	ν_x	$G (GPa)$	$E_y (GPa)$	$E_x (GPa)$	
۱۶۰۰	۰/۳	۵	۴	۸۹	کربن - اپوکسی تک جهته
۱۶۰۰	۰/۰۴	۴	۵۶/۸	۵۶/۸	کربن - اپوکسی دو جهته
۱۸۰۰	۰/۲۶	۴/۱۴	۸/۲۷	۳۸/۶	شیشه - اپوکسی تک جهته
۱۴۶۰	۰/۳۴	۲/۳	۵/۵	۷۶	آرامید - اپوکسی تک جهته
۲۵۰۰	۰/۳۴	۱/۴	۴/۶	۴/۶	چسب اپوکسی
۱۲۰۰	۰/۴۱	۰/۴۶	۱/۳	۱/۳	چسب IPCO 9923
۱۳۵۰	۰/۳۴	۱/۷	۵	۵	چسب AV 138

جدول ۲- مقایسه بار بحرانی صفحات با طول همپوشانی صفر از جنس کربن/اپوکسی تک جهته

درصد خطا	$N_{x-cr} (N/mm)$ مرجع [۲۴]	روش حاضر $N_{x-cr} (N/mm)$	لایه چینی
۱/۵	۶/۹۱	۶/۸۰	[۰/+۴۵/-۴۵/۰]
۱/۲	۷/۱۵	۷/۰۶	[۰/+۳۰/-۳۰/۰]
۰/۹	۷/۳۷	۷/۳۰	[۰/+۱۵/-۱۵/۰]



شکل ۳- کمانش بحرانی برای لایه چینی [۰/+۴۵/-۴۵/۰] در نرم افزار اجزای محدود

(۳۴) با جایگذاری آن در مقدار N_{x-a} رابطه (۳۹) مقدار تنش بحرانی چسب به دست می آید. این مقدار نباید بیشتر از استحکام برشی تسلیم چسب باشد، در غیر این صورت چسب قبل از کمانش صفحات، دچار برش می شود. با داشتن استحکام تسلیم چسب، مقدار N_{x-a} از رابطه (۳۹) به دست می آید که برای همه

چسببند شده برابر باشد ($t_1 = t_2$) می توان رابطه (۳۷) را به صورت رابطه (۳۹) باز نویسی کرد.

$$\tau = \frac{N_{x-a}}{2} \sqrt{\frac{G_a}{E_a t_1 t_2} \left(1 + \frac{t_1}{t_2}\right)} \quad (39)$$

با توجه به مقادیر کمانش بحرانی N_{x-cr} محاسبه شده از رابطه

یک تا پنج بررسی شده است و مقدار کمترین عدد که بیانگر مقدار بار بحرانی کمانش است برای آن لایه چینی در نمودار آورده شده است.

مقادیر بار بحرانی کمانش برای جنس صفحات مختلف با نسبت همپوشانی متفاوت چسب برای شرایط تکیه‌گاهی SSSS به صورت شکل ۵ به دست می‌آید. هرچه مقدار همپوشانی چسب بیشتر باشد مقدار استحکام کمانشی سازه بیشتر است. برای جنس کربن اپوکسی دو جهتته مقادیر استحکام کمانشی نسبت به سایر مواد بررسی شده، بیشترین است.

مقادیر بار مجاز استحکامی چسب (N_{x-a}) از رابطه (۳۹) به دست می‌آید. این مقادیر بر اساس چسب اپوکسی و استحکام تسلیم مطابق جدول ۳ محاسبه گردیده است. مقادیر به دست آمده برای لایه چینی و جنس صفحات مختلف با نسبت طول به عرض متفاوت و شرایط تکیه‌گاهی SSSS و همپوشانی ثابت چسب در جدول ۴ آورده شده است.

به منظور بررسی مودهای کمانشی مختلف برای جنس کربن اپوکسی تک‌جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS مقادیر بار بحرانی برای نسبت‌های مختلف طول به عرض سازه با ناحیه همپوشانی ثابت چسب به صورت شکل ۶ به دست آمده است. در این شکل تأثیر مقادیر متفاوت m و n بر بار کمانش بررسی شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است برای مقادیر (L/b) متفاوت، مقادیر بار کمانش متفاوتی حاصل شده است. مقادیر بار بحرانی کمانش در مقادیر ($m=1$ و $n=1$) و ($m=2$ و $n=1$) ایجاد می‌شود.

