

تحلیل کمانش صفحات مستطیلی ارتوتروپیک با اتصال چسبی به

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته

حسین نجات بخش، احمدرضا قاسمی* و سعید امیر

گروه جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده - صفحات ارتوتروپیک مورد استفاده در سازه‌های کامپوزیتی در معرض کمانش‌های موضعی از جمله کمانش فشاری قرار دارند. در فرآیند طراحی و ساخت اغلب سازه‌های بزرگ و یا سازه‌ها با هندسه پیچیده، اتصالات در سازه‌ها گریزناپذیر است. امروزه اتصالات چسبی به دلیل برخی مزیت‌ها نسبت به اتصالات مکانیکی کاربرد گسترده‌ای در اتصال سازه‌های کامپوزیتی پیدا کرده است. در این مقاله به بررسی پدیده کمانش صفحات چندلایه مستطیلی ارتوتروپیک متصل شده با چسب پرداخته شده است و اثرات نیرویی لایه چسب تحت شرایط بارگذاری کمانشی بررسی شده است. به منظور به دست آوردن بارهای بحرانی کمانش تحت شرایط مرزی مختلف از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته^۱ استفاده شده است. تحلیل کمانش بر مبنای روابط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۲ برای مواد کامپوزیت کربن/اپوکسی، شیشه/اپوکسی و کولار/اپوکسی با لایه چینی‌های مختلف ارائه شده است. اثر ضخامت و جنس چسب به عنوان لایه اتصال بررسی شده است. در صفحات از یک نوع لایه چینی، صفحات از جنس کربن اپوکسی دو جهته استحکام کمانشی بالاتری را از خود نشان می‌دهند و به صورت کلی هر چه نسبت طول به عرض صفحات بیشتر شود، استحکام کمانشی افزایش می‌یابد. در اتصالات با نتایج به دست آمده با استفاده از روش آنالیز المان محدود در نرم‌افزار ABAQUS مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: کمانش فشاری، صفحات کامپوزیتی، اتصال لب‌به‌لب^۳، اتصال چسبی، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته.

Buckling Analysis of Orthotropic Rectangular Plates with Adhesive Connection by Generalized Differential Quadrature Method

H. Nejatbakhsh, A.R. Ghasemi* and S. Amir

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechatronics, Kashan University, Kashan, Iran

Abstract: Orthotropic plates used in composite structures are subject to local buckling, including compressive buckling. In the process of designing and building most large structures or instruments with complex geometry, joints in the structure are unavoidable. Today, adhesive joints are widely used in connecting composite structures due to some advantages over mechanical joints. In this article, the buckling phenomenon of orthotropic rectangular multilayer plates connected with glue has been investigated and the force effects of the glue layer under buckling loading conditions have been investigated. In order to obtain the critical buckling loads under different boundary conditions, the generalized differential quadratic method (GDQM) has been used. Buckling analysis is presented based on first-order shear deformation theory (FSDT) relations for carbon/epoxy, glass/epoxy and Kevlar/epoxy composite materials with different porcelain layers. The effect of thickness and type of adhesive as a bonding layer has been investigated. In plates made of a type of porcelain layer, two-way carbon epoxy plates show higher buckling strength, and in general, the higher the ratio of length to width of the plates, the higher the buckling strength. In the connections, they have been compared with the results obtained using the finite element analysis method in ABAQUS commercial software.

Keywords: Compressive buckling, Composite plates, Lap-joint, Adhesive joint, GDQM.

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Ghasemi@Kashanu.ac.ir

نیروهای برشی	Q_{ix}, Q_{iy}	جابجایی صفحات میانی	u_i^0, v_i^0, w_i^0
ماتریس سفتی کششی	A_{jk}^i	کرنش صفحات میانی	$\varepsilon_{ixx}^0, \varepsilon_{iyy}^0$
ماتریس کوپلینگ	B_{jk}^i	کرنش صفحات میانی	$\gamma_{ixy}^0, \gamma_{ixz}^0, \gamma_{iyz}^0$
ماتریس سفتی خمشی	D_{jk}^i	انحنا	$\kappa_{ixx}, \kappa_{iyy}, \kappa_{ixy}$
تنش برشی عرضی	$\sigma_{xz}^c, \sigma_{xz}^f$	چرخش	ϕ_{ix}, ϕ_{iy}
انرژی کرنشی	U	نیروهای منتهجه	$N_{ixx}, N_{iyy}, N_{ixy}$
کار مجازی	V	ممان های منتهجه	$M_{ixx}, M_{iyy}, M_{ixy}$
شرایط مرزی ساده	S	ضرایب ماتریس سفتی	\bar{Q}_{jk}
شرایط مرزی آزاد	F	شرایط مرزی گیردار	C
ماتریس سفتی	$[K]$	تعداد نقاط شبکه	N
بار بحرانی کمانش	N_{cr}	ماتریس نیروی خارجی	$[P]$
ضخامت صفحات	t_1, t_2	ضریب تصحیح برش	K_s
مدول الاستیک عرضی	E_y	مدول الاستیک طولی	E_x
مشخصه طول برش چسب	ω	مدول الاستیک برشی	E_s
ضریب سختی برشی چسب	K_{II}	ضریب سختی نرمال چسب	K_I

۱- مقدمه

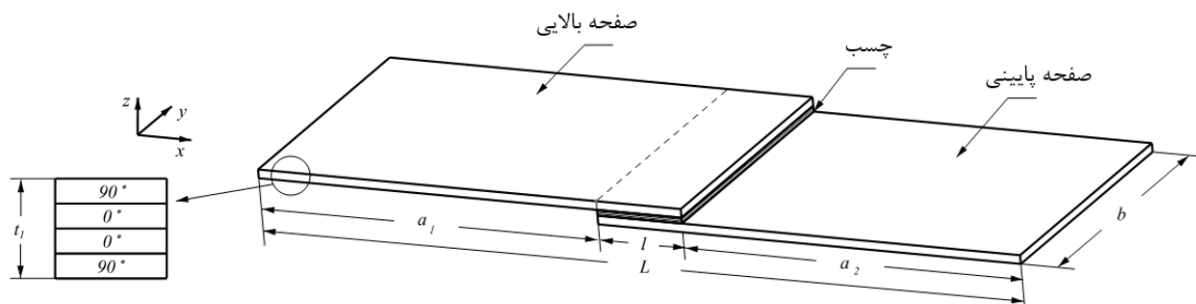
کردند. در این تحقیق صفحات چندلایه با اتصال لب به لب با نتایج مربوط به صفحات بدون اتصال مقایسه شدند [۲]. دو و همکاران در سال ۱۹۹۶ با روش عددی کارآمد و بسیار دقیق محاسباتی به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته برای تحلیل کمانش الاستیک صفحات و ستون‌ها ارائه کردند [۳]. یوچ اوغلو و همکاران نیز در سال ۱۹۹۶ بر روی ارتعاشات آزاد خمشی صفحات مستطیلی ارتوتروپیک چسبیده شده به هم به صورت اتصال تک لبه‌ای مطالعه کردند و تأثیر تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی در صفحات را بررسی کردند [۴]. هلمز و همکاران در سال ۲۰۲۲ به تجزیه و تحلیل کمانش یک اتصال کامپوزیتی با چسب مورب باریک پرداختند. آن‌ها یک مدل تحلیلی از رفتار یک اتصال کامپوزیت مورب چسب تحت بارگذاری فشاری محوری با استفاده از روش ریتز بر اساس تئوری تیر چندلایه انجام دادند و بار بحرانی کمانش بر اثر تغییر زاویه چسب، ضخامت چسب و مدول چسب را به صورت تحلیلی بررسی کردند [۵]. کوچک زاده در سال ۲۰۰۷ به تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی چندلایه مستطیلی با شرایط لایه شدن لبه، تحت بارگذاری فشاری در صفحه با استفاده از روش اجزای محدود

استفاده از سازه‌های کامپوزیتی به دلیل نسبت استحکام به وزن مطلوب و سهولت ساخت به امری ضروری در صنایع هوایی و مدرن تبدیل شده است. به دلیل هزینه‌های ساخت سازه‌ها با هندسه پیچیده، استفاده از سازه‌های کامپوزیتی کاملاً یکپارچه متداول نیست. به همین دلیل استفاده از اتصالات مکانیکی و یا اتصالات چسبی در سازه‌های پیچیده کامپوزیتی گریزناپذیر است. اتصال چسبی به دلیل ویژگی‌های مکانیکی مطلوب از جمله وزن کمتر، توزیع تنش نسبتاً یکنواخت و سهولت اجرا در اتصالات کامپوزیتی سازه‌ها نقش گسترده‌ای دارند. در سال‌های اخیر مطالعات زیادی در زمینه تحلیل تنش و کمانش صفحات ایزوتروپیک و ارتوتروپیک و یا بررسی استحکام چسب بین صفحات به هم متصل شده، انجام شده است.

یانگ و همکاران در سال ۱۹۶۶ روابط حاکم بر صفحات ناهمگن به همراه تغییر شکل‌های برشی عرضی و اینرسی دورانی را به صورت سه بعدی برای صفحات ارتوتروپیک و ایزوتروپ با لایه‌های متقارن ارائه کردند [۱]. کو و همکاران در سال ۱۹۹۳ ارتعاش صفحات چندلایه چسبانده شده لب به لب را بررسی

پرداخت. در این مطالعه به مقایسه روش تحلیل در پیش بینی بار کمانش و حالت کمانش با نتایج تجربی و تحلیلی موجود در مقالات و تأثیر ابعاد و شرایط مرزی بر بار کمانش پرداخته شده است [۶]. فتاحی و همکاران در سال ۲۰۰۸ به مطالعه کمانش صفحات مستطیلی ارتوتروپیک تحت بارهای مختلف پرداختند. معادلات کمانش حاکم برای صفحات همسانگرد از روش ریلی - ریتز با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته انجام و مقادیر ویژه به دست آوردند و با نتایج حل المان محدود با استفاده از نرم افزار ANSYS مقایسه کردند [۷]. رودریگز و همکاران در سال ۲۰۱۱ تجزیه و تحلیل تنش و معیارهای خرابی اتصالات تک لبه چسبی را بررسی کردند. در این تحقیق روش های فولکرسن، گولاند و رایسنر، هارت اسمیت و اوجالوو و ایدینوف بررسی و با استفاده از روش المان محدود مقایسه شد و معیارهای اصلی شکست بررسی گردید [۸]. عابدی اوخچی و کوچک زاده در سال ۲۰۱۳ به بررسی کمانش دو پوسته مخروطی همسانگرد به هم متصل تحت فشار محوری و شرایط مرزی ساده پرداختند. معادلات حاکم با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته برای به دست آوردن بارهای بحرانی کمانش دقیق استفاده شده است [۹]. کوچک زاده و شکوری در سال ۲۰۱۳ به مطالعه رفتار ارتعاشی دو پوسته مخروطی چندلایه متصل به هم و بررسی فرکانس های طبیعی و شکل های حالت پرداختند. در این مطالعه پوسته های مخروطی به هم پیوسته را به عنوان حالت کلی پوسته های استوانه ای - مخروطی به هم پیوسته، ورق های استوانه ای یا مخروطی متصل، پوسته های استوانه ای و مخروطی شکل با ضخامت های پلکانی و همچنین صفحات حلقوی در نظر گرفته شد. در این مطالعه با به دست آوردن معادلات حاکم از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته برای حل آن استفاده گردید [۱۰]. ویجایا کومار و همکاران در سال ۲۰۱۴ به مطالعه تغییرات تنش بر روی اتصال کامپوزیت لب به لب با استفاده از روش مونت کارلو پرداختند. آن ها با روش المان محدود و روش تصادفی مونت کارلو، اتصالات صفحات از جنس کامپوزیت را بررسی کردند. سطوح با استفاده از روش برهمنگاری تصاویر

