JOURNAL OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING

Journal of Computational Methods in Engineering

Journal homepage: https://jcme.iut.ac.ir/

ISSN: 2228-7698 EISSN: 2423-5741

Original Article

Buckling analysis of orthotropic rectangular plates with adhesive connection by generalized differential quadrature method

Hossein Nejatbakhsh, Ahmad Reza Ghasemi* and Saeid Amir

Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract: Orthotropic plates used in composite structures are subject to local buckling, including compressive buckling. In the process of designing and building most large structures or instruments with complex geometry, joints in the structure are unavoidable. Today, adhesive joints are widely used in connecting composite structures due to some advantages over mechanical joints. In this article, the buckling phenomenon of orthotropic rectangular multilayer plates connected with glue has been investigated, and the force effects of the glue layer under buckling loading conditions have been studied. In order to obtain the critical buckling loads under different boundary conditions, the generalized differential quadrature method (GDQM) has been used. Buckling analysis is presented based on first-order shear deformation theory (FSDT) for carbon/epoxy, glass/epoxy and Kevlar/epoxy composite materials with different porcelain layers. The effect of thickness and type of the adhesive as a bonding layer has been investigated. In plates made of a type of porcelain layer, two-way carbon epoxy plates show higher buckling strength, and in general, the higher the ratio of length to width of the plates is, the higher the buckling strength will be. In the connections, the obtained results have been compared with the results from the finite element analysis in ABAQUS commercial software.

Keywords: Compressive buckling, Composite plates, Lap- joint, Adhesive joint, GDQM.

Received: Dec. 26, 2023; Revised: Jun. 09, 2024; Accepted: Jun. 18, 2024; Published Online: Mar. 11, 2025.

* Corresponding Author: Ghasemi@Kashanu.ac.ir

How to Cite: Nejatbakhsh Hossein, Ghasemi Ahmad Reza and Amir Saeid, Buckling analysis of orthotropic rectangular plates with adhesive connection by generalized differential quadrature method, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 43(2), 29-49; doi.org/10.47176/jcme.43.2.1022.

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۳، شماره ۲، ۱۴۰۳، ص. ۴۹-۲۹، DOI: 10.47176/jcme.43.2.1022

نشریه علمی - پژوهشی روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی

صفحه خانگی نشریه: https://jcme.iut.ac.ir/

شاپا: ۷۶۹۸-۲۲۲۸ شاپا الکترونیکی: ۵۷۴۱-۲۴۲۳

مقاله پژوهشی

تحلیل کمانش صفحات مستطیلی غیرهمسانگرد با اتصال چسبی به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته

حسین نجات بخش، احمدرضا قاسمی* و سعید امیر

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده– صفحات غیرهمسانگرد[1] مورد استفاده در سازه‌های کامپوزیتی در معرض کمانش‌های موضعی ازجمله کمانش فشاری قرار دارند. در فرآیند طراحی و ساخت اغلب سازه‌های بزرگ و یا سازه‌ها با هندسه پیچیده، اتصالات در سازه گریزناپذیر است. امروزه اتصالات چسبی به دلیل برخی مزیت‌ها نسبت به اتصالات مکانیکی کاربرد گسترده‌ای در اتصال سازه‌های کامپوزیتی پیدا کرده است. در این مقاله به بررسی پدیده کمانش صفحات چندلایه مستطیلی غیرهمسانگرد متصل شده با چسب پرداخته شده است و اثرات نیرویی لایه چسب تحت شرایط بارگذاری کمانشی بررسی شده است. به منظور به دست آوردن بارهای بحرانی کمانش تحت شرایط مرزی مختلف از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته[2] استفاده شده است. تحلیل کمانش بر مبنای روابط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌اول[3] برای مواد کامپوزیت کربن/اپوکسی، شیشه/اپوکسی و کولار/اپوکسی با لایه چینی‌های مختلف ارائه شده است. اثر ضخامت و جنس چسب به‌عنوان لایه اتصال بررسی شده است. در صفحات از یک نوع لایه چینی، صفحات از جنس کربن اپوکسی دوجهته استحکام کمانشی بالاتری را از خود نشان می‌دهند و به‌صورت کلی هر چه نسبت طول به عرض صفحات بیشتر شود، استحکام کمانشی افزایش می‌یابد. در اتصالات با نتایج به‌دست‌آمده با استفاده از روش آنالیز اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس[4] مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: کمانش فشاری، صفحات کامپوزیتی، اتصال لب‌به‌لب[5]، اتصال چسبی، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته.

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۱۰/۰۵، بازنگری: ۱۴۰۳/۰۳/۲۰، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۲۹، اولین انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۲۱

*: نویسنده مسئول، رایانامه: Ghasemi@Kashanu.ac.ir

- **فهرست علائم**

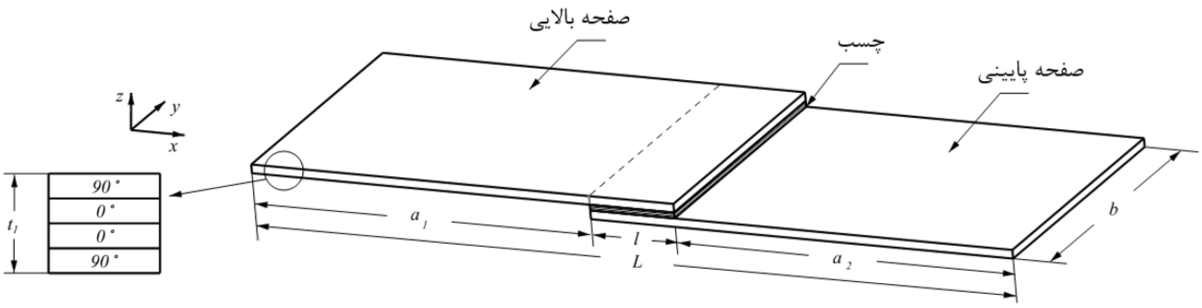
u_i^0, v_i^0, w_i^0	جابجایی صفحات میانی	Q_{ix}, Q_{iy}	نیروهای برشی
$\varepsilon_{ixx}^0, \varepsilon_{iyy}^0$	کرنش صفحات میانی	A_{jk}^i	ماتریس سفتی کششی
$\gamma_{ixy}^0, \gamma_{ixz}^0, \gamma_{iyz}^0$	کرنش صفحات میانی	B_{jk}^i	ماتریس کوپلینگ
$\kappa_{ixx}, \kappa_{iyy}, \kappa_{ixy}$	انحنا	D_{jk}^i	ماتریس سفتی خمشی
ϕ_{ix}, ϕ_{iy}	چرخش	$\sigma_{xz}^c, \sigma_{xz}^f$	تنش برشی عرضی
$N_{ixx}, N_{iyy}, N_{ixy}$	نیروهای منتجه	U	انرژی کرنشی
$M_{ixx}, M_{iyy}, M_{ixy}$	ممان‌های منتجه	V	کار مجازی
$\bar{Q}_{jk}$	ضرایب ماتریس سفتی	S	شرایط مرزی ساده
C	شرایط مرزی گیردار	F	شرایط مرزی آزاد
N	تعداد نقاط شبکه	$[K]$	ماتریس سفتی
$[P]$	ماتریس نیروی خارجی	N_{cr}	بار بحرانی کمانش
K_s	ضریب تصحیح برش	t_1, t_2	ضخامت صفحات
E_x	مدول الاستیک طولی	E_y	مدول الاستیک عرضی
E_s	مدول الاستیک برشی	ω	مشخصه طول برش چسب
K_I	ضریب سختی نرمال چسب	K_{II}	ضریب سختی برشی چسب

۱- مقدمه

استفاده از سازه‌های کامپوزیتی به دلیل نسبت استحکام به وزن مطلوب و سهولت ساخت به امری ضروری در صنایع هوایی و مدرن تبدیل شده است. به دلیل هزینه‌های ساخت سازه‌ها با هندسه پیچیده، استفاده از سازه‌های کامپوزیتی کاملاً یکپارچه متداول نیست. به همین دلیل استفاده از اتصالات مکانیکی و یا اتصالات چسبی در سازه‌های پیچیده کامپوزیتی گریزناپذیر است. اتصال چسبی به دلیل ویژگی‌های مکانیکی مطلوب ازجمله وزن کمتر، توزیع تنش نسبتاً یکنواخت و سهولت اجرا در اتصالات کامپوزیتی سازه‌ها نقش گسترده‌ای دارند. در سال‌های اخیر مطالعات زیادی در زمینه تحلیل تنش و کمانش صفحات همسانگرد[۶] و غیرهمسانگرد و یا بررسی استحکام چسب بین صفحات به هم متصل شده، انجام شده است.

یانگ و همکاران در سال ۱۹۶۶ روابط حاکم بر صفحات ناهمگن به همراه تغییر شکل‌های برشی عرضی و اینرسی دورانی را به‌صورت سه‌بعدی برای صفحات غیرهمسانگرد و همسانگرد با لایه‌های متقارن ارائه کردند [۱]. کو و همکاران در سال ۱۹۹۳ ارتعاش صفحات چندلایه چسبانده شده لب‌به‌لب را بررسی کردند. در این تحقیق صفحات چندلایه با اتصال لب‌به‌لب با نتایج مربوط به صفحات بدون اتصال مقایسه شدند [۲]. دوو و همکاران در سال ۱۹۹۶ با روش عددی کارآمد و بسیار دقیق محاسباتی به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای تحلیل کمانش الاستیک صفحات و ستون‌ها ارائه کردند [۳]. یوچ اوغلو و همکاران نیز در سال ۱۹۹۶ روی ارتعاشات آزاد خمشی صفحات مستطیلی غیرهمسانگرد چسبیده شده به هم، به‌صورت اتصال تک لبه‌ای مطالعه کردند و تأثیر تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی در صفحات را بررسی کردند [۴]. هلمز و همکاران در سال ۲۰۲۲ به تجزیه و تحلیل کمانش یک اتصال کامپوزیتی با چسب مورب باریک پرداختند. آن‌ها یک مدل تحلیلی از رفتار یک اتصال کامپوزیت مورب چسب تحت بارگذاری فشاری محوری با استفاده از روش ریتز بر اساس تئوری تیر چندلایه انجام دادند و بار بحرانی کمانش براثر تغییر زاویه چسب، ضخامت چسب و مدول چسب را به‌صورت تحلیلی بررسی کردند [۵]. کوچک زاده در سال ۲۰۰۷ به تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی چندلایه مستطیلی با شرایط جدایش لایه در لبه، تحت بارگذاری فشاری در صفحه با استفاده از روش اجزای محدود

