Journal of Computational Methods in Engineering, 2025, 43(2), 69-82; DOI: 10.47176/jcme.43.2.1033

JOURNAL OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING

Journal of Computational Methods in Engineering

Journal homepage: https://jcme.iut.ac.ir/

ISSN: 2228-7698 EISSN: 2423-5741

Original Article

A DR-BEM Model for a Half-Space Including the Cavity under Scalar Surface Pulse

Pouya Kavandi[1], Navid Ganjian[1] and Mehdi Panji[2]*

1. Department of Civil Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
2. Department of Civil Engineering, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran

Abstract: In this paper, a two-dimensional half-space model is presented in the presence of a subsurface circular cavity under a uniform surface scalar pulse. In this regard, a dual reciprocity boundary element method (DR-BEM) was successfully developed, in which the discretizing process was only applied to the boundary of the model as well as a few internal points. The simple formulation and step-by-step transient analysis in the absence of time-domain fundamental solutions were some of the characteristics of the implemented approach. First, by introducing the method and briefly presenting the formulation, a time-domain algorithm was prepared based on the mentioned approach, then it was validated by comparing with the existing analytical solutions. Moreover, by modeling a half-space domain including a subsurface circular cavity, the transient displacement was obtained at different points of the ground surface and the cavity wall, subjected to the surface pulse of the Ricker wavelet type function. The results showed that the presence of the cavity was effective not only in changing the distribution pattern, but also in the formation of safe areas behind the wave front. The efficient approach is recommended to all researchers in the field of geotechnical earthquake engineering, especially in the analysis of surface explosions.

Keywords: DR-BEM, half-space, Transient response, Subsurface cavity, Surface Pulse.

Received: May. 12, 2024; Revised: Aug. 18, 2024; Accepted: Sep. 29, 2024; Published Online: Mar. 12, 2024.

* Corresponding Author: m.panji@iauz.ac.ir

How to Cite: Kavandi Pouya, Ganjian Navid and Panji Mehdi, A DR-BEM model for a half-space including the cavity under scalar surface pulse, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 43(2), 69-82; DOI: 10.47176/jcme.43.2.1033.

Copyright © 2025 Isfahan University of Technology, Published by Isfahan University of Technology press. This work is licensed under a Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Non-commercial uses of the work are permitted, provided the original work is properly cited.

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۳، شماره ۲، ۱۴۰۳، ص. ۸۲-۶۹، DOI: 10.47176/jcme.43.2.1033

نشریه علمی ـ پژوهشی روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی

صفحه خانگی نشریه: https://jcme.iut.ac.ir/

شاپا: ۷۶۹۸-۲۲۲۸ شاپا الکترونیکی: ۵۷۴۱-۲۴۲۳

مقاله پژوهشی

مدل اجزای مرزی تقابل دوگانه برای محیط نیم‌فضای حفره‌دار تحت ضربه‌ی اسکالر سطحی

پویا کاوندی[۱]، نوید گنجیان[۱] و مهدی پنجی[۲*]

۱- گروه مهندسی عمران، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- گروه مهندسی عمران، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران

چکیده– در این مقاله به ارائه مدل یک محیط نیم‌فضای دوبعدی در حضور یک حفره دایره‌ای زیرسطحی تحت ضربه‌ی اسکالر یکنواخت سطحی پرداخته شده است. در این میان از روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه استفاده شده است که فرآیند شبکه‌بندی را روی مرز هندسه مدل و در صورت نیاز در اندک نقاط درونی متمرکز می‌سازد. سهولت در فرمول‌بندی و تحلیل گام به گام گذرا در عدم نیاز به هسته‌ها و حل اساسی حوزه زمان از مشخصات بارز این روش محسوب می‌شود. ابتدا ضمن معرفی روش و ارائه مختصر فرمول‌بندی، با تحلیل یک مثال کاربردی، الگوریتم تهیه شده مبتنی بر رویکرد مزبور صحت‌سنجی شده است. سپس با مدل‌سازی یک محیط نیم‌فضای حفره‌دار، تغییرمکان گذرا در نقاط مختلف سطح زمین و پیرامون حفره در برابر تحریک سطحی فشاری از نوع موجک ریکر حساسیت سنجی شده است. نتایج نشان داد حضور حفره نه تنها در تغییر الگوی پراکنش بلکه در تشکیل نواحی امن در پشت جبهه موج مؤثر است. استفاده از این روش کارا در حوزه ژئوتکنیک لرزه‌ای به ویژه در تحلیل‌های حاصل از انفجار سطحی به کلیه محققان توصیه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه، ضربه‌ی سطحی، محیط نیم‌فضای حفره‌دار، پاسخ دینامیکی.

دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۲۳، بازنگری: ۱۴۰۳/۰۵/۲۸، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۰۸، اولین انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۲۲

*: نویسنده مسئول، رایانامه: m.panji@iauz.ac.ir

حق انتشار این مستند، متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است. ۱۴۰۳ ©.

این مقاله تحت گواهی زیر منتشر شده و هر نوع استفاده غیرتجاری از آن مشروط بر استناد صحیح به مقاله و با رعایت شرایط مندرج در آدرس زیر مجاز است:

Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

فهرست علائم

u	تغییرمکان اسکالر	Γ	مرز
$\ddot{u}$	شتاب	Ω	دامنه
c_s	سرعت موج برشی	r_m	فاصله نقطه منبع از نقطه mام
G	مدول برشی	$\alpha(t)$	تابع تقریب زمانی
ρ	چگالی	Δt	طول گام زمانی
u^*	حل اساسی تغییرمکان	∇^2	عملگر لاپلاس
p^*	حل اساسی ترکشن		

۱-مقدمه

انتشار امواج از سطح زمین به درون لایه‌های خاک از جمله پدیده‌هایی است که به‌صورت انفجار، انتشار موج مصنوعی و حرکت وسائط نقلیه سنگین ایجاد می‌شود. این نوع امواج در علوم و صنایع مختلف نظیر صنایع نظامی، مهندسی معدن و بهسازی ژئوتکنیکی خاک مورد توجه هستند. در اغلب موارد انتشار موج سطحی می‌تواند بر سازه‌های مجاور و زیرسطحی مؤثر باشد، به‌طوری‌که تونل‌های زیرزمینی و سازه‌های سطحی پیرامون حوزه انتشار موج تحت تاثیر اثر ناشی از جبهه موج قرار گرفته و دچار آسیب می‌شوند. همچنین موج انعکاس یافته از سطح زمین و سازه‌های زیرسطحی و برگشت آن به درون محیط خاک موجب تداخل امواج شده و متعاقباً موجب پیچیده‌تر شدن الگوی پراکنش و ضرایب بزرگنمایی موج در سطح را به همراه خواهد داشت [۱].

به منظور تحلیل دقیق اثر انتشار موج از سطح، روش‌های متعددی توسعه داده شده است. این روش‌ها در دو دسته عمومی روش‌های صحرایی-آزمایشگاهی و روش‌های محاسباتی تقسیم‌بندی می‌شوند. به‌زعم بسیاری از محققان، روش‌های صحرایی-آزمایشگاهی و نتایج تجربی مستخرج از آن، دقیق‌ترین روش‌ها جهت بررسی اثر انفجار هستند [۲ و ۳]. چارلز و همکاران [۲] با دسته‌بندی روش‌های آزمایشگاهی مختلف در بررسی پدیده انتشار موج حاصل از سطح، یک مطالعه مروری جامع در این زمینه ارائه کردند. همچنین ان و همکاران [۳] نیز با مدل‌سازی آزمایشگاهی پدیده انفجار سطحی، نحوه انتشار موج و اثر آن بر سازه‌های مجاور را ارزیابی نمودند. با وجود مزایای زیاد روش‌های صحرایی-آزمایشگاهی، با این حال پیاده‌سازی این دست روش‌ها بسیار هزینه‌بر بوده و با توجه به شرایط محیطی واقعی همواره قابل اجرا نیست. بنابراین روش‌های محاسباتی می‌تواند به عنوان یک مکمل مهم در کنار روش‌های آزمایشگاهی و تجربی مورد استفاده قرار گیرد. روش‌های محاسباتی قابل تقسیم به روش‌های تحلیلی و عددی است. رویکردهای تحلیلی در مدل‌سازی انتشار موج حاصل از سطح زمین و به‌خصوص موج ناشی از انفجار عمدتاً با ارائه حل بسته[1] معادلات حاکم در محیط دوبعدی و سه‌بعدی همراه هستند. فلدگان و همکاران [۴] از جمله محققانی هستند که برای اولین بار با ترکیب تئوری پروالاستیسته و روش تیرالاستیک تیموشنکو توانستند سرعت ذرات و همچنین تنش‌های حاصل در اثر انتشار موج سطحی را در حضور حفره دایره‌ای پوشش‌دار زیرسطحی به صورت حل بسته ارائه دهند. در مطالعه‌ی عابدی و همکاران [۵] با اعمال برخی فرضیات ساده‌کننده، لوله‌های زیرسطحی مبتنی بر تیر بر بستر الاستیک مدل‌سازی شده و پاسخ تحلیلی برای مؤلفه تغییرمکان ارائه شده است. اخیراً وو و همکاران [۶] یک روش شبه‌تحلیلی برای تعیین شعاع پلاستیک موج انفجار سطحی پیشنهاد کردند. به کمک روش مذکور می‌توان یک تخمین از