دیجیتال^۴ بررسی گردید و با مدل اجزای محدود مقایسه شد. آن ها نشان دادند مدول و ضخامت چسب بر حداکثر تنش برشی چسب تأثیر دارد [۱۱]. بخشی خانیکی و همکاران در سال ۲۰۱۷ بر روی آنالیز کمانش تیرهای غیریکنواخت به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته پرداخت. در این تحقیق معادله حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همیلتون برای تیرهای گرادیان کرنش غیرمحلی غیریکنواخت ارائه شده و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته برای معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر حل شده است و بارهای کمانش بحرانی به دست آمده است [۱۲]. طالع زاده لاری و همکاران در سال ۲۰۱۸ به بررسی کمانش محوری یک پوسته استوانه ای کامپوزیتی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. معادلات حاکم در دو جهت طولی و محیطی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته حل شده و با مدل المان محدود ABAQUS مقایسه شده است [۱۳]. پوده و همکاران در سال ۲۰۱۸ به مطالعه کمانش صفحات مستطیلی ارتوتروپیک تحت انواع بارگذاری غیرخطی پرداختند. آن ها معادلات کمانش حاکم برای یک صفحه همسانگرد را با استفاده از معادلات تشکیل دهنده مواد ارتوتروپیک و به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته استفاده کردند و مقادیر ویژه را برای نسبت ابعاد صفحه، تعداد لایه ها و برای نوع شرایط مرزی مختلف بررسی کردند [۱۴]. ادیم بلکاسم در سال ۲۰۱۸ به بررسی رفتار کمانش در صفحات کامپوزیتی چندلایه هیبریدی کربن/شیشه با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی پرداخت و بار کمانش بحرانی تحت شرایط مرزی مختلف بررسی کرد. نتایج حاصل با نظریه های مرتبه اول و سایر نظریه های مرتبه بالاتر از مقالات مقایسه شد [۱۵]. کادی اوغلو و همکاران در سال ۲۰۱۹ رفتار مکانیکی اتصال لب به لب چسبی صفحات ایزوتروپیک تحت نیروی فشاری را بررسی کردند. آن ها اتصالات چسبی با ضخامت مختلف را برای اتصال لب به لب و رفتار شرایط کمانش شبه استاتیکی بررسی کردند [۱۶]. کادی اوغلو و همکاران در سال ۲۰۲۰ اثرات بار فشاری بر روی اتصال تک لبه چسب با پارامترهای مختلف را بررسی کردند. آن ها



شکل ۱ - صفحات کامپوزیتی با اتصال چسبی لب به لب

چسب انجام شده است. همچنین کمانش صفحات از جنس مختلف با لایه چینی های مختلف بررسی گردیده است. مقادیر به کمک آنالیز المان محدود در نرم افزار ABAQUS بررسی گردیده است.

۲- معادلات حاکم

در این قسمت معادلات حاکم بر صفحات مستطیلی با اتصال لب به لب ارائه شده است. تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی با اتصال چسبی مطابق با فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در نظر گرفته شده است. اتصال دو صفحه مستطیلی ارتوتروپیک با استفاده از لایه چسب با اتصال لب به لب در شکل ۱ نشان داده شده است. اتصال لب به لب بین صفحه بالایی و صفحه پایینی می باشد. مقدار b عرض صفحات و a_1 و a_2 به ترتیب طول بدون اتصال صفحات بالایی و پایینی می باشد که در این مقاله یکسان در نظر گرفته شده است. l مقدار طول چسب اتصال دو صفحه و L طول صفحات متصل به هم هستند.

مؤلفه های جابجایی شامل u ، v و w به ترتیب در راستای x و y و z می باشد. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، همانند فرضیات تئوری ورق های کلاسیک^۵ (تئوری کیرشهوف)، دو فرض معتبر است. ۱- خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل هم مستقیم باقی می ماند و ۲- خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی، تغییر طول نمی دهند. در تئوری برشی مرتبه اول، برخلاف فرضیات تئوری کلاسیک، صفحات عمود بر سطح میانی، بعد از تغییر شکل دیگر بر سطح میانی عمود باقی

استحکام و قابلیت جذب انرژی اتصالات لب به لب تحت بار کمانش را بررسی کردند [۱۷]. رضانی و همکاران در سال ۲۰۲۰ مطالعه تجربی جامع بر روی اتصالات تک لبه دو چسب با استفاده از روش برهمنگاری تصاویر دیجیتال پرداختند. آن ها پارامترهای مختلف مانند ضخامت چسب، نسبت ضخامت و طول چسب را بررسی کردند [۱۸]. کوچک زاده و همکاران در سال ۲۰۲۱ به بررسی تعیین بار کمانش کلی پوسته های مخروطی کامپوزیتی تحت فشار محوری پرداختند. در این مطالعه با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل حداقل انرژی پتانسیل معادلات تعادل به دست آمده و به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته بار بحرانی کمانش به دست می آید [۱۹]. مارکیونه در سال ۲۰۲۱ به تحلیل تنش در اتصالات چسب لب به لب تحت بارهای فشاری پرداخت. ایشان به مطالعه عددی توزیع تنش در لایه چسب تحت شرایط کمانش فشاری با مدل سازی در نرم افزار FE ANSYS پرداخت [۲۰]. نجات بخش و همکاران در سال ۲۰۲۲ به بررسی اثر سختی خمشی تکیه گاهی بر نیروی بحرانی کمانش فشاری در صفحات ارتوتروپیک پرداختند. آن ها بنا به سختی خمشی تکیه گاهی در شرایط مرزی مختلف، گراف هایی برای محاسبه کمانش بحرانی فشاری در صفحات ارتوتروپیک ارائه کردند [۲۱].

در مقاله حاضر به بررسی مقادیر کمانش بحرانی برای صفحات ارتوتروپیک اتصال لب به لب با اتصال چسبی با شرایط مرزی متفاوت تحت نیروی فشاری پرداخته شده است. بررسی کمانش اتصال لب به لب با طول هم پوشانی و ضخامت متفاوت

عرضی به صورت رابطه (۵) تعریف می شوند [۲۳].

$$\begin{aligned} N_{ixx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ixx} dz & M_{ixx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{ixx} dz \\ N_{iyy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{iyy} dz & M_{iyy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{iyy} dz \\ N_{ixy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ixy} dz & M_{ixy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{ixy} dz \\ Q_{ix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ixz} dz & h_1 &= \frac{-t_1}{2} \\ Q_{iy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{iyz} dz & h_2 &= \frac{-t_2}{2} \end{aligned} \quad (۵)$$

t_1 و t_2 به ترتیب ضخامت صفحات بالایی و پایینی می باشد. بر اساس روابط تنش- کرنش درون صفحه ای و روابط (۵) و (۴) رابطه (۶) به دست می آید [۲۳].

$$\begin{bmatrix} N_{ixx} \\ N_{iyy} \\ N_{ixy} \\ M_{ixx} \\ M_{iyy} \\ M_{ixy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{16}^i & B_{11}^i & B_{12}^i & B_{16}^i \\ A_{12}^i & A_{22}^i & A_{26}^i & B_{12}^i & B_{22}^i & B_{26}^i \\ A_{16}^i & A_{26}^i & A_{66}^i & B_{16}^i & B_{26}^i & B_{66}^i \\ B_{11}^i & B_{12}^i & B_{16}^i & D_{11}^i & D_{12}^i & D_{16}^i \\ B_{12}^i & B_{22}^i & B_{26}^i & D_{12}^i & D_{22}^i & D_{26}^i \\ B_{16}^i & B_{26}^i & B_{66}^i & D_{16}^i & D_{26}^i & D_{66}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{ixx}^0 \\ \varepsilon_{iyy}^0 \\ \gamma_{ixy}^0 \\ \kappa_{ixx} \\ \kappa_{iyy} \\ \kappa_{ixy} \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{ix} \\ Q_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^i & A_{45}^i \\ A_{45}^i & A_{55}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{ixz} \\ \gamma_{iyz} \end{bmatrix}$$

که در این روابط مقادیر A_{jk}^i و B_{jk}^i و D_{jk}^i به صورت روابط (۷) تعریف می شود [۲۳].

$$\begin{aligned} A_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} \bar{Q}_{jk}^{im} dz & j, k &= 1, 2, 6 \\ B_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} z \cdot \bar{Q}_{jk}^{im} dz & j, k &= 1, 2, 6 \\ D_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} z^2 \cdot \bar{Q}_{jk}^{im} dz & j, k &= 1, 2, 6 \\ A_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} K_s \cdot \bar{Q}_{jk}^{im} dz & j, k &= 4, 5 \quad K_s \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned} \quad (۷)$$

نمی مانند در نتیجه با در نظر گرفتن این تئوری، مؤلفه های کرنش نرمال ε_x و ε_y کرنش برشی γ_{xy} و γ_{xz} و γ_{yz} وجود داشته و تنها کرنش نرمال ε_z صفر است. بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، جابجایی ها به صورت زیر تعریف می شوند [۲].

$$u_i = u_i^0 + z \phi_{ix} \quad v_i = v_i^0 + z \phi_{iy} \quad w_i = w_i^0 \quad (۱)$$