با تغییر ضخامت چسب نسبت به ضخامت صفحات به هم چسبیده، مقدار کمانش بحرانی برای نسبت طول همپوشانی مختلف چسب نسبت به طول کلی سازه برای جنس کربن اپوکسی تک‌جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS به صورت شکل ۷ محاسبه گردیده است.

شرایط بارگذاری کمانشی با مقدار بار کمانش بحرانی N_{x-cr} بررسی شده است.

۵-۲- ارائه نتایج

در این قسمت نتایج حل عددی تحقیق حاضر با نتایج اجزای محدود به دست آمده با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. در این قسمت مقادیر ابعادی صفحات، شرایط مرزی، جنس چسب و صفحات، نوع لایه چینی، مقدار طول همپوشانی چسب و ضخامت چسب برای بار بحرانی کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. برای به دست آوردن خصوصیات سفتی چسب از رابطه (۴۰) استفاده می‌شود.

$$K_I = K_{nm} = \frac{E_a}{t_a} \quad (40)$$

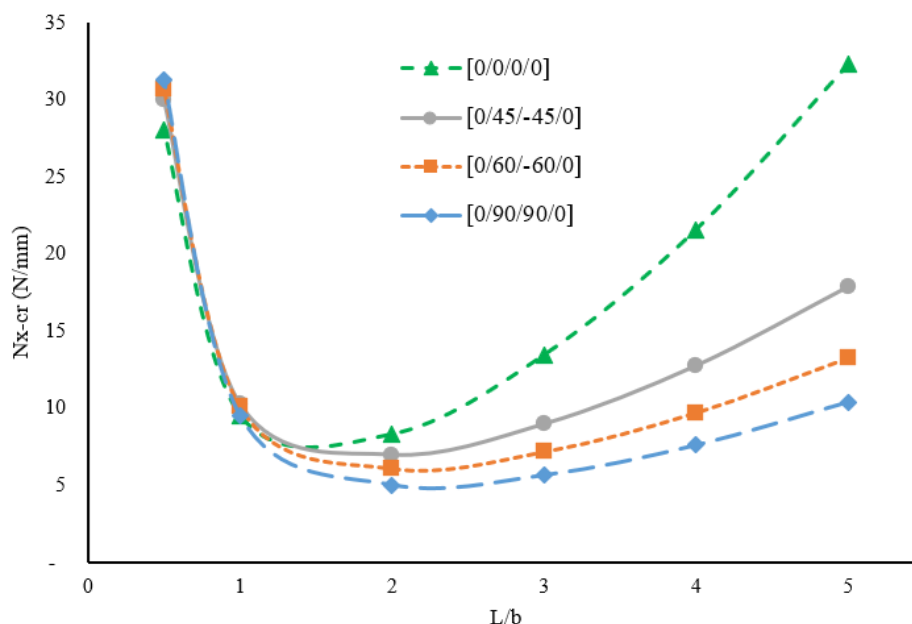
$$K_{II} = K_{ss} = K_{tt} = \frac{G_a}{t_a}$$

مقدار K_I ضریب سختی نرمال چسب و مقدار K_{II} مقدار ضریب سختی برشی طولی و عرضی چسب، A سطح زیر منحنی تنش- کرنش چسب، τ_y استحکام تسلیم چسب و τ_f استحکام شکست چسب است. این ضرایب به ضخامت چسب وابسته است. مقادیر فوق برای چسب اپوکسی به ضخامت $t_a = 0.1 \text{ mm}$ در جدول ۳ آورده شده است.