شعاع القایی انفجار و نقاط پلاستیک در محیط خاک تعیین نمود. روش‌های تحلیلی به دلیل ارائه حل بسته برای پدیده انتشار موج از سرعت بالایی در مدل‌سازی برخودار هستند. با این حال امکان درنظرگرفتن شرایط پیچیده در این قسم روش‌ها دشوار است.

عددی‌سازی معادلات از جمله روش‌هایی است که در آن امکان مدل‌سازی اثر ناشی از مرزها و هندسه‌های پیچیده و همچنین اثر غیرخطی ناشی از رفتار مصالح فراهم می‌شود. روش‌های عددی به دو دسته روش حجمی[۲] و مرزی تقسیم می‌شوند. در دسته روش‌های حجمی عمدتاً روش اجزای محدود[۳] (FEM) و روش تفاضل محدود[۴] (FDM) مورد توجه قرار می‌گیرد. این روش‌ها با گسسته‌سازی دامنه مسأله موجب می‌شوند تا به‌صورت دقیق تمام نقاط محیط در تحلیل شرکت داده شوند. تحقیقات گسترده‌ای در زمینه مدل‌سازی عددی پدیده انتشار موج حاصل از سطح بدلیل انفجار سطحی به کمک روش‌های حجمی نظیر اجزای محدود صورت گرفته است. هوآنگ و همکاران [۷] از جمله محققانی هستند که به کمک نرم افزار تجاری انسیس[۵] اقدام به مدل‌سازی اندرکنش شمع–سازه در هنگام برخورد امواج منتشر شده از سطح کردند. در این تحقیق علاوه بر ارائه تغییرمکان و فشار وارده شمع، تلاش شده تا اثر موج مؤثر بر سازه‌های دوردست نیز ارزیابی شده و نتایج حاصل در تدقیق آیین‌نامه‌های موجود مورد استفاده قرار گیرد. سیدان و حسینی‌نیا [۸] با استفاده از روش تفاضل محدود به مدل‌سازی تراکم دینامیکی خاک حاصل از موج انفجار پرداختند و اثر حضور حفرات زیرزمینی را ارزیابی نمودند. در مطالعه ملکشاهی و آقاویسی [۹] به‌صورت آزمایشگاهی و عددی اثر انفجار سطحی بر سازه‌های سطحی و زیرسطحی شبیه سازی شد. اخیراً نیز مندال و گوئل [۱۰] به کمک روش اجزای محدود اثر مواد مصنوعی نظیر ژئومتریال را در میرایی و جذب موج منتشر شده از سطح در حضور تونل زیرسطحی مطالعه نمودند. با وجود دقت بالای روش‌های حجمی، حجم بالای محاسبات در این روش‌ها موجب شده تا در سال‌های اخیر روش‌های مرزی مورد توجه باشند. در این روش‌ها عمدتاً گسسته‌سازی مکانی برروی مرزهای مسأله صورت می‌گیرد و نقاط دامنه کمتر در محاسبات نقش داده می‌شوند. روش‌های مرزی به دو دسته روش مستقیم[۶] و روش تقابل‌دوگانه قابل تقسیم هستند. در روش مستقیم مجهولات مسأله اعم از تغییرمکان و تنش‌مرزی (ترکشن) مستقیماً از حل تکینه معادلات تعادل حاصل می‌شوند، در حالیکه در روش تقابل‌دوگانه نیاز است تا برای رفع اثر ناشی از اینرسی از انتگرال–های مضاعف مرزی استفاده شود [۱۳–۱۱]. تحقیقات عمده‌ای در مدل‌سازی پدیده انتشار موج[۷] سطحی به کمک روش‌های مرزی مستقیم صورت گرفته که از آن جمله می‌توان به تحقیقات آرچ و اسمید [۱۴]، چن و همکاران [۱۵] و ابطحی و همکاران [۱۶] اشاره کرد. لازم به ذکر است، از سوی دیگر قابلیت کاربردی روش مزبور در تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی حفرات زیرزمینی کاملاً مشهود است [۱۷ و ۱۸]. استفاده از روش غیرمستقیم با تقابل دوگانه[۸] اولین بار توسط ناردینی و بربیا گزارش شده است [۱۹]. این محققان با توسعه روش مزبور مفهوم و نحوه بکارگیری توابع تقریب را در این روش شرح دادند. روبل و بربیا استفاده از این روش را برای محیط‌های غیرخطی توسعه دادند [۲۰]. بعدها پاتریچ و بربیا توابع تقریب، فرمول‌بندی و الگوریتم‌های روش تقابل دوگانه را برای حل مسائل مختلف ارائه نمودند [۲۱]. در پژوهش آندریج از روش اجزای مرزی تقابل دوگانه برای مدل‌سازی پدیده انتشار موج ناشی از حرکت اتومبیل‌های سنگین بر لایه‌های راهسازی استفاده شد [۲۲]. یان و همکاران با توسعه روش تقابل دوگانه یک روش جدید با عنوان روش هیبریددوگانه را معرفی نمودند که ترکیبی از روش‌های تقابل‌دوگانه، روش نقطه مرزی و روش تقریب شعاعی است [۲۳]. در مطالعه یو و همکاران ضمن توسعه روش تقابل دوگانه، شکل جدید از روش مزبور با عنوان روش تقابل دوگانه ایزومتریک پیشنهاد شد که برای تحلیل انتقال حرارت دینامیکی مناسب است. مهمترین تفاوت این روش با روش‌های متداول تقابل‌دوگانه استفاده از توابع تقریب بی–اسپیلاین در روند تحلیل است [۲۴]. گالویس و همکاران یک نرم‌افزار محاسباتی کامل، برای تحلیل مسائل مختلف الاستودینامیک خطی به کمک روش