پرداخت. در این مطالعه به مقایسه روش تحلیل در پیش‌بینی بار کمانش و حالت کمانش با نتایج تجربی و تحلیلی موجود در مقالات و تأثیر ابعاد و شرایط مرزی بر بار کمانش پرداخته شده است [۶]. فتاحی و همکاران در سال ۲۰۰۸ به مطالعه کمانش صفحات مستطیلی غیرهمسانگرد تحت بارهای مختلف پرداختند. معادلات کمانش حاکم برای صفحات همسانگرد از روش ریلی- ریتز با استفاده روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته انجام و مقادیر ویژه به دست آوردند و با نتایج حل اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار انسیس[7] مقایسه کردند [۷]. رودریگز و همکاران در سال ۲۰۱۱ تجزیه و تحلیل تنش و معیارهای خرابی اتصالات تک‌لبه چسبی را بررسی کردند. در این تحقیق روش‌های فولکرسن، گولاند و رایسنر، هارت اسمیت و اوجالوو و ایدینوف بررسی و با استفاده از روش اجزای محدود مقایسه شد و معیارهای اصلی شکست بررسی گردید [۸]. عابدی و کوچک زاده در سال ۲۰۱۳ به بررسی کمانش دو پوسته مخروطی همسانگرد به هم متصل تحت فشار محوری و شرایط مرزی ساده پرداختند. معادلات حاکم با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای به دست آوردن بارهای بحرانی کمانش دقیق استفاده شده است[۹]. کوچک زاده و شکوری در سال ۲۰۱۳ به مطالعه رفتار ارتعاشی دو پوسته مخروطی چندلایه متصل‌به‌هم و بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های حالت پرداختند. در این مطالعه پوسته‌های مخروطی به هم پیوسته را به‌عنوان حالت کلی پوسته‌های استوانه‌ای- مخروطی به هم پیوسته، ورق‌های استوانه‌ای یا مخروطی متصل، پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل با ضخامت‌های پلکانی و همچنین صفحات حلقوی در نظر گرفته شد. در این مطالعه با به دست آوردن معادلات حاکم از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای حل آن استفاده گردید [۱۰]. ویجایا کومار و همکاران در سال ۲۰۱۴ به مطالعه تغییرات تنش بر روی اتصال کامپوزیت لب‌به‌لب با استفاده از روش مونت‌کارلو پرداختند. آن‌ها با روش اجزای محدود و روش تصادفی مونت‌کارلو، اتصالات صفحات از جنس کامپوزیت را بررسی کردند. سطوح با استفاده از روش برهم‌نگاری تصاویر دیجیتال[8] بررسی گردید و با مدل اجزای محدود مقایسه شد. آن‌ها نشان دادند مدول و ضخامت چسب بر حداکثر تنش برشی چسب تأثیر دارد [۱۱]. بخشی خانیکی و همکاران در سال ۲۰۱۷ بر روی آنالیز کمانش تیرهای غیریکنواخت به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته پرداخت. در این تحقیق معادله حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همیلتون[9] برای تیرهای گرادیان کرنش غیرمحلی غیریکنواخت ارائه شده و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر حل شده است و بارهای کمانش بحرانی به‌دست آمده است [۱۲]. طالع‌زاده و همکاران در سال ۲۰۱۸ به بررسی کمانش محوری یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌اول پرداختند. معادلات حاکم در دو جهت طولی و محیطی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته حل شده و با مدل اجزای محدود آباکوس مقایسه شده است [۱۳]. پوده و همکاران در سال ۲۰۱۸ به مطالعه کمانش صفحات مستطیلی غیرهمسانگرد تحت انواع بارگذاری غیرخطی پرداختند. آن‌ها معادلات کمانش حاکم برای یک صفحه همسانگرد را با استفاده از معادلات تشکیل‌دهنده مواد غیرهمسانگرد و به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته استفاده کردند و مقادیر ویژه را برای نسبت ابعاد صفحه، تعداد لایه‌ها و برای نوع شرایط مرزی مختلف بررسی کردند [۱۴]. بلکاسم در سال ۲۰۱۸ به بررسی رفتار کمانش در صفحات کامپوزیتی چندلایه هیبریدی کربن/شیشه با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی پرداخت و بار کمانش بحرانی تحت شرایط مرزی مختلف بررسی کرد. نتایج حاصل با نظریه‌های مرتبه‌اول و سایر نظریه‌های مرتبه بالاتر از مقالات مقایسه شد [۱۵]. اوغلو و همکاران در سال ۲۰۱۹ رفتار مکانیکی اتصال لب‌به‌لب چسبی صفحات همسانگرد تحت نیروی فشاری را بررسی کردند. آن‌ها اتصالات چسبی با ضخامت مختلف را برای اتصال لب‌به‌لب و رفتار شرایط کمانش شبه- استاتیکی بررسی کردند [۱۶]. اوغلو و همکاران در سال ۲۰۲۰ اثرات بار فشاری بر روی اتصال تک لبه چسب با پارامترهای مختلف را بررسی کردند.



شکل ۱ – صفحات کامپوزیتی با اتصال چسبی لب‌به‌لب

آن‌ها استحکام و قابلیت جذب انرژی اتصالات لب‌به‌لب تحت بار کمانش را بررسی کردند [۱۷]. رمضانی و همکاران در سال ۲۰۲۰ مطالعه تجربی جامع بر روی اتصالات تک لبه دو چسب با استفاده از روش برهمنگاری تصاویر دیجیتال پرداختند. آن‌ها پارامترهای مختلف مانند ضخامت چسب، نسبت ضخامت و طول چسب را بررسی کردند [۱۸]. کوچک‌زاده و همکاران در سال ۲۰۲۱ به بررسی تعیین بار کمانش کلی پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی تحت فشار محوری پرداختند. در این مطالعه با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه‌اول و اصل حداقل انرژی پتانسیل معادلات تعادل به دست آمده و به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته بار بحرانی کمانش به دست می‌آید [۱۹]. مارکیونه در سال ۲۰۲۱ به تحلیل تنش در اتصالات چسب لب‌به‌لب تحت بارهای فشاری پرداخت. ایشان به مطالعه عددی توزیع تنش در لایه چسب تحت شرایط کمانش فشاری با مدل‌سازی در نرم‌افزار انسیس پرداخت [۲۰]. نجات‌بخش و همکاران در سال ۲۰۲۲ به بررسی اثر سختی خمشی تکیه‌گاهی بر نیروی بحرانی کمانش فشاری در صفحات غیرهمسانگرد پرداختند. آن‌ها با توجه به سختی خمشی تکیه‌گاهی در شرایط مرزی مختلف، گراف‌هایی برای محاسبه کمانش بحرانی فشاری در صفحات غیرهمسانگرد ارائه کردند [۲۱].

در مقاله حاضر به بررسی مقادیر کمانش بحرانی برای صفحات غیرهمسانگرد اتصال لب‌به‌لب با اتصال چسبی با شرایط مرزی متفاوت تحت نیروی فشاری پرداخته شده است. بررسی کمانش اتصال لب‌به‌لب با طول هم‌پوشانی و ضخامت متفاوت چسب انجام شده است. همچنین کمانش صفحات از جنس مختلف با لایه چینی‌های مختلف بررسی گردیده است. مقادیر به کمک آنالیز اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس بررسی گردیده است.

۲– معادلات حاکم

در این قسمت معادلات حاکم بر صفحات مستطیلی با اتصال لب‌به‌لب ارائه شده است. تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی با اتصال چسبی مطابق با فرضیات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه–اول در نظر گرفته شده است. اتصال دو صفحه مستطیلی غیرهمسانگرد با استفاده از لایه چسب با اتصال لب‌به‌لب در شکل ۱ نشان داده شده است. اتصال لب‌به‌لب بین صفحه بالایی و صفحه پایینی است. مقدار b عرض صفحات و a_1 و a_2 به ترتیب طول بدون اتصال صفحات بالایی و پایینی است که در این مقاله یکسان در نظر گرفته شده است. l مقدار طول چسب اتصال دو صفحه و L طول صفحات متصل‌به‌هم هستند.

مؤلفه‌های جابجایی شامل u ، v و w به ترتیب در راستای x و y و z است. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌اول، همانند فرضیات تئوری ورق‌های کلاسیک[۹] (تئوری کیرشهوف)، دو فرض معتبر است. ۱– خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل هم مستقیم باقی می‌مانند و ۲– خطوط مستقیم عمود بر صفحه میانی، تغییر طول نمی‌دهند. در تئوری برشی مرتبه‌اول، برخلاف فرضیات تئوری کلاسیک، صفحات عمود بر سطح میانی، بعد از تغییر شکل دیگر بر سطح میانی عمود باقی

نمی‌مانند در نتیجه با در نظر گرفتن این تئوری، مؤلفه‌های کرنش نرمال ε_x و ε_y کرنش برشی γ_{xy} و γ_{xz} و γ_{yz} وجود داشته و تنها کرنش نرمال ε_z صفر است. بر اساس تئوری برشی مرتبه‌اول، جابجایی‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند[۲].

$$u_i = u_i^0 + z\,\phi_{ix} \quad v_i = v_i^0 + z\phi_{iy} \quad w_i = w_i^0 \tag{۱}$$

در رابطه فوق برای صفحه یک $i = 1$ و برای صفحه دو $i =$ 2 است. z فاصله هر نقطه دلخواه از صفحه میانی صفحه است. مقادیر ε_{ix}^0 و ε_{iy}^0 و γ_{ixy}^0 و γ_{ixz}^0 و γ_{iyz}^0 کرنش‌های مرتبط با میدان جابجایی صفحه میانی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲].

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ixx}^0 &= \frac{\partial u_i^0}{\partial x}\\
\varepsilon_{iyy}^0 &= \frac{\partial v_i^0}{\partial y}\\
\gamma_{ixy}^0 &= \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x}\\
\gamma_{ixz}^0 &= \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix}\\
\gamma_{iyz}^0 &= \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy}
\end{aligned} \tag{۲}$$

همچنین κ_{ix} و κ_{iy} و κ_{ixy} به ترتیب بیانگر انحناء طولی، عرضی و برشی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱].

$$\begin{aligned}
\kappa_{ixx} &= \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\\
\kappa_{iyy} &= \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\\
\kappa_{ixy} &= \frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}
\end{aligned} \tag{۳}$$

با توجه به روابط کرنش انحنا کرنش طولی، عرضی و برشی به‌صورت رابطه (۴) تعریف می‌شوند [۲].

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ixx} &= \varepsilon_{ixx}^0 + z\kappa_{ixx} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x} + z\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\\
\varepsilon_{iyy} &= \varepsilon_{iyy}^0 + z\kappa_{iyy} = \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + z\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\\
\gamma_{ixy} &= \gamma_{ixy}^0 + z\kappa_{ixy}\\
&= \frac{\partial u_i^0}{\partial y} + \frac{\partial v_i^0}{\partial x}\\
&\quad + z\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}\right)\\
\gamma_{ixz} &= \gamma_{ixz}^0 = \frac{\partial w_i^0}{\partial x} + \phi_{ix}\\
\gamma_{iyz} &= \gamma_{iyz}^0 = \frac{\partial w_i^0}{\partial y} + \phi_{iy}
\end{aligned} \tag{۴}$$

منتجه‌های تنش حاصل از ممان خمشی و تنش‌های برشی عرضی به‌صورت رابطه (۵) تعریف می‌شوند [۲۳].

$$\begin{aligned}
N_{ixx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ixx} dz & M_{ixx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{ixx} dz\\
N_{iyy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{iyy} dz & M_{iyy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{iyy} dz\\
N_{ixy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ixy} dz & M_{ixy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{ixy} dz\\
Q_{ix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{ixz} dz & h_1 &= \frac{-t_1}{2}\\
Q_{iy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{iyz} dz & h_2 &= \frac{-t_2}{2}
\end{aligned} \tag{۵}$$

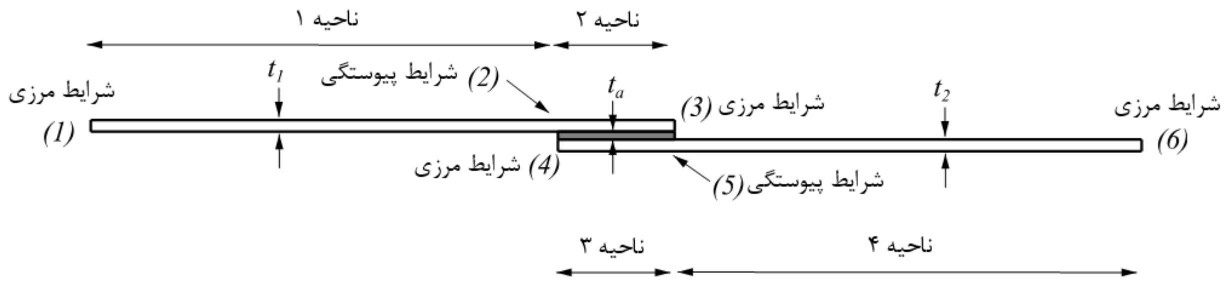
t_1 و t_2 به ترتیب ضخامت صفحات بالایی و پایینی است. بر اساس روابط تنش-کرنش درون صفحه‌ای و روابط (۵) و (۴) رابطه (۶) به دست می‌آید [۲۳].