در رابطه فوق برای صفحه یک $i = 1$ و برای صفحه دو $i = 2$ است. z فاصله هر نقطه دلخواه از صفحه میانی صفحه است. مقادیر ε_{ix}^0 و ε_{iy}^0 و γ_{ixz}^0 و γ_{iyz}^0 و γ_{ixy}^0 کرنش های مرتبط با میدان جابجایی صفحه میانی به صورت زیر تعریف می شوند [۲۲].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ixx}^0 &= \frac{\partial u_i^0}{\partial x} \\ \varepsilon_{iyy}^0 &= \frac{\partial v_i^0}{\partial y} \\ \gamma_{ixy}^0 &= \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\ \gamma_{ixz}^0 &= \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \\ \gamma_{iyz}^0 &= \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \end{aligned} \quad (۲)$$

همچنین κ_{ix} و κ_{iy} و κ_{ixy} به ترتیب بیانگر انحناء طولی، عرضی و برشی به صورت زیر تعریف می شوند [۱].

$$\begin{aligned} \kappa_{ixx} &= \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \\ \kappa_{iyy} &= \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\ \kappa_{ixy} &= \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \end{aligned} \quad (۳)$$

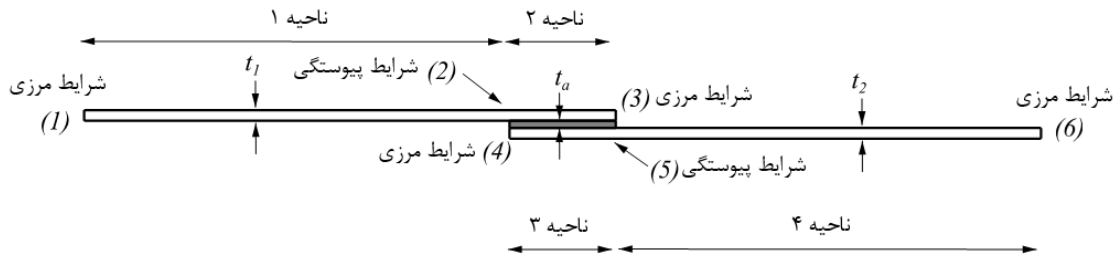
با توجه به روابط کرنش انحناء کرنش طولی، عرضی و برشی به صورت رابطه (۴) تعریف می شوند [۲].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ixx} &= \varepsilon_{ixx}^0 + z \kappa_{ixx} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \\ \varepsilon_{iyy} &= \varepsilon_{iyy}^0 + z \kappa_{iyy} = \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\ \gamma_{ixy} &= \gamma_{ixy}^0 + z \kappa_{ixy} \\ &= \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\ &\quad + z \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\gamma_{ixz} = \gamma_{ixz}^0 = \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix}$$

$$\gamma_{iyz} = \gamma_{iyz}^0 = \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy}$$

منتجه های تنش حاصل از ممان خمشی و تنش های برشی



شکل ۲- شرایط مرزی در اتصال دو صفحه مستطیلی با اتصال چسبی

که برای مقطع مستطیلی با خواص مکانیکی یکسان برابر $5/6$ می‌باشد.

$$K_s = \frac{U_s^f}{U_s^c} = \frac{\frac{Q_0^2}{2G_{13}bh}}{\frac{3Q_0^2}{5G_{13}bh}} = \frac{5}{6} \quad (10)$$

با توجه به شرایط لایه چینی و خصوصیات مواد به کار رفته در صفحات مقادیر ماتریس $[A]$ ، $[B]$ و $[D]$ به دست می‌آید. ضرایب ماتریس سفتی به صورت روابط (۱۱) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + Q_{22}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^2) \\ \bar{Q}_{22} &= (Q_{11}n^4 + Q_{22}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2, \bar{Q}_{55} = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2 \\ \bar{Q}_{45} &= -Q_{44}mn + Q_{55}mn, \bar{Q}_{54} = Q_{44}mn - Q_{55}mn \\ Q_{11} &= \frac{E_x}{1 - \nu_x\nu_y}, Q_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_x\nu_y}, Q_{12} = \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_x\nu_y} \\ Q_{44} &= G_{23}, Q_{55} = G_{66} = E_s, m = \cos(\theta), n = \sin(\theta) \end{aligned} \quad (11)$$

در این رابطه θ نشان‌دهنده زاویه لایه‌های کامپوزیت، E_x مدول طولی لایه، E_y مدول عرضی لایه، E_s مدول برشی لایه، ν_x ضریب پواسون طولی لایه و ν_y ضریب پواسون عرضی لایه است. شرایط مرزی در اتصال دو صفحه مستطیلی در شکل ۲ آورده شده است.

در این شکل t_a ضخامت چسب و t_1 ضخامت صفحه بالایی

که z_{m-1} و z_m نشان دهنده فواصل اندازه‌گیری شده از صفحه میانی صفحه چندلایه تا سطوح پایین و بالای لایه m ام می‌باشد و مقدار \bar{Q}_{jk}^{im} نیز ضرایب ماتریس سختی لایه m ام می‌باشد که برای صفحه یک $i = 1$ و برای صفحه دو $i = 2$ است. بر اساس فرضیات تئوری برشی مرتبه اول کرنش‌های برشی عرضی در ضخامت صفحات ثابت فرض می‌شوند، بنابراین تنش‌های برشی عرضی نیز ثابت خواهند بود. بر اساس معادلات تعادل، تنش برشی عرضی در ضخامت صفحه سهموی است. این اختلاف بین حالت تنش واقعی و حالت تنش ثابت تئوری برشی مرتبه اول، نیروی برشی عرضی در روابط انرژی، توسط ضریب تصحیح برشی K_s تصحیح می‌شود. توزیع تنش برشی واقعی برای مقطع مستطیلی با عرض b و ارتفاع h و تنش برشی عرضی در تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر است [۲۳].

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^c &= \frac{3Q_0}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ \sigma_{xz}^f &= \frac{Q_0}{bh} \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن Q_0 بار عرضی و σ_{xz}^f تنش برشی عرضی در تئوری برشی مرتبه اول و σ_{xz}^c توزیع تنش برشی واقعی است. انرژی کرنش ناشی از تنش‌های عرضی در دو حالت به صورت رابطه (۹) می‌باشد [۲۳].

$$\begin{aligned} U_s^c &= \frac{1}{2G_{13}} \int_A (\sigma_{xz}^c)^2 dA = \frac{3Q_0^2}{5G_{13}bh} \\ U_s^f &= \frac{1}{2G_{13}} \int_A (\sigma_{xz}^f)^2 dA = \frac{Q_0^2}{2G_{13}bh} \end{aligned} \quad (9)$$

K_s ضریب تصحیح برشی از نسبت U_s^f به U_s^c به دست می‌آید که به طور کلی به هندسه و خواص مواد صفحات بستگی دارد

مؤلفه در آن وجود دارد.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{az} &= \frac{\partial w_a}{\partial z} \\ \gamma_{axz} &= \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w_a}{\partial x} \\ \gamma_{ayz} &= \frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial w_a}{\partial y}\end{aligned}\quad (13)$$

مطابق معادلات تعادل و فرض تقارن تانسور تنش و نیروهای حجمی صفر، به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}\tau_{axy} &= \tau_{ayx} \\ \tau_{axz} &= \tau_{azz} \\ \tau_{ayz} &= \tau_{azy}\end{aligned}\quad (14)$$

با انتگرال گیری ε_{az} در رابطه (۱۳) نسبت به z و جایگذاری با σ_{az} در رابطه (۱۲) روابط به صورت رابطه (۱۵) به دست می آید.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{az} &= \frac{\partial w_a}{\partial z} \rightarrow \partial w_a = \varepsilon_{az} \cdot \partial z \\ \sigma_{az} &= E_a \cdot \varepsilon_{az} \rightarrow \varepsilon_{az} = \frac{\sigma_{az}}{E_a} \\ w_a &= \frac{z \cdot \sigma_{az}}{E_a} + w_{a0}\end{aligned}\quad (15)$$

که این رابطه که در آن مدول یانگ چسب و w_{a0} جابجایی چسب در $z = 0$ است. جابجایی های u_a و v_a با انتگرال گیری از رابطه (۲) مشابه رابطه (۴) به دست می آید. در جهت ضخامت در لایه چسب تنش های سطحی و برشی یکنواخت فرض می شود. در نتیجه، کرنش های برشی و کرنش عمودی در ناحیه چسب به صورت زیر بیان می گردد. با داشتن شرط پیوستگی در جهت x و y به ترتیب بین صفحات اتصال و چسب در $z = 0$ و $z = t_a$ روابط (۱۶) به دست می آید.

$$\begin{aligned}\gamma_{axz} &= \frac{u_2^0 - u_3^0 - h_1 \cdot \phi_{2x} - h_2 \cdot \phi_{3x}}{t_a} \\ \gamma_{ayz} &= \frac{v_2^0 - v_3^0 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}}{t_a} \\ \varepsilon_{az} &= \frac{1}{t_a} (w_2 - w_3)\end{aligned}\quad (16)$$

u_1^0 و v_1^0 و w_1 مؤلفه های جابجایی در صفحه وسط صفحه بالایی می باشد. ϕ_{1x} و ϕ_{1y} مؤلفه های چرخشی در صفحه بالایی است. u_2^0 و v_2^0 و w_2 مؤلفه های جابجایی در صفحه وسط صفحه پایینی می باشد. ϕ_{2x} و ϕ_{2y} مؤلفه های چرخشی در صفحه پایینی است. معادلات تعادل صفحات مستطیلی با استفاده از اصل همپوشانی^۷ به صورت رابطه (۱۷) تعریف شده است [۲۳].

و t_2 ضخامت صفحه پایینی می باشد و شرایط مرزی اتصال دو صفحه در ابتدا و انتهای سازه و همچنین در ابتدا و انتهای طول همپوشانی نشان داده شده است. ابتدا و انتهای سازه با شرایط مرزی مختلف و در ابتدا و انتهای طول همپوشانی شرایط مرزی آزاد می باشد. همچنین با توجه به نوع اتصال، سازه به چهار ناحیه تقسیم شده است. ناحیه ۱ و ۴ نشان دهنده صفحه مستطیلی کامپوزیتی بوده و ناحیه ۲ و ۳ نشان دهنده دو صفحه مستطیلی بوده که با یکدیگر با اتصال چسبی متصل شده اند. نقاط اتصال ۲ و ۵ شرایط پیوستگی بین صفحات برقرار است. برای ناحیه اتصال چسب فرضیات این مسئله بر مبنای فرضیات تئوری برشی مرتبه اول همانند فرضیات تئوری ورق های کلاسیک، در این مسئله به شرح زیر در نظر گرفته می شود. ۱- تغییر شکل ها کوچک می باشد و همه مواد تشکیل دهنده الاستیک خطی می باشند ۲- در ناحیه اتصال چسب، مدول نرمال عرضی بسیار پایین می باشد، به طوری که تغییر شکل نرمال عرضی صفحات به هم چسبیده شده، در مقابل با چسب، ناچیز است ۳- چسب حالت تنش صفحه ای می باشد و مقادیر تنش $\sigma_{ax} = \sigma_{ay} = \tau_{axy} = 0$ می باشد. زیر نویس a برای چسب استفاده می شود ۴- تنش های جداکننده^۸ و تنش برشی در امتداد ضخامت در لایه چسب یکنواخت فرض شده است ۵- از تنش های حرارتی در صفحات کامپوزیتی صرفه نظر گردیده و تغییری در میزان رطوبت رخ نمی دهد.