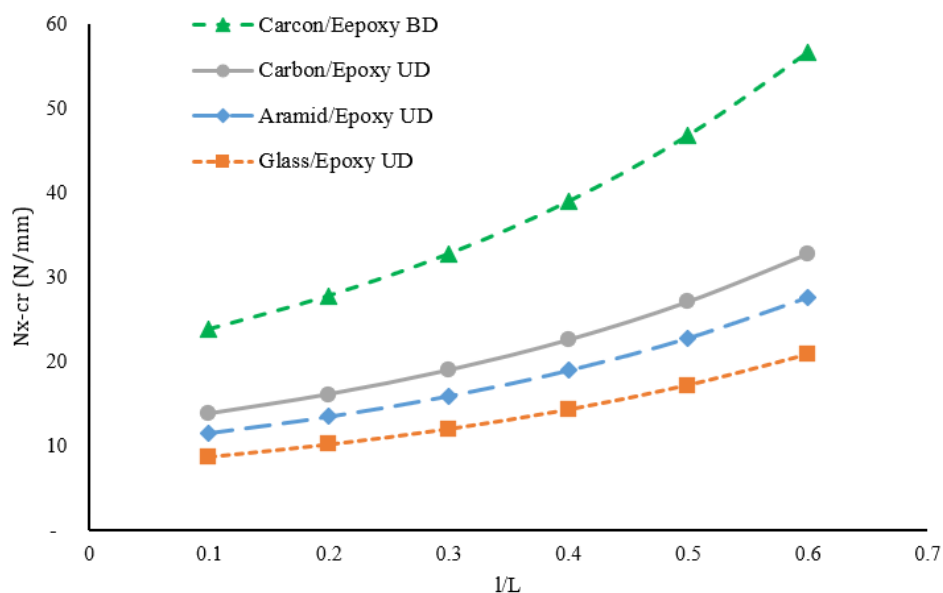
مقادیر بار بحرانی کمانش برای لایه چینی مختلف از جنس کربن اپوکسی تک‌جهته و مقدار همپوشانی ثابت چسب برای شرایط تکیه‌گاهی SSSS برای نسبت طول به عرض مختلف به صورت شکل ۴ به دست می‌آید. برای نسبت ابعادی طول به عرض مقادیر کمانش بحرانی متفاوت است. همچنین چون بار به صورت فشاری و در راستای محور x وارد می‌شود، برای لایه چینی صفحاتی که الیاف در راستای نیرو است استحکام کمانشی بالاتری به دست می‌آید کمترین مقدار بار کمانش، بسته به نسبت جانبی ورق (L/b) در مقادیر متفاوتی از m و n ایجاد خواهند شد و لزوماً در مقادیر $m=1$ و $n=1$ ایجاد نمی‌شود. برای ترسیم شکل ۴ تمامی مقادیر بار کمانش برای نسبت جانبی بین $0/3$ تا 5 و مقادیر m و n از

جدول ۳ - خصوصیات استحکامی و چسبیدگی چسب اپوکسی برای ضخامت چسب ۰/۱ میلی‌متر

K_I (MPa/mm)	K_{II} (MPa/mm)	A (MPa)	τ_y (MPa)	τ_f (MPa)
۴۶۰۰۰	۱۴۰۰۰	۰/۳۶	۳۶/۵	۴۱



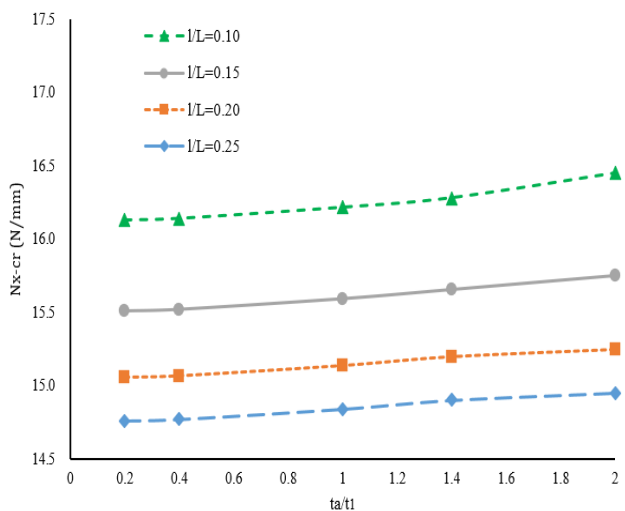
شکل ۴ - کمانش بحرانی برای لایه چینی و نسبت ابعادی مختلف از جنس کربن اپوکسی تک‌جهته