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} N_{ixx}\\ N_{iyy}\\ N_{ixy}\\ M_{ixx}\\ M_{iyy}\\ M_{ixy}\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
A_{11}^i & A_{12}^i & A_{16}^i & B_{11}^i & B_{12}^i & B_{16}^i\\
A_{12}^i & A_{22}^i & A_{26}^i & B_{12}^i & B_{22}^i & B_{26}^i\\
A_{16}^i & A_{26}^i & A_{66}^i & B_{16}^i & B_{26}^i & B_{66}^i\\
B_{11}^i & B_{12}^i & B_{16}^i & D_{11}^i & D_{12}^i & D_{16}^i\\
B_{12}^i & B_{22}^i & B_{26}^i & D_{12}^i & D_{22}^i & D_{26}^i\\
B_{16}^i & B_{26}^i & B_{66}^i & D_{16}^i & D_{26}^i & D_{66}^i
\end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \varepsilon_{ixx}^0\\ \varepsilon_{iyy}^0\\ \gamma_{ixy}^0\\ \kappa_{ixx}\\ \kappa_{iyy}\\ \kappa_{ixy}\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix} Q_{ix}\\ Q_{iy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^i & A_{45}^i\\ A_{45}^i & A_{55}^i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_{ixz}\\ \gamma_{iyz}\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۶}$$

که در این روابط مقادیر A_{jk}^i و B_{jk}^i و D_{jk}^i به‌صورت روابط (۷) تعریف می‌شود [۲۳].

$$\begin{aligned}
A_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} \bar{Q}_{jk}^{im}\, dz \qquad j,k = 1,2,6\\
B_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} z.\bar{Q}_{jk}^{im}\, dz \qquad j,k = 1,2,6\\
D_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} z^2.\bar{Q}_{jk}^{im}\, dz \qquad j,k = 1,2,6\\
A_{jk}^i &= \sum_{m=1}^{n_i} \int_{z_{m-1}}^{z_m} K_s.\bar{Q}_{jk}^{im}\, dz \qquad j,k = 4,5\\
K_s &= \frac{5}{6}
\end{aligned} \tag{۷}$$

که z_m و z_{m-1} نشان دهنده فواصل اندازه‌گیری شده از صفحه



شکل ۲ –شرایط مرزی در اتصال دو صفحه مستطیلی با اتصال چسبی

میانی صفحه چندلایه تا سطوح پایین و بالای لایه m ام است و مقدار $\bar{Q}_{jk}^{im}$ نیز ضرایب ماتریس سختی لایه m ام است که برای صفحه یک $i = 1$ و برای صفحه دو $i = 2$ است. بر اساس فرضیات تئوری برشی مرتبه‌اول کرنش‌های برشی عرضی در ضخامت صفحات ثابت فرض می‌شوند، بنابراین تنش‌های برشی عرضی نیز ثابت خواهند بود. بر اساس معادلات تعادل، تنش برشی عرضی در ضخامت صفحه سهموی است. این اختلاف بین حالت تنش واقعی و حالت تنش ثابت تئوری برشی مرتبه‌اول، نیروی برشی عرضی در روابط انرژی، توسط ضریب تصحیح برشی K_s تصحیح می‌شود. توزیع تنش برشی واقعی برای مقطع مستطیلی با عرض b و ارتفاع h و تنش برشی عرضی در تئوری برشی مرتبه‌اول به‌صورت زیر است [۲۳].

$$\sigma_{xz}^{c} = \frac{3Q_0}{2bh}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] \qquad \frac{-h}{2} \le z \le \frac{h}{2} \qquad (۸)$$
$$\sigma_{xz}^{f} = \frac{Q_0}{bh}$$

که در آن Q_0 بار عرضی و σ_{xz}^{f} تنش برشی عرضی در تئوری برشی مرتبه‌اول و σ_{xz}^{c} توزیع تنش برشی واقعی است. انرژی کرنش ناشی از تنش‌های عرضی در دو حالت به‌صورت رابطه (۹) است [۲۳].

$$U_s^c = \frac{1}{2G_{13}}\int_A (\sigma_{xz}^c)^2\, dA = \frac{3{Q_0}^2}{5G_{13}bh} \qquad (۹)$$
$$U_s^f = \frac{1}{2G_{13}}\int_A \left(\sigma_{xz}^f\right)^2 dA = \frac{{Q_0}^2}{2G_{13}bh}$$

K_s ضریب تصحیح برشی از نسبت U_s^f به U_s^c به دست می‌آید که به‌طورکلی به هندسه و خواص مواد صفحات بستگی دارد که برای مقطع مستطیلی با خواص مکانیکی یکسان برابر $5/6$ است.

$$K_s = \frac{U_s^f}{U_s^c} = \frac{\frac{{Q_0}^2}{2G_{13}bh}}{\frac{3{Q_0}^2}{5G_{13}bh}} = \frac{5}{6} \qquad (۱۰)$$

با توجه به شرایط لایه چینی و خصوصیات مواد به‌کاررفته در صفحات مقادیر ماتریس [A]،[B] و[D] به دست می‌آید. $\bar{Q}_{jk}$ ضرایب ماتریس سفتی به‌صورت روابط (۱۱) تعریف می‌شوند:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + Q_{22}n^4 + 2(Q_{12}+2Q_{66})m^2n^2$$
$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4+n^2)$$
$$\bar{Q}_{22} = (Q_{11}n^4 + Q_{22}m^4 + 2(Q_{12}+2Q_{66})m^2n^2$$
$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})m^3n - (Q_{22}-Q_{12} - 2Q_{66})mn^3$$
$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})mn^3 - (Q_{22}-Q_{12} - 2Q_{66})m^3n$$
$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4+n^4)$$
$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \quad ,\bar{Q}_{55} = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2 \qquad (۱۱)$$
$$\bar{Q}_{45} = -Q_{44}mn + Q_{55}mn \quad ,\bar{Q}_{54} = Q_{44}mn - Q_{55}mn$$
$$Q_{11} = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}\ ,Q_{22} = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}\ ,Q_{12} = \frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y}$$
$$Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{66} = E_s, m = cos(\theta)\,, n = sin\,(\theta)$$

در این رابطه θ نشان‌دهنده زاویه لایه‌های کامپوزیت، E_x مدول طولی لایه، E_y مدول عرضی لایه، E_s مدول برشی لایه، ν_x ضریب پواسون طولی لایه و ν_y ضریب پواسون عرضی لایه

است. شرایط مرزی در اتصال دو صفحه مستطیلی در شکل ۲ آورده شده است.

در این شکل t_a ضخامت چسب و t_1 ضخامت صفحه بالایی و t_2 ضخامت صفحه پایینی است و شرایط مرزی اتصال دو صفحه در ابتدا و انتهای سازه و همچنین در ابتدا و انتهای طول همپوشانی نشان داده شده است. ابتدا و انتهای سازه با شرایط مرزی مختلف و در ابتدا و انتهای طول همپوشانی شرایط مرزی آزاد است. همچنین با توجه به نوع اتصال، سازه به چهار ناحیه تقسیم شده است. ناحیه ۱ و ۴ نشان‌دهنده صفحه مستطیلی کامپوزیتی بوده و ناحیه ۲ و ۳ نشان‌دهنده دو صفحه مستطیلی بوده که با یکدیگر با اتصال چسبی متصل شده‌اند. نقاط اتصال ۲ و ۵ شرایط پیوستگی بین صفحات برقرار است. برای ناحیه اتصال چسب فرضیات این مسئله بر مبنای فرضیات تئوری برشی مرتبه‌اول همانند فرضیات تئوری ورق‌های کلاسیک، در این مسئله به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود. ۱- تغییرشکل‌ها کوچک است و همه مواد تشکیل دهنده الاستیک خطی هستند ۲- در ناحیه اتصال چسب، مدول نرمال عرضی بسیار پایین است، به‌طوری که تغییر شکل نرمال عرضی صفحات به هم چسبیده شده، در مقابل با چسب، ناچیز است ۳- چسب حالت تنش صفحه‌ای است و مقادیر تنش $\sigma_{ax} = \sigma_{ay} = \tau_{axy} = 0$ است. زیر نویس a برای چسب استفاده می‌شود ۴- تنش‌های جداکننده[11] و تنش برشی در امتداد ضخامت در لایه چسب یکنواخت فرض شده است ۵- از تنش‌های حرارتی در صفحات کامپوزیتی صرفه نظر گردیده و تغییری در میزان رطوبت رخ نمی‌دهد.