معادلات تعادل برای هر قسمت به دست می آید. معادلات تعادل بیان شده بر حسب جابجایی در ادامه ارائه شده است و با توجه به فرضیات ۳ و ۴ تنها سه مؤلفه تنش وجود دارد. مطابق قانون هوک سه بعدی، روابط تنش-کرنش و مؤلفه های کرنش مربوط به چسب از روابط (۱۲) به دست می آید [۲].

$$\begin{aligned}\sigma_{az} &= E_a \cdot \varepsilon_{az}(x, y, t) \\ \tau_{ayz} &= G_a \cdot \gamma_{ayz}(x, y, t) \\ \tau_{axz} &= G_a \cdot \gamma_{axz}(x, y, t)\end{aligned}\quad (17)$$

E_a مدول یانگ چسب و G_a مدول برشی چسب است. همچنین روابط کرنش جابجایی، مطابق روابط (۱۳) در زیر آورده شده است که با توجه به فرضیات تئوری برشی مرتبه اول تنها سه

$$\begin{aligned} \delta V_i &= \int_{A_i} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\hat{\sigma}_{nmi}(\delta u_{ni} + z\delta\phi_{ni}) \\ &+ \hat{\sigma}_{nsi}(\delta u_{si} + z\delta\phi_{si}) + \hat{\sigma}_{nzi}\delta w_{0i}] dz ds \\ &- \int_{\Omega_i} (q_{bi} + q_{ti} - kw_{0i})\delta w_{0i} dx dy \quad i \\ &= 1,2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \delta V_i &= \int_{A_i} (\hat{N}_{nmi}\delta u_{ni} + \hat{N}_{nsi}\delta u_{si} + \hat{M}_{nmi}\delta\phi_{ni} \\ &+ \hat{M}_{nsi}\delta\phi_{si} + \hat{Q}_{ni}\delta w_{0i}) ds \\ &+ \int_{\Omega_i} (kw_{0i}\delta w_{0i} \\ &- q_i\delta w_{0i}) dx dy \quad i \\ &= 1,2 \end{aligned}$$

که Ω_i نشان دهنده صفحه میانی در صفحات است. روابط انرژی جنبشی به صورت زیر تعریف می شوند. با جایگزین کردن انرژی کرنشی، کار مجازی در اصل همپلتون به معادله حاکم برای صفحات خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [N_{ixx}\delta\varepsilon_{ixx}^0 + M_{ixx}\delta\kappa_{ixx} + N_{iyy}\delta\varepsilon_{iyy}^0 \\ + M_{iyy}\delta\kappa_{iyy} + N_{ixy}\delta\gamma_{ixy}^0 \\ + M_{ixy}\delta\kappa_{ixy} + Q_{ix}\delta\gamma_{ixz} \\ + Q_{iy}\delta\gamma_{iyz} + \frac{t_a G_a}{2}\gamma_{axz}^2 \\ + \frac{t_a G_a}{2}\gamma_{ayz}^2 + \frac{E_a}{2t_a}w_2^2 \\ + \frac{E_a}{2t_a}w_3^2 + \hat{N}_{nmi}\delta u_{ni}] dx dy \\ = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه فوق را به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [N_{ixx}\delta\frac{\partial u_i^0}{\partial x} + M_{ixx}\delta\frac{\partial\phi_{ix}}{\partial x} + N_{iyy}\delta\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \\ + M_{iyy}\delta\frac{\partial\phi_{iy}}{\partial y} + N_{ixy}\delta\frac{\partial u_i^0}{\partial y} \\ + N_{ixy}\delta\frac{\partial v_i^0}{\partial x} + M_{ixy}\delta\frac{\partial\phi_{ix}}{\partial y} \\ + M_{ixy}\delta\frac{\partial\phi_{iy}}{\partial x} + Q_{ix}\delta\frac{\partial w_i^0}{\partial x} \\ + Q_{ix}\phi_{ix} + Q_{iy}\frac{\partial w_i^0}{\partial y} \\ + Q_{iy}\phi_{iy} + \frac{t_a G_a}{2}\gamma_{axz}^2 \\ + \frac{t_a G_a}{2}\gamma_{ayz}^2 + \frac{E_a}{2t_a}w_2^2 \\ + \frac{E_a}{2t_a}w_3^2 + \hat{N}_{nmi}\delta u_{ni}] dx dy \\ = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\int_0^T (\delta U + \delta V) dt = 0 \quad (17)$$

که در آن انرژی کرنش مجازی، δV کار مجازی انجام شده توسط نیروهای اعمال شده می باشد.

$$\int_0^T (\delta(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) + \delta(V_1 + V_2)) dt = 0 \quad (18)$$

که $i = 1$ برای صفحه بالایی و $i = 2$ برای صفحه پایینی و $3, 4, a$ برای ناحیه چسب می باشد. مقادیر U_1, U_2, U_3, U_4 به ترتیب نشان دهنده انرژی کرنشی صفحه بالایی، صفحه پایینی، انرژی کرنشی برشی چسب و انرژی کرنشی نرمال چسب است. مقادیر V_1, V_2 به ترتیب نشان دهنده کار مجازی صفحه بالایی، صفحه پایینی است. روابط انرژی کرنشی به صورت رابطه (۱۹) تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} \delta U_i &= \int_{A_i} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ijk}\delta\varepsilon_{ijk}) dz \right\} dx dy \quad j, k \\ &= x, y, z \\ \delta U_i &= \int_{A_i} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{ixx}(\delta\varepsilon_{ixx}^0 + z\delta\kappa_{ixx}) \right. \\ &+ \sigma_{iyy}(\delta\varepsilon_{iyy}^0 + z\delta\kappa_{iyy}) \\ &+ \sigma_{ixy}(\delta\varepsilon_{ixy}^0 + z\delta\kappa_{ixy}) \\ &+ \sigma_{ixz}\delta\gamma_{ixz} \\ &+ \sigma_{iyz}\delta\gamma_{iyz}] dz \left. \right\} dx dy \quad i \\ &= 1,2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta U_i &= \int_{A_i} (N_{ixx}\delta\varepsilon_{ixx}^0 + M_{ixx}\delta\kappa_{ixx} + N_{iyy}\delta\varepsilon_{iyy}^0 \\ &+ M_{iyy}\delta\kappa_{iyy} + N_{ixy}\delta\gamma_{ixy}^0 + M_{ixy}\delta\kappa_{ixy} \\ &+ Q_{ix}\delta\gamma_{ixz} + Q_{iy}\delta\gamma_{iyz}) dx dy \quad i \\ &= 1,2 \end{aligned}$$

$$U_3 = \frac{t_a G_a}{2} \int_{A_i} (\gamma_{axz}^2 + \gamma_{ayz}^2) dx dy$$

$$U_4 = \frac{E_a}{2t_a} \int_{A_i} (w_2 - w_3)^2 dx dy$$

که برای A_i مقدار $i = 1$ برای صفحه بالایی و $i = 2$ برای صفحه پایینی و $i = 3$ انرژی کرنشی برشی چسب و $i = 4$ انرژی کرنشی نرمال چسب است. روابط کار مجازی به صورت رابطه (۲۰) تعریف می شوند.

با جایگذاری معادلات در اصل همیلتون داریم:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left[- \left(\frac{\partial N_{ixx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ixy}}{\partial y} + \frac{G_a}{t_a} (u_2 - u_3 - h_1 \cdot \phi_{2x} - h_2 \cdot \phi_{3x}) + \widehat{N}_{xxi} \right) \delta u_0 - \left(\frac{\partial N_{ixy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{iyy}}{\partial y} + \frac{G_a}{t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) \right) \delta v_0 - \left(\frac{\partial M_{ixx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{ixy}}{\partial y} - Q_{ix} + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) \right) \delta \phi_x - \left(\frac{\partial M_{ixy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{iyy}}{\partial y} - Q_{iy} + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) \right) \delta \phi_y - \left(\frac{\partial Q_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{iy}}{\partial y} - \frac{E_a}{2t_a} w_2^2 - \frac{E_a}{2t_a} w_3^2 \right) \delta w_0 \right] dx dy = 0 \quad (23)$$

از رابطه (23) به معادلات (24) می‌رسیم:

$$\frac{\partial N_{ixx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ixy}}{\partial y} + \frac{G_a}{t_a} (u_2 - u_3 - h_1 \cdot \phi_{2x} - h_2 \cdot \phi_{3x}) - \widehat{N}_{xxi} = 0 \quad (\text{الف-24})$$

$$\frac{\partial N_{ixy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{iyy}}{\partial y} + \frac{G_a}{t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \quad (\text{ب-24})$$

$$\frac{\partial Q_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{iy}}{\partial y} - \frac{E_a}{2t_a} w_2^2 - \frac{E_a}{2t_a} w_3^2 = 0 \quad (\text{ج-24})$$

$$\frac{\partial M_{ixx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{ixy}}{\partial y} - Q_{ix} + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \quad (\text{د-24})$$

$$\frac{\partial M_{ixy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{iyy}}{\partial y} - Q_{iy} + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \quad (\text{ه-24})$$

حال با جایگذاری رابطه (2) و (3) و (6) در رابطه (24) خواهیم

داشت:

$$\begin{aligned} & A_{11}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) + A_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) \\ & + A_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\ & + B_{11}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) \\ & + B_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) + B_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \\ & + A_{16}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) \\ & + A_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + A_{66}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\ & + B_{16}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) \\ & + B_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) + B_{66}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \\ & + \frac{G_a}{t_a} (u_2 - u_3 - h_1 \cdot \phi_{2x} - h_2 \cdot \phi_{3x}) - \widehat{N}_{xxi} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

(الف)

(ب)

(ج)

(د)

(ه)

$$\begin{aligned} & A_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) + A_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) \\ & + A_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\ & + B_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) \\ & + B_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\ & + B_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \\ & + A_{12}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) \\ & + A_{22}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + A_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\ & + B_{12}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) + B_{22}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\ & + B_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) + \frac{G_a}{t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & K_s A_{44}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \right) + K_s A_{45}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \right) \\ & + K_s A_{45}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \right) \\ & + K_s A_{55}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \right) \\ & - \frac{E_a}{2t_a} w_2^2 - \frac{E_a}{2t_a} w_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