تقابل‌دوگانه توسعه دادند [۲۵]. اخیراً نیز ناروائز و یوسچی روش جدیدی جهت بهینه‌سازی انتگرال‌های روش تقابل‌دوگانه استفاده کرده و قابلیت‌های آن را توسعه دادند [۲۶]. روش تقابل‌دوگانه به دلیل فرمول‌بندی ساده‌تر، استفاده از حل‌های اساسی مستقل از زمان و امکان مدل‌سازی مسائل غیرخطی که پیشتر توسط روش‌های مرزی به سختی انجام می‌شد، از مزیت‌های عمده‌ای نسبت به سایر روش‌های تحلیل دینامیکی موجود برخوردار است.

چنانچه ادبیات تحقیق نشان داد توسعه‌ی روش‌های مرزی در قالب روش تقابل دوگانه برای تحلیل دینامیکی محیط نیم‌فضا تحت ضربه‌ی سطحی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین در این پژوهش ضمن گسترش فرمول‌بندی روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه در مدل‌سازی مسأله مزبور و عددی‌سازی آن در یک کد رایانه‌ای، به ارزیابی صحت و سقم نتایج حاصل در مقایسه با ادبیات تحقیق پرداخته می‌شود. سپس با تهیه مدل یک بار سطحی در حضور حفره زیرزمینی، تغییرمکان دینامیکی سطح زمین و پیرامون حفره حساسیت‌سنجی می‌شود. توسعه یک روش کارا در تسهیل مدل‌های انفجار و ارائه برخی نتایج جدید بر نقاط قوت و نوآوری در سهم دانش تحقیق حاضر صحه می‌گذارد.