معادلات تعادل برای هر قسمت به دست می‌آید. معادلات تعادل بیان شده برحسب جابجایی در ادامه ارائه شده است و با توجه به فرضیات ۳ و ۴ تنها سه مؤلفه تنش وجود دارد. مطابق قانون هوک سه‌بعدی، روابط تنش-کرنش و مؤلفه‌های کرنش مربوط به چسب از روابط (۱۲) به دست می‌آید [2].

$$\begin{aligned} \sigma_{az} &= E_a.\varepsilon_{az}(x,y,t) \\ \tau_{ayz} &= G_a.\gamma_{ayz}(x,y,t) \\ \tau_{axz} &= G_a.\gamma_{axz}(x,y,t) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

E_a مدول یانگ چسب و G_a مدول برشی چسب است. همچنین روابط کرنش جابجایی، مطابق روابط (۱۳) در زیر آورده شده است که با توجه به فرضیات تئوری برشی مرتبه‌اول تنها سه مؤلفه در آن وجود دارد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{az} &= \frac{\partial w_a}{\partial z} \\ \gamma_{axz} &= \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w_a}{\partial x} \\ \gamma_{ayz} &= \frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial w_a}{\partial y} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

مطابق معادلات تعادل و فرض تقارن تانسور تنش و نیروهای حجمی صفر، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tau_{axy} &= \tau_{ayx} \\ \tau_{axz} &= \tau_{azx} \\ \tau_{ayz} &= \tau_{azy} \end{aligned} \tag{۱۴}$$

با انتگرال‌گیری ε_{az} در رابطه (۱۳) نسبت به z و جایگذاری با σ_{az} در رابطه (۱۲) روابط به‌صورت رابطه (۱۵) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{az} = \frac{\partial w_a}{\partial z} \;\; \rightarrow \;\; \partial w_a = \varepsilon_{az}.\partial z \\ &\sigma_{az} = E_a.\varepsilon_{az} \;\rightarrow\; \varepsilon_{az} = \frac{\sigma_{az}}{E_a} \\ &w_a = \frac{z.\sigma_{az}}{E_a} + w_{a0} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که این رابطه که در آن E_a مدول یانک چسب و w_{a0} جابجایی چسب در $z = 0$ است. جابجایی‌های u_a و v_a با انتگرال‌گیری از رابطه (۲) مشابه رابطه (۴) به دست می‌آید. در جهت ضخامت در لایه چسب تنش‌های سطحی و برشی یکنواخت فرض می‌شود. در نتیجه، کرنش‌های برشی و کرنش عمودی در ناحیه چسب به‌صورت زیر بیان می‌گردد. با داشتن شرط پیوستگی در جهت x و y به ترتیب بین صفحات اتصال و چسب در $z=0$ و $z = t_a$ روابط (۱۶) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \gamma_{axz} &= \frac{u_2^0 - u_3^0 - h_1.\phi_{2x} - h_2.\phi_{3x}}{t_a} \\ \gamma_{ayz} &= \frac{v_2^0 - v_3^0 - h_1.\phi_{2y} - h_2.\phi_{3y}}{t_a} \\ \varepsilon_{az} &= \frac{1}{t_a}(w_2 - w_3) \end{aligned} \tag{۱۶}$$

u_1^0 و v_1^0 و w_1 مؤلفه‌های جابجایی در صفحه وسط صفحه

بالایی است. ϕ_{1x} و ϕ_{1y} مؤلفه‌های چرخشی در صفحه بالایی است. u_2^0 و v_2^0 و w_2 مؤلفه‌های جابجایی در صفحه وسط صفحه پایینی است. ϕ_{2x} و ϕ_{2y} مؤلفه‌های چرخشی در صفحه پایینی است. معادلات تعادل صفحات مستطیلی با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل[12] به‌صورت رابطه (۱۷) تعریف شده است [۲۳].

$$\Pi = \delta U + \delta V = 0 \tag{۱۷}$$

که در آن δU انرژی کرنش مجازی، δV کار مجازی انجام شده توسط نیروهای اعمال شده است.

$$\Pi = \delta(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) + \delta(V_1 + V_2) = 0 \tag{۱۸}$$

که $i = 1$ برای صفحه بالایی و $i = 2$ برای صفحه پایینی و $i = 3,4,a$ برای ناحیه چسب است. مقادیر U_1 ، U_2 ، U_3 و U_4 به ترتیب نشان‌دهنده انرژی کرنشی صفحه بالایی، صفحه پایینی، انرژی کرنشی برشی چسب و انرژی کرنشی نرمال چسب است. مقادیر V_1 ، V_2 به ترتیب نشان‌دهنده کار مجازی صفحه بالایی، صفحه پایینی است. روابط انرژی کرنشی به‌صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شوند.

$$\delta U_i = \int_{A_i} \left\{ \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ijk}\delta\varepsilon_{ijk})\, dz \right\} dxdy \qquad j,k = x,y,z$$

$$\begin{aligned}\delta U_i = \int_{A_i} \Bigg\{ \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \big[&\sigma_{ixx}(\delta\varepsilon_{ixx}^0 + z\delta\kappa_{ixx}) \\ &+ \sigma_{iyy}\left(\delta\varepsilon_{iyy}^0 + z\delta\kappa_{iyy}\right) \\ &+ \sigma_{ixy}\left(\delta\varepsilon_{ixy}^0 + z\delta\kappa_{ixy}\right) \\ &+ \sigma_{ixz}\delta\gamma_{ixz} \\ &+ \sigma_{iyz}\delta\gamma_{iyz} \big]\, dz \Bigg\} dxdy \quad i = 1,2\end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned}\delta U_i &= \int_{A_i} (N_{ixx}\delta\varepsilon_{ixx}^0 + M_{ixx}\delta\kappa_{ixx} + N_{iyy}\delta\varepsilon_{iyy}^0 \\ &+ M_{iyy}\delta\kappa_{iyy} + N_{ixy}\delta\gamma_{ixy}^0 + M_{ixy}\delta\kappa_{ixy} \\ &+ Q_{ix}\delta\gamma_{ixz} + Q_{iy}\delta\gamma_{iyz})dxdy \qquad i = 1,2\end{aligned}$$

$$U_3 = \frac{t_a G_a}{2}\int_{A_i} (\gamma_{axz}^2 + \gamma_{ayz}^2)\, dxdy$$

$$U_4 = \frac{E_a}{2t_a}\int_{A_i} (w_2 - w_3)^2\, dxdy$$

که برای A_i مقدار $i = 1$ برای صفحه بالایی و $i = 2$ برای صفحه پایینی و $i = 3$ انرژی کرنشی برشی چسب و $i = 4$ انرژی کرنشی نرمال چسب است. روابط کار مجازی به‌صورت رابطه (۲۰) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\delta V_i = \int_{A_i} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} [&\hat{\sigma}_{nni}(\delta u_{ni} + z\delta\phi_{ni}) \\ &+ \hat{\sigma}_{nsi}(\delta u_{si} + z\delta\phi_{si}) \\ &+ \hat{\sigma}_{nzi}\delta w_{0i}]\, dzds \\ &- \int_{\Omega_i} (q_{bi} + q_{ti} \\ &- kw_{0i})\delta w_{0i} dxdy \qquad i = 1,2\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned}\delta V_i = \int_{A_i} \big(&\hat{N}_{nni}\delta u_{ni} + \hat{N}_{nsi}\delta u_{si} + \hat{M}_{nni}\delta\phi_{ni} \\ &+ \hat{M}_{nsi}\delta\phi_{si} + \hat{Q}_{ni}\delta w_{0i}\big)ds \\ &+ \int_{\Omega_i} (kw_{0i}\delta w_{0i} \\ &- q_i\delta w_{0i})dxdy \qquad i = 1,2\end{aligned}$$

که Ω_i نشان دهنده صفحه میانی در صفحات است. روابط انرژی جنبشی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند. با جایگزین کردن انرژی کرنشی، کار مجازی در اصل حداقل انرژی پتانسیل به معادله حاکم برای صفحات خواهیم رسید.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Big[&N_{ixx}\delta\varepsilon_{ixx}^0 + M_{ixx}\delta\kappa_{ixx} + N_{iyy}\delta\varepsilon_{iyy}^0 \\ &+ M_{iyy}\delta\kappa_{iyy} + N_{ixy}\delta\gamma_{ixy}^0 \\ &+ M_{ixy}\delta\kappa_{ixy} + Q_{ix}\delta\gamma_{ixz} \\ &+ Q_{iy}\delta\gamma_{iyz} + \frac{t_a G_a}{2}\gamma_{axz}^2 \\ &+ \frac{t_a G_a}{2}\gamma_{ayz}^2 + \frac{E_a}{2t_a}w_2^2 \\ &+ \frac{E_a}{2t_a}w_3^2 + \hat{N}_{nni}\delta u_{ni} \Big] dxdy \\ &= 0\end{aligned} \tag{۲۱}$$

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه فوق را به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\int_{\Omega}\Big[N_{ixx}\delta\frac{\partial u_i^0}{\partial x}+M_{ixx}\delta\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}+N_{iyy}\delta\frac{\partial v_i^0}{\partial y}+M_{iyy}\delta\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}+N_{ixy}\delta\frac{\partial u_i^0}{\partial y}+N_{ixy}\delta\frac{\partial v_i^0}{\partial x}+M_{ixy}\delta\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y}+M_{ixy}\delta\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}+Q_{ix}\delta\frac{\partial w_i^0}{\partial x}+Q_{ix}\phi_{ix}+Q_{iy}\frac{\partial w_i^0}{\partial y}+Q_{iy}\phi_{iy}+\frac{t_aG_a}{2}\gamma_{axz}^2+\frac{t_aG_a}{2}\gamma_{ayz}^2+\frac{E_a}{2t_a}w_2^2+\frac{E_a}{2t_a}w_3^2+\widehat{N}_{nni}\delta u_{ni}\Big]dxdy=0 \qquad (۲۲)$$

با جایگذاری معادلات در اصل حداقل انرژی پتانسیل داریم:

$$\int_0^T\int_{\Omega}\Big[-\Big(\frac{\partial N_{ixx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{ixy}}{\partial y}+\frac{G_a}{t_a}(u_2-u_3-h_1.\phi_{2x}-h_2.\phi_{3x})+\widehat{N}_{xxi}\Big)\delta u_0-\Big(\frac{\partial N_{ixy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{iyy}}{\partial y}+\frac{G_a}{t_a}(v_2-v_3-h_1.\phi_{2y}-h_2.\phi_{3y})\Big)\delta v_0-\Big(\frac{\partial M_{ixx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{ixy}}{\partial y}-Q_{ix}+\frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(v_2-v_3-h_1.\phi_{2y}-h_2.\phi_{3y})\Big)\delta\phi_x-\Big(\frac{\partial M_{ixy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{iyy}}{\partial y}-Q_{iy}+\frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(v_2-v_3-h_1.\phi_{2y}-h_2.\phi_{3y})\Big)\delta\phi_y-\Big(\frac{\partial Q_{ix}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{iy}}{\partial y}-\frac{E_a}{2t_a}w_2^2-\frac{E_a}{2t_a}w_3^2\Big)\delta w_0\Big]dxdy=0 \qquad (۲۳)$$

از رابطه (۲۳) به معادلات (۲۴) می‌رسیم:

$$\frac{\partial N_{ixx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{ixy}}{\partial y}+\frac{G_a}{t_a}(u_2-u_3-h_1.\phi_{2x}-h_2.\phi_{3x})-\widehat{N}_{xxi}=0 \qquad (\text{۲۴–الف})$$

$$\frac{\partial N_{ixy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{iyy}}{\partial y}+\frac{G_a}{t_a}(v_2-v_3-h_1.\phi_{2y}-h_2.\phi_{3y})=0 \qquad (\text{۲۴–ب})$$

$$\frac{\partial Q_{ix}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{iy}}{\partial y}-\frac{E_a}{2t_a}w_2^2-\frac{E_a}{2t_a}w_3^2=0 \qquad (\text{۲۴–ج})$$

$$\frac{\partial M_{ixx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{ixy}}{\partial y}-Q_{ix}+\frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(v_2-v_3-h_1.\phi_{2y}-h_2.\phi_{3y})=0 \qquad (\text{۲۴–د})$$

$$\frac{\partial M_{ixy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{iyy}}{\partial y}-Q_{iy}+\frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(v_2-v_3-h_1.\phi_{2y}-h_2.\phi_{3y})=0 \qquad (\text{۲۴–ه})$$