(ج)

$$B_{11}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) + B_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) \quad (25)$$

(د)

زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned}
 N_{ix} &= A_{11} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + A_{16} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + A_{16} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\
 &\quad + B_{11} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\
 &\quad + B_{16} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
 N_{iy} &= A_{12} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + A_{26} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + A_{26} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\
 &\quad + B_{12} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\
 &\quad + B_{26} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
 N_{ixy} &= A_{16} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\
 &\quad + B_{16} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\
 &\quad + B_{66} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
 M_{ix} &= B_{11} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\
 &\quad + D_{11} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\
 &\quad + D_{16} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
 M_{iy} &= B_{12} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\
 &\quad + D_{12} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\
 &\quad + D_{26} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + D_{26} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
 M_{ixy} &= B_{16} \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v_i^0}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \\
 &\quad + D_{16} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \\
 &\quad + D_{66} \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
 Q_{ix} &= A_{44} \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + A_{44} \phi_{ix} + A_{45} \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + A_{45} \phi_{iy} \\
 Q_{iy} &= A_{45} \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + A_{45} \phi_{ix} + A_{55} \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + A_{55} \phi_{iy}
 \end{aligned}
 \tag{۲۷}$$

در ناحیه (۲) و (۵) شرایط سازگاری شامل پیوستگی جابه‌جایی،

پیوستگی شیب و پیوستگی گشتاور خمشی به صورت زیر بررسی

می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 u_i &= u_j \\
 v_i &= v_j \\
 w_i &= w_j \\
 \phi_{xi} &= \phi_{xj} \\
 \phi_{yi} &= \phi_{yj}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ B_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) + D_{11}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) \\
 &\quad + D_{12}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\
 &+ D_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) + B_{16}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) \\
 &+ B_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + B_{66}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\
 &\quad + D_{16}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) + D_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\
 &+ D_{66}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) - K_s A_{44}^i \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \right) \\
 &\quad - K_s A_{45}^i \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \right) \\
 &+ \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0 \\
 &B_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} \right) + B_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) \\
 &\quad + B_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\
 &+ D_{16}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) + D_{26}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\
 &\quad + D_{66}^i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \\
 &\quad + B_{12}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x} \right) \\
 &+ B_{22}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y} \right) + B_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x} \right) \\
 &\quad + D_{12}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} \right) \\
 &\quad + D_{22}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} \right) \\
 &+ D_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \\
 &+ D_{26}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) \\
 &+ D_{66}^i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \right) - K_s A_{45}^i \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix} \right) \\
 &\quad - K_s A_{55}^i \left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy} \right) \\
 &+ \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a} (v_2 - v_3 - h_1 \cdot \phi_{2y} - h_2 \cdot \phi_{3y}) = 0
 \end{aligned}
 \tag{۲۵}$$

-۲۵)

(۵)

شرایط مرزی در دو لبه عرضی به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی لبه‌های صفحات در دو انتها در ناحیه (۱) و (۶) برای شرط مرزی ساده S ، شرط مرزی گیردار C و شرط مرزی آزاد F بررسی شده است. این شرایط به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 \text{Simply: } w &= \phi_y = M_x = 0 \\
 \text{Clamp: } u &= v = w = \phi_x = 0 \\
 \text{Free: } N_x &= N_{xy} = M_x = M_{xy} = Q_x = 0
 \end{aligned}
 \tag{۲۶}$$

شرایط مرزی در ناحیه چسب، ناحیه (۳) و (۴) به صورت شرایط مرزی لبه‌های آزاد در نظر گرفته شده است. این شرایط به صورت

یکی از مهم ترین نکات در همگرایی نتایج، علاوه بر تعداد نقاط، نحوه توزیع نقاط در حوزه حل است. دو نوع توزیع یکنواخت و غیریکنواخت در این روش پیشنهاد می شود که نقاط شبکه با توزیع یکنواخت به صورت رابطه (۳۲) است [۲۵].

$$x_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 0 \leq x \leq L_i = 1, 2, \dots, N \quad (32)$$

همچنین توزیع نقطه غیریکنواخت چبششف-گوس-لوباتو را می توان به صورت رابطه (۳۳) می باشد. خاصیت این نوع توزیع آن است که تراکم نقاط در نظر گرفته شده در این نوع توزیع در نزدیکی نقاط مرزی بیشتر از نقاط میانی می باشد.

$$x_i = \frac{L}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right] \quad 0 \leq x \leq L_i \quad (33) \\ = 1, 2, \dots, N$$

با توجه به روش حل GDQM، جابجایی ها برای حل معادلات کماتش به صورت رابطه (۳۴) در نظر گرفته می شود.

$$[K]\{w\} = N_{x-cr}[P]\{w\} \quad (34)$$

۴- حل معادلات کماتش به روش GDQM:

میدان جابجایی به دست آمده با استفاده از روش جداسازی متغیرها به صورت رابطه (۳۵) تعریف می شوند [۲۳].

$$u_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y \\ v_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y \\ w_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y \quad (35) \\ \phi_x(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y \\ \phi_y(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y$$

که در آن $\alpha = m\pi/a$ و $\beta = n\pi/b$ می باشد. با قرار دادن روابط (۳۵) در روابط (۲۵) ماتریس [H] به دست می آید که آرایه های آن به صورت رابطه (۳۶) تعریف می شود:

$$H_{11} = -A_{11}\alpha U - 2A_{16}\alpha\beta U - A_{26}\beta^2 U - \quad (36) \\ A_{66}\beta^2 U + \frac{G_a}{t_a}(u_1 - u_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + \\ t_2\phi_{2x}) - N_x$$

$$Q_{yi} = Q_{yj} \\ N_{xi} = N_{xj} \\ N_{yi} = N_{yj} \\ N_{xyi} = N_{xyj} \\ M_{xi} = M_{xj} \\ M_{yi} = M_{yj} \\ M_{xyi} = M_{xyj}$$

که اندیس i و j به ترتیب مربوط به ناحیه پیوستگی است.

۳- حل معادلات به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته:

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته مبتنی بر تقریب یک مشتق از یک تابع در یک نقطه مشخص با مجموع وزنی و مقادیر تابع در هر نقطه مجموعه در محدوده حل مسئله است. مشتق یک تابع نسبت به یک متغیر را می توان به صورت ترکیب خطی وزن دار از مقادیر تابع که در تعداد نقاط دامنه محاسبه شده اند، تقریب زد. برای انطباق یک چند جمله ای یکتا بر نقاط لاگرانژی^۱ رابطه (۲۹) ارائه گردیده است [۲۵].

$$f_x(x_i) = \sum_{i=1}^N a_{ij} f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

$$\left. \frac{d^r f}{dx^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} f(x_j)$$

که N تعداد نقاط شبکه در جهت x است. همچنین ماتریس ضرایب وزنی است که به صورت رابطه (۳۰) تعریف می شود [۲۵].

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\prod_{k=1, k \neq i, j}^N (x_i - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)} & i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N \\ \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_k} & i = j = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (30)$$

که در آن برای مشتقات بالاتر ضرایب وزنی به صورت رابطه (۳۱) محاسبه می شود.

$$A_{ij}^{(r)} = A_{ij}^{(1)} A_{ij}^{(r-1)} \quad r = 2, 3, \dots, N-1 \quad (31) \\ [A]^{(r)} = [A]^{(1)} [A]^{(r-1)} \quad r = 2, 3, \dots, N-1$$

$$H_{41} = -B_{11}\alpha^2 U - B_{16}\alpha\beta U - B_{26}\beta^2 U - B_{66}\beta^2 U + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{42} = -B_{12}\alpha\beta V - B_{16}\alpha\beta V - B_{16}\alpha^2 V - B_{66}\alpha\beta V + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{43} = -K_s A_{44}\alpha W - K_s A_{45}\beta W + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{44} = -K_s A_{44}\alpha\varphi_x - D_{11}\alpha^2\varphi_x - 2D_{16}\alpha\beta\varphi_x - D_{66}\beta^2\varphi_x + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{45} = -B_{12}\alpha\beta\varphi_y - B_{16}\alpha^2\varphi_y - B_{26}\beta^2\varphi_y - B_{66}\alpha\beta\varphi_y + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{51} = -B_{12}\alpha\beta U - B_{16}\alpha^2 U - B_{22}\beta^2 U - B_{26}\beta^2 U - B_{66}\alpha\beta U + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{52} = -B_{66}\alpha^2 V - 2B_{26}\alpha\beta V + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{53} = -K_s A_{45}\alpha W - K_s A_{55}\beta W + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{54} = -D_{16}\alpha^2\varphi_x - D_{12}\alpha\beta\varphi_x - D_{26}\beta^2\varphi_x - D_{66}\alpha\beta\varphi_x - K_s A_{45}\varphi_x + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{55} = -2D_{26}\alpha\beta\varphi_y - D_{66}\alpha^2\varphi_y - D_{22}\beta^2\varphi_y - K_s A_{55}\varphi_y + \frac{G_a h_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_a h_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{12} = -A_{12}\alpha\beta V - A_{16}\alpha^2 V - A_{26}\beta^2 V - A_{66}\alpha\beta V + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{13} = \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{14} = -B_{11}\alpha^2\varphi_x - 2B_{16}\alpha\beta\varphi_x - B_{66}\beta^2\varphi_x + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{15} = -B_{12}\alpha\beta\varphi_y - B_{16}\alpha^2\varphi_y - B_{26}\beta^2\varphi_y - B_{66}\alpha\beta\varphi_y + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{21} = -A_{12}\alpha\beta U - A_{16}\alpha^2 U - A_{22}\beta^2 U - A_{26}\beta^2 U - A_{26}\alpha\beta U + A_{66}\alpha\beta U + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{22} = -2A_{26}\alpha\beta V - A_{66}\alpha^2 V + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{23} = \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{24} = -B_{12}\alpha\beta\varphi_x - B_{16}\alpha^2\varphi_x - B_{26}\beta^2\varphi_x - B_{66}\alpha\beta\varphi_x + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{25} = -B_{22}\beta^2\varphi_y - 2B_{26}\alpha\beta\varphi_y - B_{66}\alpha^2\varphi_y + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y})$$

$$H_{31} = -\frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)$$

$$H_{32} = -\frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)$$

$$H_{33} = -K_s A_{44}\alpha^2 W + 2K_s A_{45}\alpha\beta W - K_s A_{55}\beta^2 W - \frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)$$

$$H_{34} = -K_s A_{44}\alpha\varphi_x + K_s A_{45}\beta\varphi_x - \frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)$$

$$H_{35} = K_s A_{45}\alpha\varphi_y - K_s A_{55}\beta\varphi_y - \frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)$$