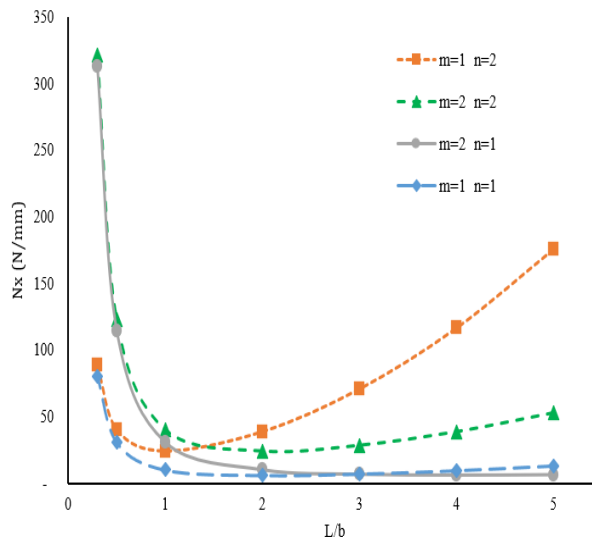
شکل ۵ - کمانش بحرانی برای جنس صفحات مختلف با نسبت همپوشانی متفاوت چسب

جدول ۴- مقایسه بار بحرانی صفحات متصل به هم با نسبت طول به عرض متفاوت و شرایط تکیه گاهی SSSS

جنس لایه چینی	شرایط مرزی	a/b	$N_{x-cr} (N/mm)$	$N_{x-a} (N/mm)$	شکست چسب قبل از کماتش
کربن اپوکسی تک جهته [۰/۰/۰/۰]	SSSS	۰/۵	۳۱/۲۹	۲۰/۵۸	بلی
	SSSS	۱	۹/۵۱	۲۰/۵۸	خیر
	SSSS	۲	۵/۰۳	۲۰/۵۸	خیر
	SSSS	۵	۱۰/۳۸	۲۰/۵۸	خیر
شیشه اپوکسی تک جهته [۰/+۴۵/-۴۵/۰] _۲	SCSF	۰/۵	۴۸/۴	۲۰/۵۸	بلی
	SCSF	۱	۱۴/۲	۲۰/۵۸	خیر
	SCSC	۰/۵	۵۷/۹	۲۰/۵۸	بلی
	SCSC	۱	۱۵/۲	۲۰/۵۸	خیر
شیشه اپوکسی تک جهته [۰/+۴۵/-۴۵/۰] _۲	SSSS	۰/۵	۷۸/۱۴	۴۱/۸۴	بلی
	SSSS	۱	۱۴/۵۸	۴۱/۸۴	خیر
	SSSS	۲	۵۰/۸۶	۴۱/۸۴	بلی
	SSSS	۵	۱۸۵/۵۲	۴۱/۸۴	بلی
	SCSF	۰/۵	۶۰/۲	۴۱/۸۴	بلی
	SCSF	۱	۱۹/۴	۴۱/۸۴	خیر
	SCSC	۰/۵	۷۹/۷	۴۱/۸۴	بلی
	SCSC	۱	۲۰/۱	۴۱/۸۴	خیر



شکل ۷- کماتش بحرانی برای نسبت ضخامت چسب به صفحات با نسبت همپوشانی مختلف چسب



شکل ۸- بار کماتش مودهای مختلف برای جنس کربن اپوکسی تک جهته با شرایط تکیه گاهی SSSS

۵- نتیجه گیری

به سازه برای نسبت طول به عرض سازه برای مودهای مختلف بررسی گردید. برای مود اول این مقدار بحرانی تر است که مقدار استحکام کمانش برای نسبت طول به عرض های مختلف، متفاوت است.