حال با جایگذاری رابطه (۲) و (۳) و (۶) در رابطه (۲۴) خواهیم داشت:

$$A_{11}^i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x}\right)+A_{12}^i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y}\right)+A_{16}^i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y}+\frac{\partial v_i^0}{\partial x}\right)+B_{11}^i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\right)+B_{12}^i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\right)+B_{16}^i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y}+\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}\right)+A_{16}^i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x}\right)+A_{26}^i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y}\right)+A_{66}^i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y}+\frac{\partial v_i^0}{\partial x}\right)+B_{16}^i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\right)+B_{26}^i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\right)+B_{66}^i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y}+\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}\right)+\frac{G_a}{t_a}(u_2-u_3-h_1.\phi_{2x}-h_2.\phi_{3x})-\widehat{N}_{xxi}=0 \qquad (\text{۲۵–الف})$$

$$
\begin{aligned}
&A_{16}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x}\right)+A_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y}\right)+A_{66}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y}+\frac{\partial v_i^0}{\partial x}\right)+B_{16}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\right)+B_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\right)\\
&+B_{66}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y}+\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}\right)+A_{12}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x}\right)\\
&+A_{22}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y}\right)+A_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y}+\frac{\partial v_i^0}{\partial x}\right)\\
&+B_{12}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\right)+B_{22}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\right)\\
&+B_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y}+\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}\right)+\frac{G_a}{t_a}(v_2-v_3-h_1.\phi_{2y}-h_2.\phi_{3y})=0
\end{aligned}
\tag{۲۵–ب}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_sA_{44}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x}+\phi_{ix}\right)+K_sA_{45}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y}+\phi_{iy}\right)\\
&+K_sA_{45}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x}+\phi_{ix}\right)+K_sA_{55}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y}+\phi_{iy}\right)-\frac{E_a}{2t_a}w_2^2-\frac{E_a}{2t_a}w_3^2=0
\end{aligned}
\tag{۲۵–ج}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{11}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x}\right)+B_{12}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y}\right)\\
&+B_{16}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y}+\frac{\partial v_i^0}{\partial x}\right)+D_{11}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\right)+D_{12}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\right)\\
&+D_{16}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y}+\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}\right)+B_{16}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x}\right)\\
&+B_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y}\right)+B_{66}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y}+\frac{\partial v_i^0}{\partial x}\right)\\
&+D_{16}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\right)+D_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\right)\\
&+D_{66}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y}+\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}\right)-K_sA_{44}^{i}\left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x}+\phi_{ix}\right)-K_sA_{45}^{i}\left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y}+\phi_{iy}\right)\\
&+\frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(v_2-v_3-h_1.\phi_{2y}-h_2.\phi_{3y})=0
\end{aligned}
\tag{۲۵–د}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{16}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x}\right)+B_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y}\right)+B_{66}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y}+\frac{\partial v_i^0}{\partial x}\right)\\
&+D_{16}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\right)+D_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\right)+D_{66}^{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y}+\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}\right)+B_{12}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x}\right)\\
&+B_{22}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_i^0}{\partial y}\right)+B_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial y}+\frac{\partial v_i^0}{\partial x}\right)+D_{12}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x}\right)+D_{22}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y}\right)\\
&+D_{26}^{i}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y}+\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x}\right)-K_sA_{45}^{i}\left(\frac{\partial w_i^0}{\partial x}+\phi_{ix}\right)-K_sA_{55}^{i}\left(\frac{\partial w_i^0}{\partial y}+\phi_{iy}\right)\\
&+\frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(v_2-v_3-h_1.\phi_{2y}-h_2.\phi_{3y})=0
\end{aligned}
\tag{۲۵–ه}
$$

شرایط مرزی در دو لبه عرضی به‌صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی لبه‌های صفحات در دو انتها در ناحیه (۱) و (۶) برای شرط مرزی ساده S ، شرط مرزی گیردار C و شرط مرزی آزاد F بررسی شده است. این شرایط به‌صورت

زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned} &w = \phi_y = M_x = 0 && \text{تکیه‌گاه ساده:} \\ &u = v = w = \phi_x = 0 && \text{تکیه گاه گیردار:} \quad (۲۶) \\ &N_x = N_{xy} = M_x = M_{xy} = Q_x = 0 && \text{تکیه گاه آزاد:} \end{aligned}$$

شرایط مرزی در ناحیه چسب، ناحیه (۳) و (۴) به‌صورت شرایط مرزی لبه‌های آزاد در نظر گرفته شده است. این شرایط به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
N_{ix} &= A_{11}\frac{\partial u_i^0}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v_i^0}{\partial y} + A_{16}\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + A_{16}\frac{\partial v_i^0}{\partial x} + B_{11}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} + B_{16}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + B_{16}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
N_{iy} &= A_{12}\frac{\partial u_i^0}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial v_i^0}{\partial y} + A_{26}\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + A_{26}\frac{\partial v_i^0}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} + B_{26}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + B_{26}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
N_{ixy} &= A_{16}\frac{\partial u_i^0}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial v_i^0}{\partial y} + A_{66}\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + A_{66}\frac{\partial v_i^0}{\partial x} + B_{16}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + B_{26}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} + B_{66}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + B_{66}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
M_{ix} &= B_{11}\frac{\partial u_i^0}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial v_i^0}{\partial y} + B_{16}\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + B_{16}\frac{\partial v_i^0}{\partial x} + D_{11}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} + D_{16}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + D_{16}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \quad (۲۷) \\
M_{iy} &= B_{12}\frac{\partial u_i^0}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial v_i^0}{\partial y} + B_{26}\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + B_{26}\frac{\partial v_i^0}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} + D_{26}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + D_{26}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
M_{ixy} &= B_{16}\frac{\partial u_i^0}{\partial x} + B_{26}\frac{\partial v_i^0}{\partial y} + B_{66}\frac{\partial u_i^0}{\partial y} + B_{66}\frac{\partial v_i^0}{\partial x} + D_{16}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial x} + D_{26}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial y} + D_{66}\frac{\partial \phi_{ix}}{\partial y} + D_{66}\frac{\partial \phi_{iy}}{\partial x} \\
Q_{ix} &= A_{44}\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + A_{44}\phi_{ix} + A_{45}\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + A_{45}\phi_{iy} \\
Q_{iy} &= A_{45}\frac{\partial w_i^0}{\partial x} + A_{45}\phi_{ix} + A_{55}\frac{\partial w_i^0}{\partial y} + A_{55}\phi_{iy}
\end{aligned}$$

در ناحیه (۲) و (۵) شرایط سازگاری شامل پیوستگی جابه‌جایی، پیوستگی شیب و پیوستگی گشتاور خمشی به‌صورت زیر بررسی می‌گردد.

$$\begin{aligned}
u_i &= u_j \\
v_i &= v_j \\
w_i &= w_j \\
\phi_{xi} &= \phi_{xj} \\
\phi_{yi} &= \phi_{yj} \\
Q_{yi} &= Q_{yj} \\
N_{xi} &= N_{xj} \\
N_{yi} &= N_{yj} \\
N_{xyi} &= N_{xyj} \\
M_{xi} &= M_{xj} \\
M_{yi} &= M_{yj} \\
M_{xyi} &= M_{xyj}
\end{aligned}$$

که اندیس i و j به ترتیب مربوط به ناحیه پیوستگی است.

۳- حل معادلات به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته:

روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته مبتنی بر تقریب یک مشتق از یک تابع در یک نقطه مشخص با مجموع وزنی و مقادیر تابع در هر نقطه مجموعه در محدوده حل مسئله است. مشتق یک تابع نسبت به یک متغیر را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی وزن‌دار از مقادیر تابع که در تعداد نقاط دامنه محاسبه شده‌اند، تقریب زد. برای انطباق یک چند جمله‌ای یکتا بر نقاط لاگرانژی[13] رابطه (۲۹) ارائه گردیده است[۲۵].

$$\begin{aligned}
f_x(x_i) &= \sum_{i=1}^{N} a_{ij} f(x_i) \qquad i = 1,2,\dots N \\
\left.\frac{d^r f}{dx^r}\right|_{x=x_i} &= \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(r)} f(x_i)
\end{aligned} \quad (۲۹)$$

که N تعداد نقاط شبکه در جهت x است. همچنین A_{ij} ماتریس ضرایب وزنی است که به‌صورت رابطه (۳۰) تعریف می‌شود [۲۵].

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{\prod_{k=1, k\neq i,j}^{N}(x_i - x_k)}{\prod_{k=1, k\neq j}^{N}(x_j - x_k)} & i \neq j \quad i,j = 1,2,3,\dots,N \\ \displaystyle\sum_{k=1, k\neq 1}^{N} \frac{1}{x_i - x_k} & i = j = 1,2,3,\dots,N \end{cases}$$

(۳۰)

که در آن برای مشتقات بالاتر ضرایب وزنی به‌صورت رابطه (۳۱) محاسبه می‌شود.

$$A_{ij}^{(r)} = A_{ij}^{(1)} A_{ij}^{(r-1)} \qquad r = 2,3,\dots,N-1$$
$$[A]^{(r)} = [A]^{(1)}[A]^{(r-1)} \qquad r = 2,3,\dots,N-1 \tag{۳۱}$$

یکی از مهم‌ترین نکات در همگرایی نتایج، علاوه بر تعداد نقاط، نحوه توزیع نقاط در حوزه حل است. دو نوع توزیع یکنواخت و غیریکنواخت در این روش پیشنهاد می‌شود که نقاط شبکه با توزیع یکنواخت به‌صورت رابطه (۳۲) است [۲۵].

$$x_i = \frac{i-1}{N-1} \qquad 0 \le x \le L_i = 1,2,\dots,N \tag{۳۲}$$

همچنین توزیع نقطه غیریکنواخت چبسشف-گوس-لوباتو را می‌توان به‌صورت رابطه (۳۳) است. خاصیت این نوع توزیع آن است که تراکم نقاط در نظر گرفته شده در این نوع توزیع در نزدیکی نقاط مرزی بیشتر از نقاط میانی است.

$$x_i = \frac{L}{2}[1 - cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi)] \qquad 0 \le x \le L_i = 1,2,\dots,N \tag{۳۳}$$

با توجه به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، جابجایی‌ها برای حل معادلات کمانش به‌صورت رابطه (۳۴) در نظر گرفته می‌شود.

$$[K]\{w\} = N_{x-cr}[P]\{w\} \tag{۳۴}$$

۴- حل به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته:

میدان جابجایی به دست آمده با استفاده از روش جداسازی متغیرها به‌صورت رابطه (۳۵) تعریف می‌شوند [۲۳].

$$u_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t)\, cos\, \alpha x\, sin\, \beta y$$
$$v_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t)\, sin\, \alpha x\, cos\, \beta y$$
$$w_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t)\, sin\, \alpha x\, sin\, \beta y \tag{۳۵}$$
$$\phi_x(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t)\, cos\, \alpha x\, sin\, \beta y$$
$$\phi_y(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t)\, sin\, \alpha x\, cos\, \beta y$$