-۳۶)

(۵)

-۳۶)

(۶)

-۳۶)

(۷)

-۳۶)

(۸)

جدول ۱- خصوصیات مکانیکی صفحات و چسب [۲۱] و [۲۶]

$\rho_s (kg/m^3)$	ν_x	$G (GPa)$	$E_y (GPa)$	$E_x (GPa)$	
۱۶۰۰	۰/۳	۵	۴	۸۹	کربن - اپوکسی تک جهته
۱۶۰۰	۰/۰۴	۴	۵۶/۸	۵۶/۸	کربن - اپوکسی دو جهته
۱۸۰۰	۰/۲۶	۴/۱۴	۸/۲۷	۳۸/۶	شیشه - اپوکسی تک جهته
۱۴۶۰	۰/۳۴	۲/۳	۵/۵	۷۶	آرامید - اپوکسی تک جهته
۲۵۰۰	۰/۳۴	۱/۴	۴/۶	۴/۶	چسب اپوکسی
۱۲۰۰	۰/۴۱	۰/۴۶	۱/۳	۱/۳	چسب IPCO 9923
۱۳۵۰	۰/۳۴	۱/۷	۵	۵	چسب AV 138

جدول ۲- مقایسه بار بحرانی صفحات با طول همپوشانی صفر از جنس کربن/اپوکسی تک جهته

درصد خطا	$N_{x-cr} (N/mm)$ مرجع [۲۴]	روش حاضر $N_{x-cr} (N/mm)$	لایه چینی
۱/۵	۶/۹۱	۶/۸۰	[0/45/-45/0]
۱/۲	۷/۱۵	۷/۰۶	[0/30/-30/0]
۰/۹	۷/۳۷	۷/۳۰	[0/15/-15/0]

۵-۱- اعتبار سنجی

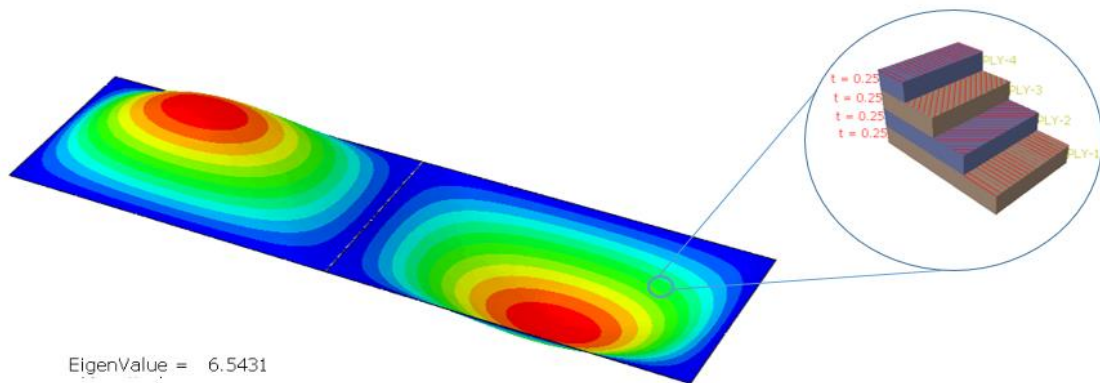
در این مقاله تحلیل کمانش صفحات با اتصال همپوشانی چسبی به روش حل GDQM انجام شده است. مقایسه کمانش بحرانی نتایج حاصل از دو صفحه به هم پیوسته با شرایط پیوستگی با طول همپوشانی صفر در نظر گرفته شده است. ابعاد هر یک از صفحات کامپوزیتی به طول ۲۰۰ میلی‌متر و عرض ۱۰۰ میلی‌متر از جنس کربن/اپوکسی تک جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS در نظر گرفته شده است. نتایج محاسبات با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۴] مقایسه شده است و در جدول ۲ آورده شده است که تطابق بسیار خوبی حاصل شده است.

نتایج حاصل از روش عددی با حل المان محدود نیز مقایسه شد که نتایج بر هم منطبق می‌باشد. شکل ۳ نمایی از کمانش صفحات متصل به هم در نرم‌افزار المان محدود آورده شده است.

که $U^{(i)}$ ، $V^{(i)}$ ، $W^{(i)}$ ، $\phi_x^{(i)}$ و $\phi_y^{(i)}$ مشتقات مرتبه (i) جابجایی‌ها می‌باشند که با توجه به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته به دست می‌آیند.

۵- تحلیل و نتایج

نتایج حاصل از بار کمانش بحرانی سازه بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و با استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته ارائه شده است. شرایط مختلف لایه چینی صفحه یک و دو برای به‌صورت تک‌جهته^۹ و دوجهته^{۱۰} و جنس‌های مختلف بررسی گردیده است. ضخامت هر لایه $t_{ply} = 0.25 \text{ mm}$ است. همچنین تنش برشی در شرایط لایه چینی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی گردیده است. جنس و ضخامت متفاوت برای اتصال چسبی بررسی گردیده است. خصوصیات مکانیکی مواد برای صفحات و چسب در جدول ۱ آورده شده است.



شکل ۳ - کماتش بحرانی برای لایه چینی [0/45/-45/0] در نرم افزار المان محدود

۲-۵- محاسبه تنش برشی چسب

بررسی تنش برشی چسب به منظور عدم جدایش صفحات به هم متصل شده با چسب، قبل از پدیده کماتش الزامی است. برای محاسبه تنش برشی تئوری‌هایی مانند مدل ولکرسن، گلند و رسینر، هارت-اسمیت و اجالوو و ادینوف ارائه گردیده است. در این مقاله از تئوری ولکرسن برای محاسبه تنش برشی چسب استفاده شده است. این روش به عنوان مدل تأخیر برش نیز مطرح شده است که مفهوم برش دیفرانسیلی را معرفی می‌کند. توزیع تنش برشی τ در چسب از رابطه (۳۷) محاسبه می‌گردد [۸].

$$\tau = \frac{N_{x-a} \omega \cosh(\omega x)}{2b \sinh(\frac{\omega l}{2})} + \left(\frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}\right) \left(\frac{\omega l}{2}\right) \frac{\sinh(\omega x)}{\cosh(\frac{\omega l}{2})} \quad (37)$$

t_1 ضخامت قطعه بالایی و t_2 ضخامت قطعه پایینی و t_a ضخامت چسب، b عرض ناحیه اتصال و l طول ناحیه اتصال، E_a مدول چسب می‌شود، G_a مدول برشی چسب، N_x نیروی اعمالی بر واحد طول چسب و مقدار ω به عنوان مشخصه طول برش چسب شناخته می‌شود، واحد آن از جنس معکوس طول است و از رابطه (۳۸) به دست می‌آید.

$$\omega = \sqrt{\frac{G_a}{E_a t_1 t_a} \left(1 + \frac{t_1}{t_2}\right)} \quad (38)$$

با فرض اینکه طول اتصال چسب l به قدری بزرگ باشد که مقدار $\cosh(\omega l) = \sinh(\omega l)$ شود و ضخامت صفحات به هم چسبانده شده برابر باشد ($t_1 = t_2$) می‌توان رابطه (۳۷) را

به صورت رابطه (۳۹) باز نویسی کرد.

$$\tau = \frac{N_{x-a}}{2} \sqrt{\frac{G_a}{E_a t_1 t_a} \left(1 + \frac{t_1}{t_2}\right)} \quad (39)$$

با توجه به مقادیر کماتش بحرانی N_{x-cr} محاسبه شده از رابطه (۳۴) با جایگذاری آن در مقدار N_{x-a} رابطه (۳۹) مقدار تنش بحرانی چسب به دست می‌آید. این مقدار نباید بیشتر از استحکام برشی تسلیم چسب باشد، در غیر این صورت چسب قبل از کماتش صفحات، دچار برش می‌شود. با داشتن استحکام تسلیم چسب، مقدار N_{x-a} از رابطه (۳۹) به دست می‌آید که برای همه شرایط بارگذاری کماتشی با مقدار بار کماتش بحرانی N_{x-cr} بررسی شده است.

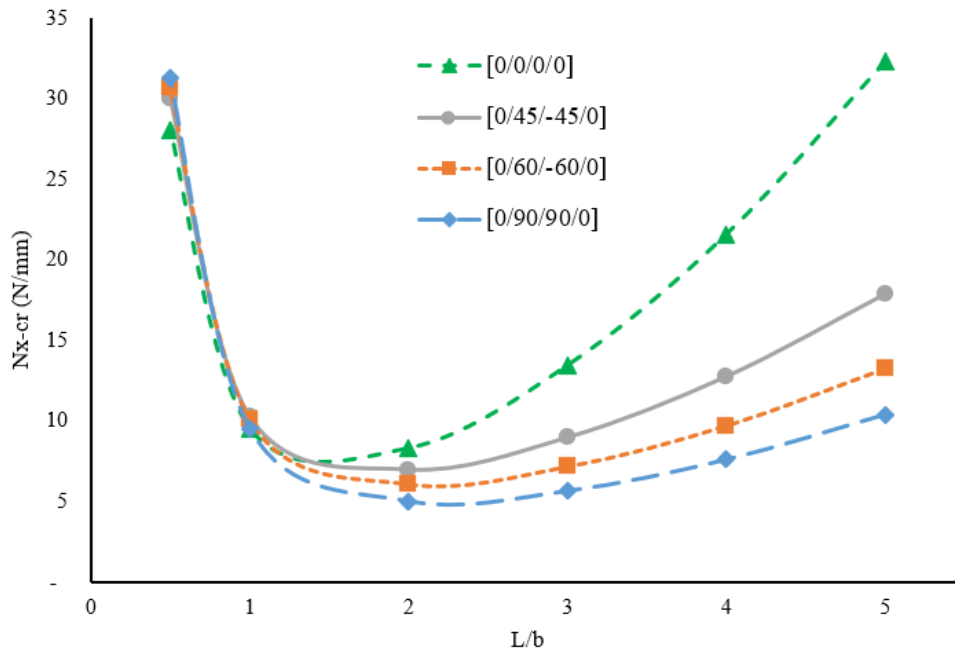
۲-۵- ارائه نتایج

در این قسمت نتایج حل عددی تحقیق حاضر با نتایج المان محدود به دست آمده با استفاده از نرم افزار ABAQUS مقایسه شده است. در این قسمت مقادیر ابعادی صفحات، شرایط مرزی، جنس چسب و صفحات، نوع لایه چینی، مقدار طول همپوشانی چسب و ضخامت چسب برای بار بحرانی کماتش مورد بررسی قرار گرفته است. برای به دست آوردن خصوصیات سفتی چسب از رابطه (۴۰) استفاده می‌شود.