۲-معادله حاکم و حل تقابل‌دوگانه

با اعمال تجزیه هلمهولتز بر معادلات تعادل سه‌بعدی الاستودینامیک، دو دسته معادله قابل استخراج هستند که یک دسته شامل معادلات برداری معرف تغییرمکان درون‌صفحه و دسته دوم معادله موج اسکالر[۹] معرف تغییرمکان برون‌صفحه است[۱۱-۱۳ و ۱۹]. بدین ترتیب معادله انتشار موج اسکالر دوبعدی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۹]:

$$C_s^2\nabla^2 u = \ddot{u} \qquad (۱)$$

که در آن C_s مبین سرعت موج برشی است. این پارامتر برحسب چگالی ρ و مدول برشی G به صورت $C_s = \sqrt{G/\rho}$ قابل محاسبه است. همچنین، در این رابطه u معرف مؤلفه تغییر مکان برون-صفحه و $\ddot{u}$ مبین شتاب حرکت است. به منظور حل معادله مذکور به کمک روش تقابل‌دوگانه با پیش ضرب حل اساسی استاتیکی فضای کامل به طرفین معادله و استفاده از روش باقیمانده‌های وزن‌دار و سپس فرآیند مرزی‌سازی، معادله انتگرال مرزی-حجمی زیر حاصل می‌شود [۱۹]:

$$C_s^2\left[c^i u^i + \int_\Gamma p^* u\, d\Gamma - \int_\Gamma u^* p\, d\Gamma\right] = \int_\Omega u^* \ddot{u}\, d\Omega \qquad (۲)$$

که در آن u^* و p^* به ترتیب حل‌های اساسی استاتیکی برای مؤلفه‌های تغییرمکان[۱۰] و ترکشن[۱۱] بوده و در مرجع مختلف [۱۲ و ۱۳ و ۲۰-۲۲] دردسترس هستند. در این معادله u و p به ترتیب مؤلفه تغییرمکان و ترکشن است. وجود عامل اینرسی $\ddot{u}$ و انتگرال حجمی مرتبط با آن موجب می‌شود که معادله فوق کاملاً مرزی (Γ) نباشد و گسسته‌سازی حجمی محیط مسأله ضروری گردد. به منظور حل این مشکل از مفهوم تابع تقریب[۱۲] استفاده می‌شود. بنابراین لازم است ابتدا تابع تغییرمکان به شکل زیر تقریب زده شود:

$$\ddot{u} = \sum_{m=1}^{M} (K - r_m)\, \ddot{\alpha}_m(t) \qquad (۳)$$

که در آن K یک عدد ثابت بین صفر تا دو [۲۰-۲۲]، r_m فاصله منبع بار از نقطه گیرنده mام و $\ddot{\alpha}_m$ ثابت زمانی مجهول mام است. طبق معادله فوق برای تقریب میدان تغییرمکان مجموعاً از M عدد تابع تقریب استفاده شده است. بنابراین براساس اینکه عامل زمان به صورت $\ddot{\alpha}_m$ تنها مجهول معادله (۳) است، می‌توان انتگرال‌های حجمی مرتبط با توابع فاصله را در یک فرآیند مرزی‌سازی مجدد قرار داد. بدین منظور و جهت مرزی‌سازی مجدد با جایگذاری رابطه (۳) در معادله انتگرالی (۲)، جملات موجود در طرف راست معادله به شکل زیر بازنویسی می‌شوند [۱۳]:

$$\int_\Omega u^* \ddot{u}\, d\Omega = \sum_{m=1}^{M} \int_\Omega u^*(K - r_m)\, d\Omega\; \ddot{\alpha}_m(t) \qquad (۴)$$

همان‌طور که در رابطه فوق قابل مشاهده است انتگرال حجمی سمت راست، کاملاً معلوم بوده و می‌توان به کمک تئوری تقابل

دوطرفه بتی آن را به انتگرال مرزی تبدیل کرد [۲۱، ۲۳]:

$$\int_{\Omega} u^*(K - r_m)\, d\Omega = -c^{(i)}\left[\frac{K}{4} + \frac{r_m^{(i)}}{9}\right] r_m^{2(i)} - \int_{\Gamma} p^*\left[\frac{K}{4} + \frac{r_m^{(i)}}{9}\right] r_m^{2(i)}\, d\Gamma + \int_{\Gamma} u^*\left[\frac{K r_m^{(i)}}{2} + \frac{r_m^{2(i)}}{3}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\, d\Gamma \quad (۵)$$