که در آن $\alpha = m\pi/a$ و $\beta = n\pi/b$ می‌باشد. با قرار دادن روابط (۳۵) در روابط (۲۵) ماتریس [H] به دست می‌آید که آرایه‌های آن به‌صورت رابطه (۳۶) تعریف می‌شود:

$$H_{11} = -A_{11}\alpha U - 2A_{16}\alpha\beta U - A_{26}\beta^2 U - A_{66}\beta^2 U + \frac{G_a}{t_a}(u_1 - u_2) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x}) - N_x$$
$$H_{12} = -A_{12}\alpha\beta V - A_{16}\alpha^2 V - A_{26}\beta^2 V - A_{66}\alpha\beta V + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$
$$H_{13} = \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x}) \tag{۳۶-الف}$$
$$H_{14} = -B_{11}\alpha^2\varphi_x - 2B_{16}\alpha\beta\varphi_x - B_{66}\beta^2\varphi_x + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$
$$H_{15} = -B_{12}\alpha\beta\varphi_y - B_{16}\alpha^2\varphi_y - B_{26}\beta^2\varphi_y - B_{66}\alpha\beta\varphi_y + \frac{G_a}{t_a}(u_2 - u_1) - \frac{G_a}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})$$

$$H_{21} = -A_{12}\alpha\beta U - A_{16}\alpha^2 U - A_{22}\beta^2 U - A_{26}\beta^2 U - A_{26}\alpha\beta U + A_{66}\alpha\beta U + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right)$$
$$H_{22} = -2A_{26}\alpha\beta V - A_{66}\alpha^2 V + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right)$$
$$H_{23} = \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right) \tag{۳۶-ب}$$
$$H_{24} = -B_{12}\alpha\beta\varphi_x - B_{16}\alpha^2\varphi_x - B_{26}\beta^2\varphi_x - B_{66}\alpha\beta\varphi_x + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right)$$

$$
\begin{aligned}
H_{25} = {} & -B_{22}\beta^2\varphi_y - 2B_{26}\alpha\beta\varphi_y - B_{66}\alpha^2\varphi_y + \frac{G_a}{t_a}(v_1 - v_2) - \frac{G_a}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{31} &= -\frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)\\
H_{32} &= -\frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)\\
H_{33} &= -K_sA_{44}\alpha^2W + 2K_sA_{45}\alpha\beta W - K_sA_{55}\beta^2W - \frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)\\
H_{34} &= -K_sA_{44}\alpha\varphi_x + K_sA_{45}\beta\varphi_x - \frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)\\
H_{35} &= K_sA_{45}\alpha\varphi_y - K_sA_{55}\beta\varphi_y - \frac{E_a}{2t_a}(w_1^2 + w_2^2)
\end{aligned}
\tag{۳۶-ج}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{41} &= -B_{11}\alpha^2U - B_{16}\alpha\beta U - B_{26}\beta^2U - B_{66}\beta^2U + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})\\
H_{42} &= -B_{12}\alpha\beta V - B_{16}\alpha\beta V - B_{16}\alpha^2V - B_{66}\alpha\beta V + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})\\
H_{43} &= -K_sA_{44}\alpha W - K_sA_{45}\beta W + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})\\
H_{44} &= -K_sA_{44}\varphi_x - D_{11}\alpha^2\varphi_x - 2D_{16}\alpha\beta\varphi_x - D_{66}\beta^2\varphi_x + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})\\
H_{45} &= -B_{12}\alpha\beta\varphi_y - B_{16}\alpha^2\varphi_y - B_{26}\beta^2\varphi_y - B_{66}\alpha\beta\varphi_y + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(u_1 - u_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}(t_1\phi_{1x} + t_2\phi_{2x})
\end{aligned}
\tag{۳۶-د}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{51} &= -B_{12}\alpha\beta U - B_{16}\alpha^2U - B_{22}\beta^2U - B_{26}\beta^2U - B_{66}\alpha\beta U + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right)\\
H_{52} &= -B_{66}\alpha^2V - 2B_{26}\alpha\beta V + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right)\\
H_{53} &= -K_sA_{45}\alpha W - K_sA_{55}\beta W + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right)\\
H_{54} &= -D_{16}\alpha^2\varphi_x - D_{12}\alpha\beta\varphi_x - D_{26}\beta^2\varphi_x - D_{66}\alpha\beta\varphi_x - K_sA_{45}\varphi_x + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right)\\
H_{55} &= -2D_{26}\alpha\beta\varphi_y - D_{66}\alpha^2\varphi_y - D_{22}\beta^2\varphi_y - K_sA_{55}\varphi_y + \frac{G_ah_{1,2}}{t_a}(v_1 - v_2) + \frac{G_ah_{1,2}}{2t_a}\left(t_1\phi_{1y} + t_2\phi_{2y}\right)
\end{aligned}
\tag{۳۶-هـ}
$$

که $U^{(i)}$ ، $V^{(i)}$ ، $W^{(i)}$ ، $\varphi_x{}^{(i)}$ و $\varphi_y{}^{(i)}$ مشتقات مرتبه (i) جابجایی‌ها می‌باشند که با توجه به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته به دست می‌آیند.

۵- تحلیل و نتایج

نتایج حاصل از بار کمانش بحرانی سازه بر اساس تئوری برشی مرتبه‌اول و با استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته ارائه شده است. شرایط مختلف لایه چینی صفحه یک و دو برای به‌صورت تک‌جهته[۱۴] و دوجهته[۱۵] و جنس‌های مختلف بررسی گردیده است. ضخامت هر لایه $t\_ply = ۰/۲۵$ mm است. همچنین تنش برشی در شرایط لایه چینی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی گردیده است. جنس و ضخامت متفاوت برای اتصال چسبی بررسی گردیده است. خصوصیات مکانیکی مواد برای صفحات و چسب در جدول ۱ آمده است.

۵-۱- اعتبار سنجی

در این مقاله تحلیل کمانش صفحات با اتصال همپوشانی چسبی به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته انجام شده است.

مقایسه کمانش بحرانی نتایج حاصل از دو صفحه به هم پیوسته با شرایط پیوستگی با طول همپوشانی صفر در نظر گرفته شده است. ابعاد هر یک از صفحات کامپوزیتی به طول ۲۰۰ میلی‌متر و عرض ۱۰۰ میلی‌متر از جنس کربن/اپوکسی تک‌جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS در نظر گرفته شده است. نتایج محاسبات با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۴] مقایسه شده است و در جدول ۲ آمده است که تطابق بسیار خوبی حاصل‌شده است.

نتایج حاصل از روش عددی با حل اجزای محدود نیز مقایسه شد که نتایج بر هم منطبق است. شکل ۳ نمایی از کمانش صفحات متصل‌به‌هم در نرم‌افزار اجزای محدود آورده شده است.

۵-۲- محاسبه تنش برشی چسب

بررسی تنش برشی چسب به منظور عدم جدایش صفحات به هم متصل شده با چسب، قبل از پدیده کمانش الزامی است. برای محاسبه تنش برشی تئوری‌هایی مانند مدل ولکرسن، گلند و رسینر، هارت-اسمیت و اجالوو و ادینوف ارائه گردیده است. در این مقاله از تئوری ولکرسن برای محاسبه تنش برشی چسب استفاده شده است. این روش به‌عنوان مدل تأخیر برش نیز مطرح شده است که مفهوم برش دیفرانسیلی را معرفی می‌کند. توزیع تنش برشی τ در چسب از رابطه (۳۷) محاسبه می‌گردد[۸].

$$\tau = \frac{N_{x-a}\omega}{2b}\frac{cosh(\omega x)}{sinh(\frac{\omega l}{2})} + (\frac{t_1-t_2}{t_1+t_2})(\frac{\omega l}{2})\frac{sinh(\omega x)}{cosh(\frac{\omega l}{2})} \quad (۳۷)$$

t_1 ضخامت قطعه بالایی و t_2 ضخامت قطعه پایینی و t_a ضخامت چسب، b عرض ناحیه اتصال و l طول ناحیه اتصال، E_a مدول چسب می‌شود، G_a مدول برشی چسب، N_x نیروی اعمالی بر واحد طول چسب و مقدار ω به‌عنوان مشخصه طول برش چسب شناخته می‌شود، واحد آن از جنس معکوس طول است و از رابطه(۳۸) به دست می‌آید.

$$\omega = \sqrt{\frac{G_a}{E_a t_1 t_a}(1+\frac{t_1}{t_2})} \quad (۳۸)$$

با فرض اینکه طول اتصال چسب l به قدری بزرگ باشد که مقدار $cosh(\omega l) = sinh(\omega l)$ شود و ضخامت صفحات به هم چسبانده شده برابر باشد $(t_1 = t_2)$ می‌توان رابطه (۳۷) را به‌صورت رابطه (۳۹) باز نویسی کرد.

$$\tau = \frac{N_{x-a}}{2}\sqrt{\frac{G_a}{E_a t_1 t_a}\left(1+\frac{t_1}{t_2}\right)} \quad (۳۹)$$

با توجه به مقادیر کمانش بحرانی N_{x-cr} محاسبه شده از رابطه (۳۴) با جایگذاری آن در مقدار N_{x-a} رابطه (۳۹) مقدار تنش بحرانی چسب به دست می‌آید. این مقدار نباید بیشتر از استحکام برشی تسلیم چسب باشد، در غیر این صورت چسب قبل از کمانش صفحات، دچار برش می‌شود. با داشتن استحکام تسلیم چسب، مقدار N_{x-a} از رابطه (۳۹) به دست می‌آید که برای همه شرایط بارگذاری کمانشی با مقدار بار کمانش بحرانی N_{x-cr} بررسی شده است.

۵-۲- ارائه نتایج

در این قسمت نتایج حل عددی تحقیق حاضر با نتایج اجزای محدود به دست آمده با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. در این قسمت مقادیر ابعادی صفحات، شرایط مرزی، جنس چسب و صفحات، نوع لایه‌چینی، مقدار طول همپوشانی چسب و ضخامت چسب برای بار بحرانی کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. برای به دست آوردن خصوصیات سفتی چسب از رابطه (۴۰) استفاده می‌شود.

$$K_I = K_{nn} = \frac{E_a}{t_a} \qquad K_{II} = K_{ss} = K_{tt} = \frac{G_a}{t_a} \quad (۴۰)$$

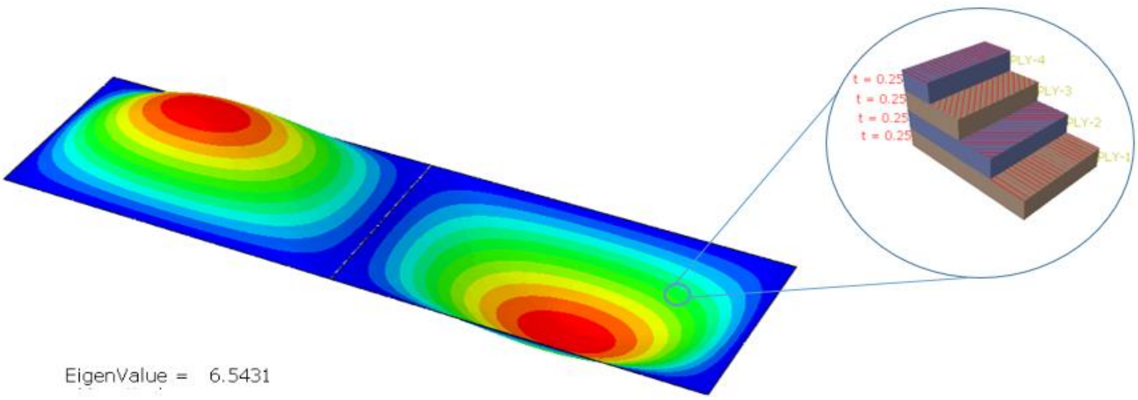
مقدار K_I ضریب سختی نرمال چسب و مقدار K_{II} مقدار ضریب سختی برشی طولی و عرضی چسب، A سطح زیر منحنی تنش-کرنش چسب، τ_y استحکام تسلیم چسب و τ_f استحکام شکست چسب است. این ضرایب به ضخامت چسب وابسته است. مقادیر فوق برای چسب اپوکسی به ضخامت $t_a = 0$