نتایج به دست آمده نشان می دهد هر چه مقدار همپوشانی چسب بیشتر باشد استحکام کمانشی سازه افزایش پیدا می کند. این افزایش بسته به نوع جنس چسب و صفحات تغییر می کند که برای صفحات کربن اپوکسی دو جهته و چسب AV-138 بیشترین مقدار به دست آمده است. با تغییر نسبت طول به عرض مقادیر کمانش بحرانی تغییر می کند. این مقادیر برای سازه ها برای یک ابعاد مشخص در بحرانی ترین حالت است. برای طراحی سازه و پند بندی آن با عضوهای طولی و عرضی، با جای ممکن می بایست از این ابعاد بحرانی فاصله گرفت تا بتوان سازه ای با استحکام کمانش بالاتری در برابر بارهای فشاری طراحی نمود. این نکته مشخص است که برای طراحی بهینه سایر شرایط آن نیز می بایست بررسی گردد.

در این مقاله کمانش بحرانی فشاری دو صفحه غیرهمسانگرد متصل شده با چسب به یکدیگر، از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته مورد بررسی قرار گرفته است. با به دست آوردن ماتریس سختی و حل بر مبنای تئوری برشی مرتبه اول برای صفحات با جنس، لایه چینی و شرایط مرزی مختلف به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته نتایج به دست آمده است. بررسی استحکامی چسب با توجه به جنس چسب برای مقایسه با نتایج کمانش بحرانی بررسی گردید. این محاسبات برای تشخیص شکست چسب قبل از پدیده کمانش بررسی شده است. با تغییر پارامترهای زاویه لایه چینی الیاف، جنس صفحات، میزان همپوشانی دو صفحه توسط چسب و شرایط مرزی برای نسبت طول به عرض سازه به هم چسبانده شده بررسی گردیده است. برای دو صفحه متصل شده با چسب، عددهای متفاوتی برای مودهای کمانشی فشاری به دست می آید. برای اینکه سازه دچار کمانش نشود، مود بحرانی کمانش بررسی می گردد. میزان بار وارده

واژه نامه:

1. Orthotropic
2. Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)
3. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)
4. ABAQUS
5. Lap-joint
6. Isotropic
7. ANSYS
8. Digital Image Correlation (DIC)

9. Hamilton's Principle
10. Classical Plate Theory (CLT)
11. Peel
12. Minimum Potential Energy Principle
13. Lagrange
14. Uni-Directional (UD)
15. Bi-Directional Woven (BD)

مراجع:

1. Yang P. C, Norris C. H., And Stavskys, Y., "Elastic Wave Propagation In Heterogeneous Plates", Solids Structures Pergamon Press Ltd, Vol. 2, PP. 665- 684, 1966.
2. Ko, T. C., Lin, C. C., and Chu, R. C., "Vibration of Bounded Laminated Lap- Joint Plates Using Adhesive Interface Elements", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 184, No. 4, pp. 457-583, 1995.
3. Du, H., Liew, K. M., and Lim, M. K., "Generalized Differential Quadrature Method for Buckling Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 122, No.2, 1996.
4. Yuceoglu, U., Toghi, F., and Tekinalp, O., "Free Bending Vibrations of Adhesively Bonded Orthotropic Plates With a Single Lap Joint", *Journal of Vibration*