در نهایت فرم کلی و مرزی شده معادله انتشار موج را به صورت زیر حاصل کرد [۱۳، ۲۱ و ۲۳]:

$$C_s^2\left[c^{(i)}u^{(i)} + \int_{\Gamma} p^* u\, d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* p\, d\Gamma\right] = \sum_{m=1}^{M}\left\{-c^{(i)}\left[\frac{K}{4} + \frac{r_m^{(i)}}{9}\right] r_m^{2(i)} - \int_{\Gamma} p^*\left[\frac{K}{4} + \frac{r_m^{(i)}}{9}\right] r_m^{2(i)}\, d\Gamma + \int_{\Gamma} u^*\left[\frac{K r_m^{(i)}}{2} + \frac{r_m^{2(i)}}{3}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\, d\Gamma\right\}\ddot{\alpha}_m(t) \quad (۶)$$

که در رابطه فوق n مبین مؤلفه بردار نرمال عمود بر مرز، $r_m^{(i)}$ تابع فاصله در گره مورد ارزیابی mام و $c^{(i)}$ زاویه شکست مرزی گره iام است. با وجود اینکه معادله (۶) کاملاً مرزی است، ولی مطالعات مختلف [۲۰ ، ۳۱ و ۳۳] نشان داده است که انتخاب تعداد معینی نقاط درونی[۱۳] در دامنه مسأله یک امر ضروری در روش تقابل‌دوگانه است و موجب تسهیل و تدقیق فرآیند تحلیل می‌شود.

۳- مدل‌سازی عددی

از گسسته‌سازی مکانی معادله انتگرال مرزی (۶) به کمک NE المان مرزی درجه ثابت و M تابع تقریب، فرم قابل حل معادله موج به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[H]\{U\} + [G]\{P\} = [M]\{\ddot{\alpha}\} \quad (۷)$$

که در آن $\{U\}$ و $\{P\}$ به ترتیب مبین تغییرمکان و تنش مرزی در نقاط گره‌ای بوده و $[H]$، $[G]$ و $[M]$ ماتریس ضرایب به شکل زیر هستند:

$$H = C_s^2 \sum_{i=1}^{NE}\int_{\Gamma_i} p^*\, d\Gamma_i \quad (۸)$$

$$G = C_s^2 \sum_{i=1}^{NE}\int_{\Gamma_i} u^*\, d\Gamma_i \quad (۹)$$

$$M = \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{NE}\left\{-\int_{\Gamma_i} p^*\left[\frac{K}{4} + \frac{r_m}{9}\right] r_m^2\, d\Gamma_i + \int_{\Gamma_i} u^*\left[\frac{K r_m}{2} + \frac{r_m^2}{3}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\, d\Gamma_i\right\} \quad (۱۰)$$

همچنین طبق رابطه (۳) می‌توان نوشت:

$$\{\ddot{U}\} = [F]\{\ddot{\alpha}\} \;\rightarrow\; \{\ddot{\alpha}\} = [F]^{-1}\{\ddot{U}\} \quad (۱۱)$$

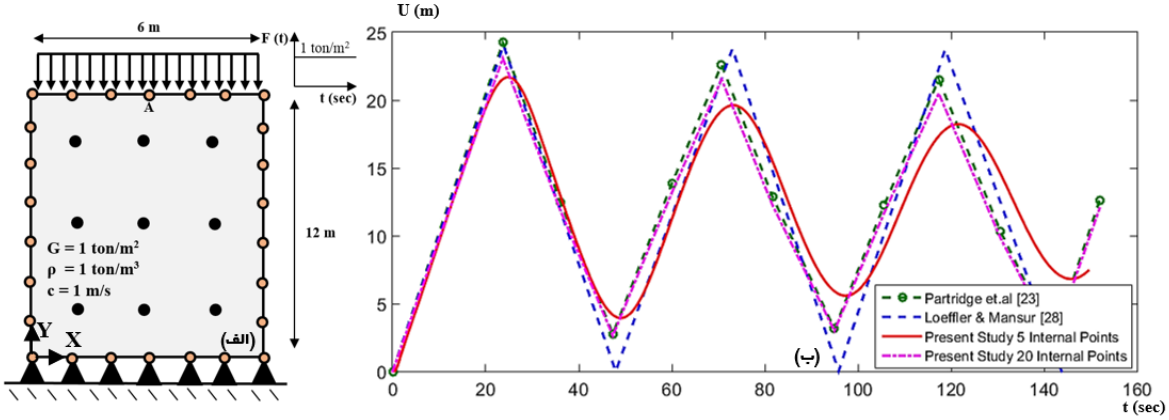
با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۷) در نهایت فرم گسسته معادله موج بر حسب تغییرمکان و شتاب بشکل زیر تعیین می‌شود:

$$[H]\{U\} + [G]\{P\} = [M][F]^{-1}\{\ddot{U}\} \quad (۱۲)$$

علاوه بر گسسته‌سازی مکانی معادلات مرزی، نیاز است تا تغییرات زمانی میدان تغییرمکان در رابطه (۱۲) نیز گسسته‌سازی شوند. محققان مختلف از روش‌هایی نظیر تفاضل محدود [۳۰]، هوبلت[۱۴] [۳۴] و بتای نیومارک[۱۵] [۲۷] در این جهت بهره برده‌اند. با این حال ناردینی و بربیا [۲۰، ۳۱ و ۳۳] در مطالعات خود نشان داده‌اند که روش هوبلت به دلیل ایجاد نوعی میرایی محاسباتی از ناپایدار شدن پاسخ‌ها در روش اجزای مرزی با تقابل‌دوگانه جلوگیری می‌کند و بنابراین در این تحقیق از روش هوبلت جهت گسسته‌سازی جملات زمانی استفاده شده است. از گسسته‌سازی محور زمان با N گام زمانی به طول Δt، روش هوبلت برای تخمین مؤلفه اینرسی به صورت زیرقابل استفاده است:

$$\{\ddot{U}\} = \frac{2\{U\}^{t+\Delta t} - 5\{U\}^{t} + 4\{U\}^{t-\Delta t} - \{U\}^{t-2\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (۱۳)$$

که در آن $\{U\}^{t+\Delta t}$، $\{U\}^{t}$، $\{U\}^{t-\Delta t}$ و $\{U\}^{t-2\Delta t}$ به ترتیب مبین میدان تغییرمکان در گام‌های زمانی $t+\Delta t$، t، $t-\Delta t$ و $t-2\Delta t$ هستند. در نهایت معادله گسسته‌شده (۱۲) با بکارگیری



شکل ۱- مدل اجزای مرزی تقابل‌دوگانه یک محیط پیوسته دوبعدی به صورت تیر یک سرگیردار الف) هندسه مدل تحت مطالعه ب) تغیرمکان اسکالر نقطه A

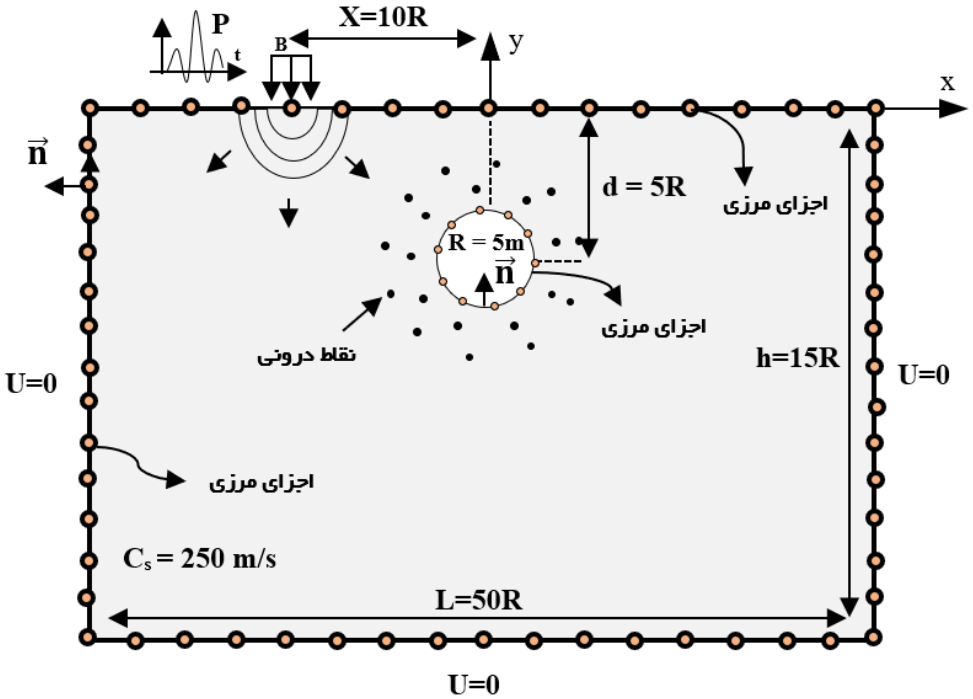
معادله (۱۳) در یک کد رایانه‌ای به زبان متلب پیاده‌سازی شده و نتایج حاصل از آن به کمک حل‌های بنچمارک در ادامه صحت-سنجی شده است.