$$K_I = K_{nn} = \frac{E_a}{t_a} \quad K_{II} = K_{ss} = K_{tt} = \frac{G_a}{t_a} \quad (40)$$

جدول ۳ - خصوصیات استحکامی و چسبیدگی چسب اپوکسی برای ضخامت چسب ۰.۱ میلی‌متر

K_I (Mpa/mm)	K_{II} (Mpa/mm)	A (Mpa)	τ_y (Mpa)	τ_f (Mpa)
۴۶۰۰۰	۱۴۰۰۰	۰/۳۶	۳۶/۵	۴۱



شکل ۴ - کماتش بحرانی برای لایه چینی و نسبت ابعادی مختلف از جنس کربن اپوکسی تک جهت

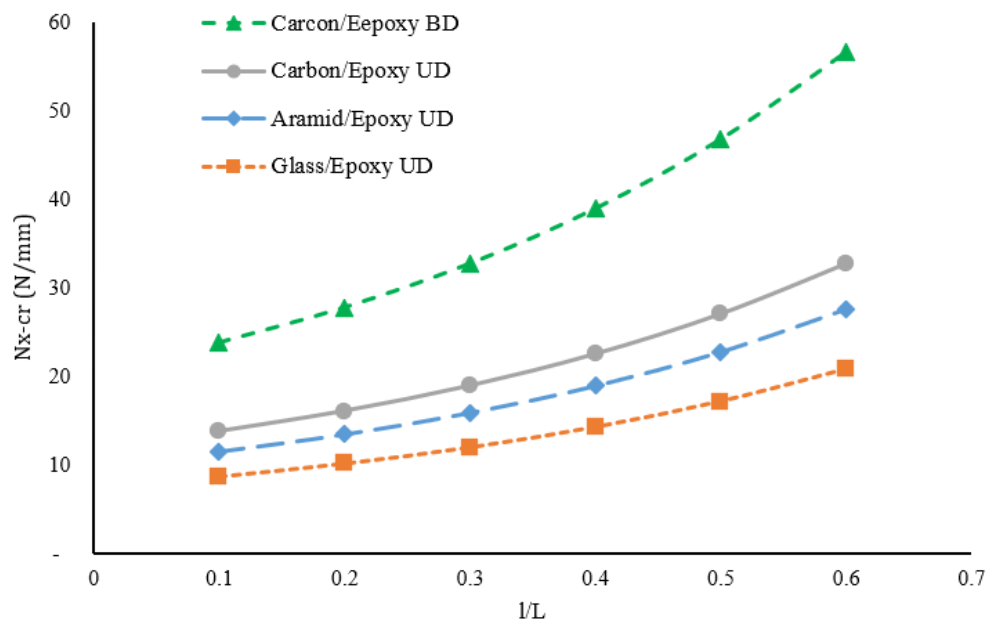
مقدار K_I ضریب سختی نرمال چسب و مقدار K_{II} مقدار ضریب سختی برشی طولی و عرضی چسب، A سطح زیر منحنی تنش - کرنش چسب، τ_y استحکام تسلیم چسب و τ_f استحکام شکست چسب است. این ضرایب به ضخامت چسب وابسته است. مقادیر فوق برای چسب اپوکسی به ضخامت $t_a = 0.1 \text{ mm}$ در جدول ۳ آورده شده است.

مقادیر بار بحرانی کماتش برای لایه چینی مختلف از جنس کربن اپوکسی تک جهت و مقدار همپوشانی ثابت چسب برای شرایط تکیه‌گاهی SSSS برای نسبت طول به عرض مختلف به صورت شکل ۴ به دست می‌آید. برای نسبت ابعادی طول به عرض مقادیر کماتش بحرانی متفاوت می‌باشد. همچنین چون بار به صورت فشاری و در راستای محور X وارد می‌شود، برای لایه چینی صفحاتی که الیاف در راستای نیرو می‌باشد استحکام

کمانشی بالاتری به دست می‌آید کمترین مقدار بار کمانش، بسته به نسبت جانبی ورق (L/b) در مقادیر متفاوتی از m و n ایجاد خواهند شد و لزوماً در مقادیر $m=1$ و $n=1$ ایجاد نمی‌شود. برای ترسیم شکل ۴ تمامی مقادیر بار کمانش برای نسبت جانبی بین ۰.۳ تا ۵ و مقادیر m و n از یک تا پنج بررسی شده است و مقدار کمترین عدد که بیانگر مقدار بار بحرانی کماتش است برای آن لایه چینی در نمودار آورده شده است.

مقادیر بار بحرانی کماتش برای جنس صفحات مختلف با نسبت همپوشانی متفاوت چسب برای شرایط تکیه‌گاهی SSSS به صورت شکل ۵ به دست می‌آید. هرچه مقدار همپوشانی چسب بیشتر باشد مقدار استحکام کمانشی سازه بیشتر است. برای جنس کربن اپوکسی دو جهت مقادیر استحکام کمانشی نسبت به سایر مواد بررسی شده، بیشترین است.

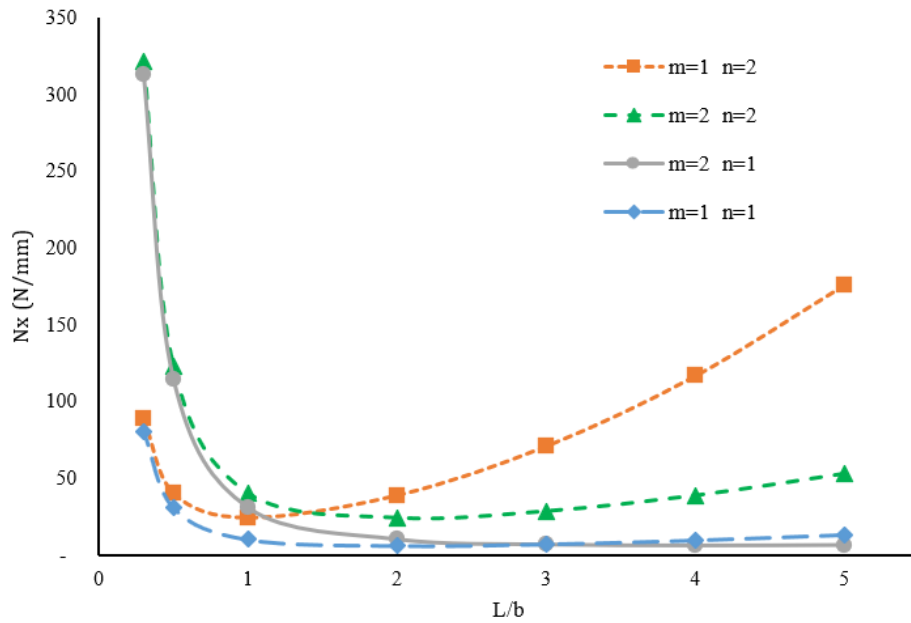
مقادیر بار بحرانی کماتش برای لایه چینی مختلف از جنس کربن اپوکسی تک جهت و مقدار همپوشانی ثابت چسب برای شرایط تکیه‌گاهی SSSS برای نسبت طول به عرض مختلف به صورت شکل ۴ به دست می‌آید. برای نسبت ابعادی طول به عرض مقادیر کماتش بحرانی متفاوت می‌باشد. همچنین چون بار به صورت فشاری و در راستای محور X وارد می‌شود، برای لایه چینی صفحاتی که الیاف در راستای نیرو می‌باشد استحکام



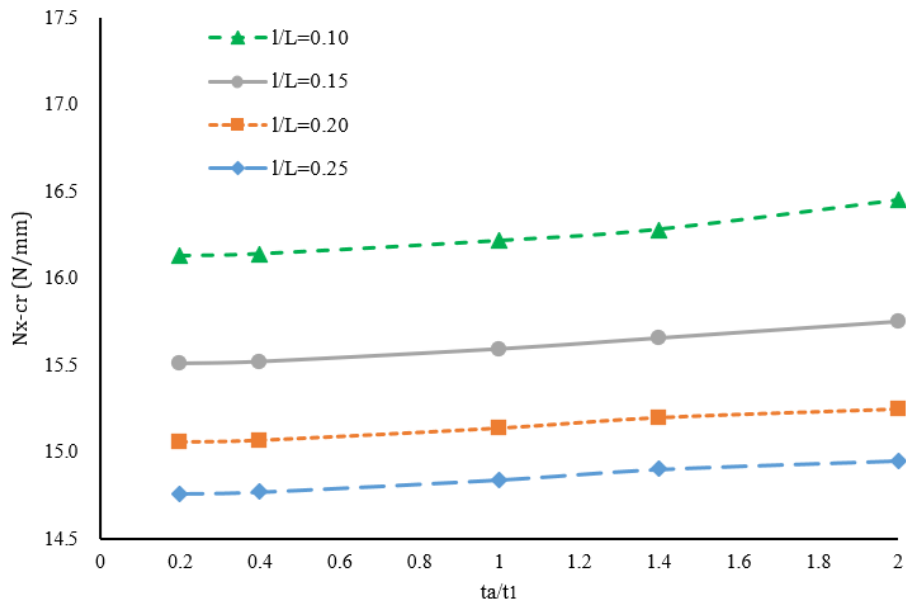
شکل ۵- کماتش بحرانی برای جنس صفحات مختلف با نسبت همپوشانی متفاوت چسب

جدول ۴- مقایسه بار بحرانی صفحات متصل به هم با نسبت طول به عرض متفاوت و شرایط تکیه گاهی SSSS

شکست چسب قبل از کماتش	N_{x-a} (N/mm)	N_{x-cr} (N/mm)	a/b	شرایط مرزی	جنس لایه چینی
بلی	۲۰/۵۸	۳۱/۲۹	۰/۵	SSSS	کربن اپوکسی
خیر	۲۰/۵۸	۹/۵۱	۱	SSSS	
خیر	۲۰/۵۸	۵/۰۳	۲	SSSS	
خیر	۲۰/۵۸	۱۰/۳۸	۵	SSSS	
بلی	۲۰/۵۸	۴۸/۴	۰/۵	SCSF	تک جهته [0/0/0/0]
خیر	۲۰/۵۸	۱۴/۲	۱	SCSF	
بلی	۲۰/۵۸	۵۷/۹	۰/۵	SCSC	
خیر	۲۰/۵۸	۱۵/۲	۱	SCSC	
بلی	۴۱/۸۴	۷۸/۱۴	۰/۵	SSSS	شیشه اپوکسی
خیر	۴۱/۸۴	۱۴/۵۸	۱	SSSS	
بلی	۴۱/۸۴	۵۰/۸۶	۲	SSSS	
بلی	۴۱/۸۴	۱۸۵/۵۲	۵	SSSS	
بلی	۴۱/۸۴	۶۰/۲	۰/۵	SCSF	تک جهته [0/45/-45/0] ₂
خیر	۴۱/۸۴	۱۹/۴	۱	SCSF	
بلی	۴۱/۸۴	۷۹/۷	۰/۵	SCSC	
خیر	۴۱/۸۴	۲۰/۱	۱	SCSC	



شکل ۶ - بار کمانش مودهای مختلف برای جنس کربن اپوکسی تک جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS



شکل ۷ - کمانش بحرانی برای نسبت ضخامت چسب به صفحات با نسبت همپوشانی مختلف چسب

چسب در جدول ۴ آورده شده است.