جدول ۱- خصوصیات مکانیکی صفحات و چسب[۲۲] و [۲۷] و [۲۸]

	$E_x\,(GPa)$	$E_y\,(GPa)$	$G\,(GPa)$	ν_x	$\rho_s\,(kg/m^3)$
کربن – اپوکسی تک‌جهته	۸۹	۴	۵	۰/۳	۱۶۰۰
کربن – اپوکسی دوجهته	۵۶/۸	۵۶/۸	۴	۰/۰۴	۱۶۰۰
شیشه – اپوکسی تک‌جهته	۳۸/۶	۸/۲۷	۴/۱۴	۰/۲۶	۱۸۰۰
آرامید – اپوکسی تک‌جهته	۷۶	۵/۵	۲/۳	۰/۳۴	۱۴۶۰
چسب اپوکسی	۴/۶	۴/۶	۱/۴	۰/۳۴	۲۵۰۰
چسب IPCO 9923	۱/۳	۱/۳	۰/۴۶	۰/۴۱	۱۲۰۰
چسب AV 138	۵	۵	۱/۷	۰/۳۴	۱۳۵۰

جدول ۲- مقایسه بار بحرانی صفحات با طول همپوشانی صفر از جنس کربن/اپوکسی تک‌جهته

لایه‌چینی	روش حاضر $N_{x-cr}\,(N/mm)$	مرجع [۲۴] $N_{x-cr}\,(N/mm)$	درصد خطا
[۰/+۴۵/-۴۵/۰]	۶/۸۰	۶/۹۱	۱/۵
[۰/+۳۰/-۳۰/۰]	۷/۰۶	۷/۱۵	۱/۲
[۰/+۱۵/-۱۵/۰]	۷/۳۰	۷/۳۷	۰/۹



شکل ۳ – کمانش بحرانی برای لایه چینی [۰/+۴۵/-۴۵/۰] در نرم‌افزار اجزای محدود

$1\,mm$. در جدول ۳ آورده شده است. مقادیر بار بحرانی کمانش برای لایه چینی مختلف از جنس کربن اپوکسی تک-جهته و مقدار همپوشانی ثابت چسب برای شرایط تکیه‌گاهی $SSSS$ برای نسبت طول به عرض مختلف به‌صورت شکل ۴ به دست می‌آید. برای نسبت ابعادی طول به عرض مقادیر کمانش بحرانی متفاوت است. همچنین چون بار به‌صورت فشاری و در راستای محور x وارد می‌شود، برای لایه چینی صفحاتی که الیاف در راستای نیرو است استحکام کمانشی بالاتری به دست

می‌آید کمترین مقدار بار کمانش، بسته به نسبت جانبی ورق (L/b)در مقادیر متفاوتی از m و n ایجاد خواهند شد و لزوماً در مقادیر $m=1$ و $n=1$ ایجاد نمی‌شود. برای ترسیم شکل ۴ تمامی مقادیر بار کمانش برای نسبت جانبی بین ۰/۳ تا ۵ و مقادیر m و n از یک تا پنج بررسی شده است و مقدار کمترین عدد که بیانگر مقدار بار بحرانی کمانش است برای آن لایه چینی در نمودار آورده شده است.

مقادیر بار بحرانی کمانش برای جنس صفحات مختلف با نسبت همپوشانی متفاوت چسب برای شرایط تکیه‌گاهی *SSSS* به‌صورت شکل ۵ به دست می‌آید. هرچه مقدار همپوشانی چسب بیشتر باشد مقدار استحکام کمانشی سازه بیشتر است. برای جنس کربن اپوکسی دوجهته مقادیر استحکام کمانشی نسبت به سایر مواد بررسی شده، بیشترین است.

مقادیر بار مجاز استحکامی چسب (N_{x-a}) از رابطه (۳۹) به دست می‌آید. این مقادیر بر اساس چسب اپوکسی و استحکام تسلیم مطابق جدول ۳ محاسبه گردیده است. مقادیر به دست آمده برای لایه چینی و جنس صفحات مختلف با نسبت طول به عرض متفاوت و شرایط تکیه‌گاهی *SSSS* و همپوشانی ثابت چسب در جدول ۴ آورده شده است.

به منظور بررسی مودهای کمانشی مختلف برای جنس کربن اپوکسی تک‌جهته با شرایط تکیه‌گاهی *SSSS* مقادیر بار بحرانی برای نسبت‌های مختلف طول به عرض سازه با ناحیه همپوشانی ثابت چسب به‌صورت شکل ۶ به دست آمده است. در این شکل تأثیر مقادیر متفاوت m و n بر بار کمانش بررسی شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است برای مقادیر (L/b) متفاوت، مقادیر بار کمانش متفاوتی حاصل شده است. مقادیر بار بحرانی کمانش در مقادیر ($n=1$ و $m=1$) و ($n=1$ و $m=2$) ایجاد می‌شود.

با تغییر ضخامت چسب نسبت به ضخامت صفحات به هم چسبیده، مقدار کمانش بحرانی برای نسبت طول همپوشانی مختلف چسب نسبت به طول کلی سازه برای جنس کربن اپوکسی تک‌جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS به‌صورت شکل ۷ محاسبه گردیده است.

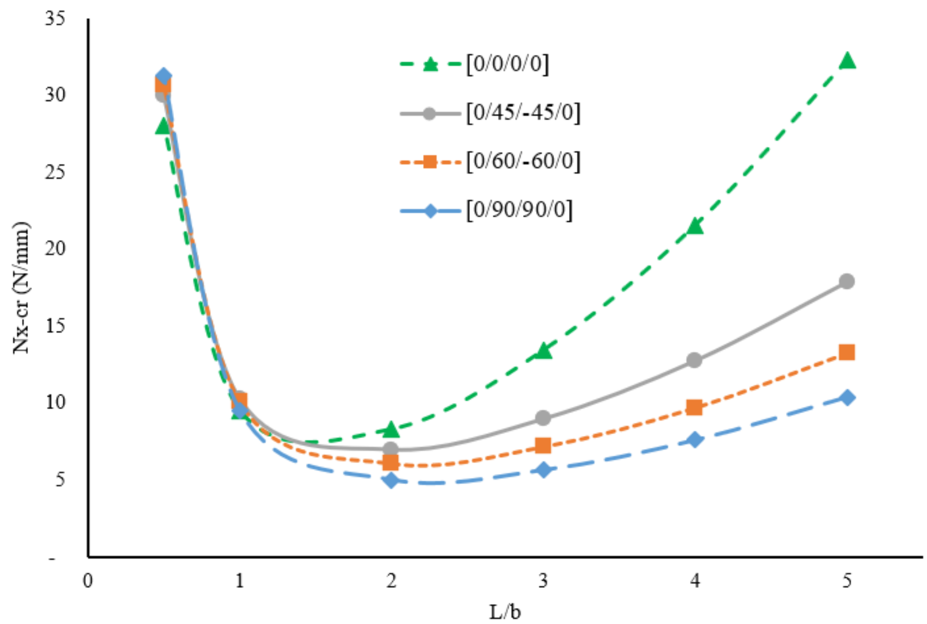
۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله کمانش بحرانی فشاری دو صفحه غیرهمسانگرد متصل شده با چسب به یکدیگر، از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته مورد بررسی قرار گرفته است. با به دست آوردن ماتریس سفتی و حل بر مبنای تئوری برشی مرتبه‌اول برای صفحات با جنس، لایه چینی و شرایط مرزی مختلف به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته نتایج به دست آمده است. بررسی استحکامی چسب با توجه به جنس چسب برای مقایسه با نتایج کمانش بحرانی بررسی گردید. این محاسبات برای تشخیص شکست چسب قبل از پدیده کمانش بررسی شده است. با تغییر پارامترهای زاویه لایه‌چینی الیاف، جنس صفحات، میزان همپوشانی دو صفحه توسط چسب و شرایط مرزی برای نسبت طول به عرض سازه به هم چسبانده شده بررسی گردیده است. برای دو صفحه متصل شده با چسب، عددهای متفاوتی برای مودهای کمانشی فشاری به دست می‌آید. برای اینکه سازه دچار کمانش نشود، مود بحرانی کمانش بررسی می‌گردد. میزان بار وارده به سازه برای نسبت طول به عرض سازه برای مودهای مختلف بررسی گردید. برای مود اول این مقدار بحرانی‌تر است که مقدار استحکام کمانش برای نسبت طول به عرض‌های مختلف، متفاوت است.

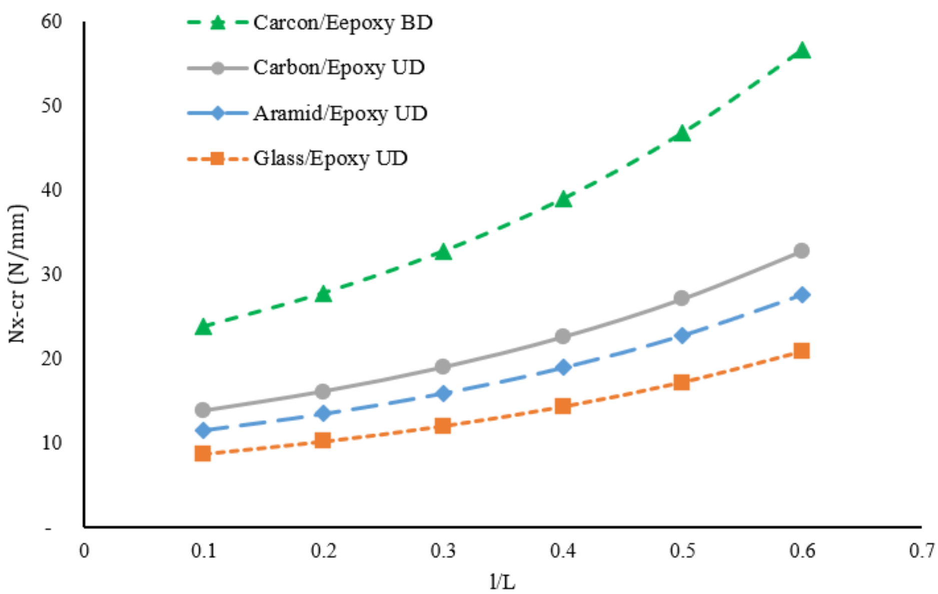
نتایج به دست آمده نشان می‌دهد هر چه مقدار همپوشانی چسب بیشتر باشد استحکام کمانشی سازه افزایش پیدا می‌کند. این افزایش بسته به نوع جنس چسب و صفحات تغییر می‌کند که برای صفحات کربن اپوکسی دوجهته و چسب *AV-138* بیشترین مقدار به دست آمده است. با تغییر نسبت طول به عرض مقادیر کمانشبحرانی تغییر می‌کند. این مقادیر برای سازه‌ها برای یک ابعاد مشخص در بحرانی‌ترین حالت است. برای طراحی سازه و پنل بندی آن با عضوهای طولی و عرضی، با جای ممکن می‌بایست

جدول ۳ - خصوصیات استحکامی و چسبیدگی چسب اپوکسی برای ضخامت چسب ۰/۱ میلی‌متر

K_I (MPa /mm)	K_{II} (MPa /mm)	A (MPa)	τ_y (MPa)	τ_f (MPa)
۴۶۰۰۰	۱۴۰۰۰	۰/۳۶	۳۶/۵	۴۱