- and Acoustics, 1996.
5. Helms, J. E., Li, G., and Pang, S.S., "Buckling Analysis of a Taper-Taper Adhesive-Bonded Composite Joint", *ASME Engineering Technology Conference on Energy*, Houston, TX, 2002.
 6. Kouchakzadeh, M. A., *Buckling Analysis of Rectangular Laminated Composite Plates With An Edge Delamination Under Compressive Load*, JAST 2007.
 7. Fatahi Mohsen, Farhatnia F., Darvizeh M., Buckling Analysis Of Orthotropic And Anisotropic Rectangular Plates By GDQ Method, *Journal Of Simulation And Analysis Of Novel Technologies In Mechanical Engineering (Journal Of Solid Mechanics In Engineering)* Vol. 1, pp.23-33, 2008.
 8. Rodríguez, Q. R., Sollero, P., and Rodríguez, M. B., "Stress Analysis And Failure Criteria of Adhesive Bonded Single Lap Joints", *21st International Congress of Mechanical Engineering*, October 2011.
 9. Abediokhchi, J., and Kouchakzadeh, M. A., "Shakouri M., Buckling analysis of cross-ply laminated conical panels using GDQ method", *Composites: Part B*, Vol. 227, pp. 1181-1198, 2016.
 10. Shakouri, M., and Kouchakzadeh, M. A., "Stability analysis of joined isotropic conical shells under axial compression", *Thin-Walled Structures*, 2013.
 11. Vijaya kumar, R. L., and Bhat, M. R., "Probabilistic Stress Variation Studies On Composite Single Lap-Joint Using Monte Carlo Simulation", *Composite Structures*, Vol. 121, pp. 351-361, 2015.
 12. Bakhshi Khanikik, H., Hosseini-Hashemi, S., and Nezamabadi, A., "Buckling Analysis Of Nonuniform Nonlocal Strain Gradient Beams Using Generalized Differential Quadrature Method", *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 57, No. 3, pp. 1361-1368, 2018.
 13. Talezadehlari A, Rahimi G H. Buckling analysis of perforated composite cylindrical shell using Generalized Differential Quadrature Method (GDQM). *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17 (11) pp.385-396, 2018.
 14. Poodeh, F., Farhatnia, F., and Reisi, M. "Buckling Analysis of Orthotropic Thin Rectangular Plates Subjected to Nonlinear In-Plane Distributed Loads Using Generalized Differential Quadrature Method", *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, Vol. 19, No. 2, pp. 102-116, 2018.
 15. Belkacem, A., "Mechanical Buckling Analysis of Hybrid Laminated Composite Plates Under Different Boundary Conditions", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 66, No. 6, pp. 761-769, 2018.
 16. Kadioglu, F., "Mechanical Behaviour of Adhesively Single Lap Joint Under Buckling Conditions", *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 34, No. 2, pp. 154-168, 2021.
 17. Kadioglu, F., "Effects of Compressive Applied Load on the Adhesive Single Lap Joint with Different Parameters", *The Journal of Adhesion*, Vol. 98, No. 4, pp. 1-22, 2020.
 18. Ramezani, F., Ayatollahi, M. R., Akhavan-Safar, A., da Silva, L. F. M., "A comprehensive experimental study on bi-adhesive single lap joints using DIC technique", *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 102, 102674, 2020.
 19. Kouchakzadeh, M. M. A., Gholami, P., Shakouri, M., and Noghabi, M., "Buckling Analysis of Stiffened Cross-Ply Laminated Conical Shells under Axial Compression Using Generalized Differential Quadrature Method", *AUT J. Mech. Eng.*, Vol. 5, No. 4, pp. 535-552, 2021.
 20. Marchione, F., "Analytical Stress Analysis in Single-Lap Adhesive Joints under Buckling Loads", *International Journal of Engineering Transactions B*, Vol. 34, No. 02, pp. 313-318, 2021.
 21. Nejat Bakhsh H., Gharaei A., Rabieyan Najafabadi H., Irvani A., Investigation of the effect of support flexural stiffness on the critical compressive buckling force of orthotropic plates in composite aircraft structures, AERO Conference 2020.
 22. Nejatbakhsh H., Ghasemi AR., Gharaei A., Najafabadi HR., An analytical-numerical coupled model for an aeroelastic analysis of tail flutter based on bending-torsional coupling, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 59, pp. 757-768, 2023.
 23. Ventsel, E., and Krauthammer, T., *Thin Plates & Shells Theory, Analysis & Applications*, CRC Press, 2001.
 24. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates And Shells*, 2th ed, CRC Press, 2004.
 25. Kollar, L., and Springer, G., *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge Univ. Press, 2003.
 26. Hassan Afshari, *Differential Quadrature Method in Mechanical Engineering Problems*, Poyesh Andishe

- Press, 2019.
27. Ghasemi, AR., Rabieyan Najafabadi, H., Nejatbakhsh, H., Gharaei, A., "Parametric Analysis of Position and Direction of Laminated Composite C-Spar on Aeroelastic Flutter in Aircraft Tail", *Mechanics of Advanced Composite Structures*, Vol. 11, No. 2, pp.351-362, 2024.
28. Meskini, M, and Ghasemi, A. R., "Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Adhesive Joints with Conical Composite Shell Adherends", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 29, No. 15-16, pp. 3475-3491, 2022.