به منظور بررسی مودهای کمانشی مختلف برای جنس کربن اپوکسی تک جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS مقادیر بار بحرانی برای نسبت‌های مختلف طول به عرض سازه با ناحیه همپوشانی ثابت چسب به صورت شکل ۶ به دست آمده است. در این شکل

مقادیر بار مجاز استحکامی چسب (N_{x-a}) از رابطه (۳۹) به دست می‌آید. این مقادیر بر اساس چسب اپوکسی و استحکام تسلیم مطابق جدول ۳ محاسبه گردیده است. مقادیر به دست آمده برای لایه چینی و جنس صفحات مختلف با نسبت طول به عرض متفاوت و شرایط تکیه‌گاهی SSSS و همپوشانی ثابت

همپوشانی دو صفحه توسط چسب و شرایط مرزی برای نسبت طول به عرض سازه به هم چسبانده شده بررسی گردیده است. برای دو صفحه متصل شده با چسب، عددهای متفاوتی برای مودهای کمانشی فشاری به دست می‌آید. برای اینکه سازه دچار کمانش نشود، مود بحرانی کمانش بررسی می‌گردد. میزان بار وارده به سازه برای نسبت طول به عرض سازه برای مودهای مختلف بررسی گردید. برای مود اول این مقدار بحرانی‌تر است که مقدار استحکام کمانش برای نسبت طول به عرض‌های مختلف، متفاوت است.

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد هر چه مقدار همپوشانی چسب بیشتر باشد استحکام کمانشی سازه افزایش پیدا می‌کند. این افزایش بسته به نوع جنس چسب و صفحات تغییر می‌کند که برای صفحات کربن اپوکسی دو جهته و چسب AV 138 بیشترین مقدار به دست آمده است. با تغییر نسبت طول به عرض مقادیر کمانش بحرانی تغییر می‌کند. این مقادیر برای سازه‌ها برای یک ابعاد مشخص در بحرانی‌ترین حالت می‌باشد. برای طراحی سازه و پل بندی آن با عضوهای طولی و عرضی، با جای ممکن می‌بایست از این ابعاد بحرانی فاصله گرفت تا بتوان سازه‌ای با استحکام کمانش بالاتری در برابر بارهای فشاری طراحی نمود. این نکته مشخص است که برای طراحی بهینه سایر شرایط آن نیز می‌بایست بررسی گردد.

تاثیر مقادیر متفاوت m و n بر بار کمانش بررسی شده است. همانطور که در شکل مشخص است برای مقادیر (L/b) متفاوت، مقادیر بار کمانش متفاوتی حاصل شده است. مقادیر بار بحرانی کمانش در مقادیر $(m=1$ و $n=1)$ و $(m=2$ و $n=1)$ ایجاد می‌شود.

با تغییر ضخامت چسب نسبت به ضخامت صفحات به هم چسبیده، مقدار کمانش بحرانی برای نسبت طول همپوشانی مختلف چسب نسبت به طول کلی سازه برای جنس کربن اپوکسی تک جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS به صورت شکل زیر محاسبه گردیده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله کمانش بحرانی فشاری دو صفحه ارتوتروپیک متصل شده با چسب به یکدیگر، از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته مورد بررسی قرار گرفته است. با به دست آوردن ماتریس سفتی و حل بر مبنای تئوری برشی مرتبه اول برای صفحات با جنس، لایه چینی و شرایط مرزی مختلف به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته نتایج به دست آمده است. بررسی استحکامی چسب با توجه به جنس چسب برای مقایسه با نتایج کمانش بحرانی بررسی گردید. این محاسبات برای تشخیص شکست چسب قبل از پدیده کمانش بررسی شده است. با تغییر پارامترهای زاویه لایه چینی الیاف، جنس صفحات، میزان

واژه‌نامه:

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. Generalized Differential Quadrature Method (GDQM) | 6. Peel |
| 2. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT) | 7. Hamilton's principle |
| 3. Lap-joint | 8. Lagrange |
| 4. Digital Image Correlation (DIC) | 9. Uni-Directional (UD) |
| 5. Classical Plate Theory (CLT) | 10. Bi-Directional Woven (BD) |

مراجع:

1. Yang P. C, Norris C. H., And Stavskys, Y., "Elastic Wave Propagation In Heterogeneous Plates", Solids Structures Pergamon Press Ltd, Vol. 2, PP. 665-684, 1966.
2. Ko, T. C., Lin, C. C., and Chu, R. C., "Vibration of Bounded Laminated Lap- Joint Plates Using Adhesive Interface Elements", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 184, No. 4, pp. 457-583, 1995.

3. Du, H., Liew, K. M., and Lim, M. K., "Generalized Differential Quadrature Method for Buckling Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 122, No.2, 1996.
4. Yuceoglu, U., Toghi, F., and Tekinalp, O., "Free Bending Vibrations of Adhesively Bonded Orthotropic Plates With a Single Lap Joint", *Journal of Vibration and Acoustics*, 1996.
5. Helms, J. E., Li, G., and Pang, S.S., "Buckling Analysis of a Taper-Taper Adhesive-Bonded Composite Joint", *ASME Engineering Technology Conference on Energy*, Houston, TX, 2002.
6. Kouchakzadeh, M. A., *Buckling Analysis of Rectangular Laminated Composite Plates With An Edge Delamination Under Compressive Load*, JAST 2007.
۷. [۷] فتحی محسن، فرهت نیا فاطمه، درويزه منصور، تحليل كمانش ورق‌های مستطیلی ارتوتروپیک و غیر ارتوتروپیک به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، فصلنامه مهندسی مکانیک جامدات، بهار ۱۳۸۷، سال اول، پیش شماره اول
8. Rodríguez, Q. R., Sollero, P., and Rodríguez, M. B., "Stress Analysis And Failure Criteria of Adhesive Bonded Single Lap Joints", *21st International Congress of Mechanical Engineering*, October 2011.
9. Abediokhchi, J., and Kouchakzadeh, M. A., "Shakouri M., Buckling analysis of cross-ply laminated conical panels using GDQ method", *Composites: Part B*, Vol. ?, No. ?, pp. ?, 2013.
10. Shakouri, M., and Kouchakzadeh, M. A., "Stability analysis of joined isotropic conical shells under axial compression", *Thin-Walled Structures*, 2013.
11. Vijaya kumar, R. L., and Bhat, M. R., "Probabilistic Stress Variation Studies On Composite Single Lap-Joint Using Monte Carlo Simulation", *Composite Structures*, Vol. 121, pp. 351–361, 2015.
12. Bakhshi Khanik, H., Hosseini-Hashemi, S., and Nezamabadi, A., "Buckling Analysis Of Nonuniform Nonlocal Strain Gradient Beams Using Generalized Differential Quadrature Method", *Alexandria Engineering Journal*, Vol. ?, No. ?, pp. ?, 2017.
۱۳. طالع زاده لاری علی، رحیمی غلامحسین، تحلیل کمانش استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن ۱۳۹۶، دوره ۱۷، شماره ۱۱، ص ۳۸۵-۳۹۶
14. Poodeh, F., Farhatnia, F., and Reisi, M. "Buckling Analysis of Orthotropic Thin Rectangular Plates Subjected to Nonlinear In-Plane Distributed Loads Using Generalized Differential Quadrature Method", *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, Vol. 19, No. 2, pp. 102-116, 2018.
15. Belkacem, A., "Mechanical Buckling Analysis of Hybrid Laminated Composite Plates Under Different Boundary Conditions", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 66, No. 6, pp. 761-769, 2018.
16. Kadioglu, F., "Mechanical Behaviour of Adhesively Single Lap Joint Under Buckling Conditions", *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. ?, No. ?, pp. ?, 2019.
17. Kadioglu, F., "Effects of Compressive Applied Load on the Adhesive Single Lap Joint with Different Parameters", *The Journal of Adhesion*, Vol. ?, No. ?, pp. ?, 2020.
18. Ramezani, F., Ayatollahi, M. R., Akhavan-Safar, A., da Silva, L. F. M., "A comprehensive experimental study on bi-adhesive single lap joints using DIC technique", *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. ?, No. ?, pp. ?, 2020.
19. Kouchakzadeh, M. M. A., Gholami, P., Shakouri, M., and Noghabi, M., "Buckling Analysis of Stiffened Cross-Ply Laminated Conical Shells under Axial Compression Using Generalized Differential Quadrature Method", *AUT J. Mech. Eng.*, Vol. 5, No. 4, pp. 535-552, 2021.
20. Marchione, F., "Analytical Stress Analysis in Single-Lap Adhesive Joints under Buckling Loads", *International Journal of Engineering Transactions B*, Vol. 34, No. 02, pp. 313-318, 2021.
۲۱. [۲۱] نجات بخش حسین، قارایی امین، ربیعان نجف‌آبادی حمید، ایروانی علی، بررسی اثر سختی خمشی تکیه‌گاهی بر نیروی بحرانی کمانش فشاری صفحات ارتوتروپیک در سازه هواپیماهای کامپوزیت، AERO2020
22. Ventsel, E., and Krauthammer, T., *Thin Plates & Shells Theory, Analysis & Applications*, CRC Press, 2001.
23. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates And Shells*, 2th ed, CRC Press, 2004.
24. Kollar, L., and Springer, G., *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge Univ. Press, 2003.
۲۵. [۲۵] افشاری حسن، روش تفاضلات مربعی در مسائل مهندسی مکانیک، انتشارات پیش اندیشه، ۱۳۹۸.
26. Meskini, M., and Ghasemi, A. R., "Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Adhesive Joints with Conical Composite Shell Adherends", *Journal of Vibration and Control*, Vol. ?, No. ?, pp. ?, 2022.