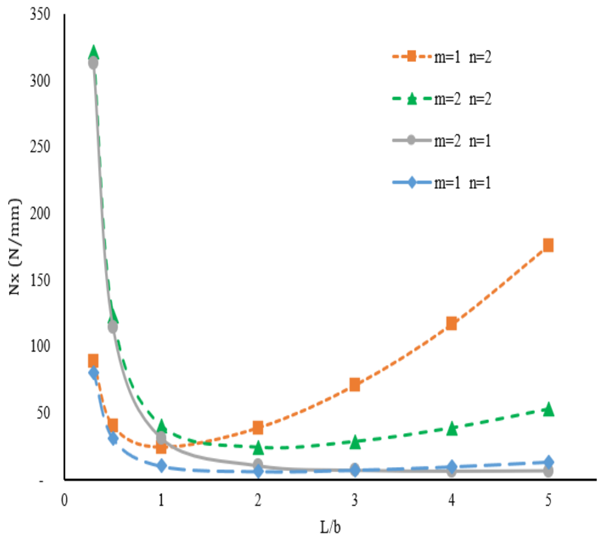
شکل ۴ –کمانش بحرانی برای لایه چینی و نسبت ابعادی مختلف از جنس کربن اپوکسی تک‌جهته



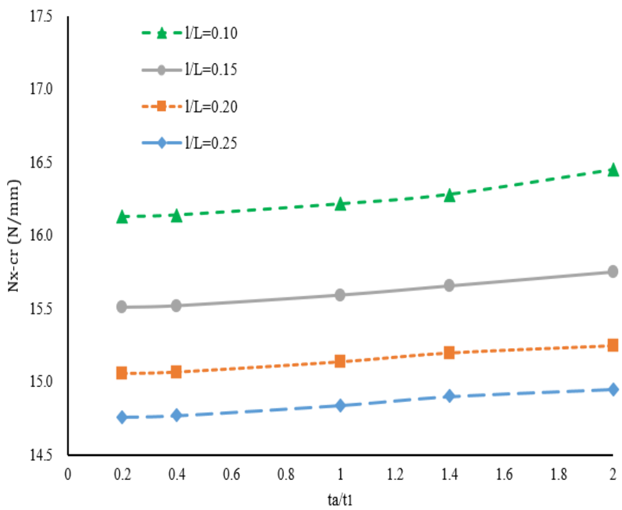
شکل ۵ – کمانش بحرانی برای جنس صفحات مختلف با نسبت همپوشانی متفاوت چسب

جدول ۴- مقایسه بار بحرانی صفحات متصل‌به‌هم با نسبت طول به عرض متفاوت و شرایط تکیه‌گاهی SSSS

جنس لایه‌چینی	شرایط مرزی	a/b	N_{x-cr} (N/mm)	N_{x-a} (N/mm)	شکست چسب قبل از کمانش
کربن اپوکسی تک‌جهته [۰/۰/۰/۰]	SSSS	۰/۵	۳۱/۲۹	۲۰/۵۸	بلی
	SSSS	۱	۹/۵۱	۲۰/۵۸	خیر
	SSSS	۲	۵/۰۳	۲۰/۵۸	خیر
	SSSS	۵	۱۰/۳۸	۲۰/۵۸	خیر
	SCSF	۰/۵	۴۸/۴	۲۰/۵۸	بلی
	SCSF	۱	۱۴/۲	۲۰/۵۸	خیر
	SCSC	۰/۵	۵۷/۹	۲۰/۵۸	بلی
	SCSC	۱	۱۵/۲	۲۰/۵۸	خیر
شیشه اپوکسی تک‌جهته $[0/+45/-45/0]_2$	SSSS	۰/۵	۷۸/۱۴	۴۱/۸۴	بلی
	SSSS	۱	۱۴/۵۸	۴۱/۸۴	خیر
	SSSS	۲	۵۰/۸۶	۴۱/۸۴	بلی
	SSSS	۵	۱۸۵/۵۲	۴۱/۸۴	بلی
	SCSF	۰/۵	۶۰/۲	۴۱/۸۴	بلی
	SCSF	۱	۱۹/۴	۴۱/۸۴	خیر
	SCSC	۰/۵	۷۹/۷	۴۱/۸۴	بلی
	SCSC	۱	۲۰/۱	۴۱/۸۴	خیر



شکل ۶ – بار کمانش مودهای مختلف برای جنس کربن اپوکسی تک‌جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS



شکل ۷ – کمانش بحرانی برای نسبت ضخامت چسب به صفحات با نسبت همپوشانی مختلف چسب

از این ابعاد بحرانی فاصله گرفت تا بتوان سازه‌ای با استحکام کمانش بالاتری در برابر بارهای فشاری طراحی نمود. این نکته مشخص است که برای طراحی بهینه سایر شرایط آن نیز می‌بایست بررسی گردد.

واژه‌نامه:

1. Orthotropic
2. Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)
3. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)
4. ABAQUS
5. Lap-joint
6. Isotropic
7. ANSYS
8. Digital Image Correlation (DIC)
9. Hamilton's Principle
10. Classical Plate Theory (CLT)
11. Peel
12. Minimum Potential Energy Principle
13. Lagrange
14. Uni–Directional (UD)
15. Bi-Directional Woven (BD)

مراجع:

References

1. Yang P. C, Norris C. H., And Stavskys, Y., "*Elastic Wave Propagation In Heterogeneous Plates"*, Solids Structttres Pergamon Press Ltd, Vol. 2, PP. 665- 684, 1966.
2. Ko, T. C., Lin, C. C., and Chu, R. C., "Vibration of Bounded Laminated Lap- Joint Plates Using Adhesive Interface Elements", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 184, No. 4, pp. 457-583, 1995.
3. Du, H., Liew, K. M., and Lim, M. K., "Generalized Differential Quadrature Method for Buckling Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 122, No.2, 1996.
4. Yuceoglu, U., Toghi, F., and Tekinalp, O., "Free Bending Vibrations of Adiiesively Bonded Orthotropic Plates With a Single Lap Joint", *Journal of Vibration and Acoustics*, 1996.
5. Helms, J. E., Li, G., and Pang, S.S., "Buckling Analysis of a Taper-Taper Adhesive-Bonded Composite Joint", *ASME Engineering Technology Conference on Energy*, , Houston, TX, 2002.
6. Kouchakzahed, M. A., *Buckling Analisis of Rectangular Laminated Composite Plates With An Edge Delamination Under Compressive Load*, JAST 2007.
7. Fatahi Mohsen, Farhatnia F., Darvizeh M., Buckling Analysis Of Orthotropic And Anisotropic Rectangular Plates By GDQ Method, Journal Of Simulation And Analysis Of Novel Technologies In Mechanical Engineering (Journal Of Solid Mechanics In Engineering) Vol. 1, pp.23-33, 2008.
8. Rodríguez, Q. R., Sollero, P., and Rodríguez, M. B., "Stress Analysis And Failure Criteria of Adhesive Bonded Single Lap Joints", *21st International Congress of Mechanical Engineering*, October 2011.
9. Abediokhchi, J., and Kouchakzadeh, M. A., "Shakouri M., Buckling analysis of cross-ply laminated conical panels using GDQ method", *Composites: Part B*, Vol. 227, pp. 1181-1198, 2016.
10. Shakouri, M., and Kouchakzadeh, M. A., "Stability analysis of joined isotropic conical shells under axial compression", *Thin-Walled Structures*, 2013.
11. Vijaya kumar, R. L, and Bhat, M. R., "Probabilistic Stress Variation Studies On Composite Single Lap-Joint Using Monte Carlo Simulation", *Composite Structures*, Vol. 121, pp. 351–361, 2015.
12. Bakhshi Khanikik, H., Hosseini-Hashemi, S., and Nezamabadi, A., "Buckling Analysis Of Nonuniform Nonlocal Strain Gradient Beams Using Generalized Differential Quadrature Method", *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 57, No. 3, pp. 1361-1368, 2018.
13. Talezadehlari A, Rahimi G H. Buckling analysis of perforated composite cylindrical shell using Generalized Differential Quadrature Method (GDQM). Modares Mechanical Engineering, Vol. 17 (11) pp.385-396, 2018.
14. Poodeh, F., Farhatnia, F., and Reisi, M. "Buckling Analysis of Orthotropic Thin Rectangular Plates

Subjected to Nonlinear In-Plane Distributed Loads Using Generalized Differential Quadrature Method”, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, Vol. 19, No. 2, pp. 102-116, 2018.

15. Belkacem, A., “Mechanical Buckling Analysis of Hybrid Laminated Composite Plates Under Different Boundary Conditions”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 66, No. 6, pp. 761-769, 2018.
16. Kadioglu, F., “Mechanical Behaviour of Adhesively Single Lap Joint Under Buckling Conditions”, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 34, No. 2, pp. 154-168, 2021.
17. Kadioglu, F., “Effects of Compressive Applied Load on the Adhesive Single Lap Joint with Different Parameters”, *The Journal of Adhesion*, Vol. 98, No. 4, pp. 1-22, 2020.
18. Ramezani, F., Ayatollahi, M. R., Akhavan-Safar, A., da Silva, L. F. M., “A comprehensive experimental study on bi-adhesive single lap joints using DIC technique”, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 102, 102674, 2020.
19. Kouchakzadeh, M. M. A., Gholami, P., Shakouri, M., and Noghabi, M., “Buckling Analysis of Stiffened Cross-Ply Laminated Conical Shells under Axial Compression Using Generalized Differential Quadrature Method”, *AUT J. Mech. Eng*., Vol. 5, No. 4, pp. 535-552, 2021.
20. Marchione, F., “Analytical Stress Analysis in Single-Lap Adhesive Joints under Buckling Loads”, *International Journal of Engineering Transactions B*, Vol. 34, No. 02, pp. 313-318, 2021.
21. Nejat Bakhsh H., Gharaei A., Rabieyan Najafabadi H., Irvani A., Investigation of the effect of support flexural stiffness on the critical compressive buckling force of orthotropic plates in composite aircraft structures, AERO Conference 2020.
22. Nejatbakhsh H., Ghasemi AR., Gharaei A., Najafabadi HR., An analytical-numerical coupled model for an aeroelastic analysis of tail flutter based on bending–torsional coupling, Mechanics of Composite Materials, Vol. 59, pp. 757-768, 2023.
23. Ventsel, E., and Krauthammer, T., *Thin Plates & Shells Theory, Analysis & Applications*, CRC Press, 2001.
24. Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates And Shells*, 2th ed, CRC Press, 2004.
25. Kollar, L., and Springer, G., *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge Univ. Press, 2003.
26. Hassan Afshari, Differential Quadrature Method in Mechanical Engineering Problems, Poyesh Andishe Press, 2019.
27. Ghasemi, AR., Rabieyan Najafabadi, H., Nejatbakhsh, H., Gharaei, A., “Parametric Analysis of Position and Direction of Laminated Composite C-Spar on Aeroelastic Flutter in Aircraft Tail”, *Mechanics of Advanced Composite Structures*, Vol. 11, No. 2, pp.351-362, 2024.
28. Meskini, M, and Ghasemi, A. R., “Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Adhesive Joints with Conical Composite Shell Adherends”, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 29, No. 15-16, pp. 3475-3491, 2022.