۴-صحت‌سنجی

به منظور صحت‌سنجی فرمول‌بندی و کد رایانه‌ای توسعه داده شده، از یک مسأله دینامیکی کلاسیک با پاسخ‌های تحلیلی در دسترس استفاده شده است. در این راستا مطالعه لوفر و منصور [۲۸] مورد توجه قرار گرفته است که در آن تغییرمکان و تنش‌های دینامیکی یک محیط پیوسته دوبعدی به‌صورت یک تیر یک سرگیردار تحت فشار یکنواخت گذرا ارائه شده است. این پاسخ تحلیلی برای مؤلفه تغییرمکان دینامیکی در نقطه میانی سطح بارگذاری (نقطه A در شکل ۱-الف) استخراج شده و با پاسخ دینامیکی حاصل از کد رایانه‌ای مقایسه شده است. به منظور مدل‌سازی تقابل‌دوگانه این هندسه تنها از ۲۰ المان مرزی و ۹ نقطه درونی استفاده شده است. طول گام زمانی برابر Δt برابر ۰/۵ ثانیه در نظر گرفته شده و تعداد گامهای زمانی برابر ۳۰۰ انتخاب شده است. بارگذاری از نوع ثابت دینامیکی با شدت یک تن بر متر مربع بر وجه آزاد تیر وارد شده است. سایر مشخصات مدل در شکل (۱-الف) ارائه شده است. در شکل (۱-ب) نتایج حاصل از روش تقابل‌دوگانه و روش تحلیلی لوفر و منصور [۲۸] برای مؤلفه تغییرمکان نقطه A مقایسه شده است. همچنین به منظور مقایسه هر چه بهتر، نتایج حاصل از روش اجزای مرزی که برای مسأله مشابه توسط پارتریج و همکاران [۲۰] حل شده نیز در شکل (۱-ب) نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود روش تقابل‌دوگانه به خوبی قابلیت مدل‌سازی اثر انتشار بار دینامیکی سطحی را دارا است.

۵-مطالعه پارامتریک

یکی از مهمترین مسائل دینامیکی مطرح در علوم مهندسی معدن و ژئوتکنیک پدیده انتشار بار به صورت ضربه آنی در سطح زمین است. در مهندسی ژئوتکنیک این گروه از امواج در دسته امواج انفجاری برای تراکم خاک یا به شکل ضربه برشی دینامیکی در روش‌های صحرایی برای شناسایی خاک کاربرد دارد. همواره از پدیده انفجار سطحی[۱۶] برای تراکم بزرگ مقیاس بسیار استفاده شده است [۲ و ۳]. همچنین در مهندسی معدن از روش انفجار برای استخراج و روآوری ذخایر زیرزمینی معادن بهره برده می‌شود [۴]. وجود روش‌های قابل اعتماد عددی همواره از چالش‌های تحلیل انفجار و انتشار موج از سطح بوده است. روش مرزی[۱۷] به



شکل ۲- مدل اجزای مرزی تقابل‌دوگانه یک لایه خاک مشتمل بر حفره دایره‌ای زیر سطحی در برابر یک ضربه‌ی فشاری در سطح از نوع موجک ریکر

دلیل گسسته‌سازی مرزی می‌توانند یک راه حل بهینه برای مدل‌سازی بزرگ مقیاس پدیده انتشار موج از سطح به حساب آیند. بنابراین در این قسمت با مدل‌سازی مسأله انتشار موج حاصل از سطح زمین به کمک روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه تلاش می‌شود تا کارایی این روش عددی برجسته شود.

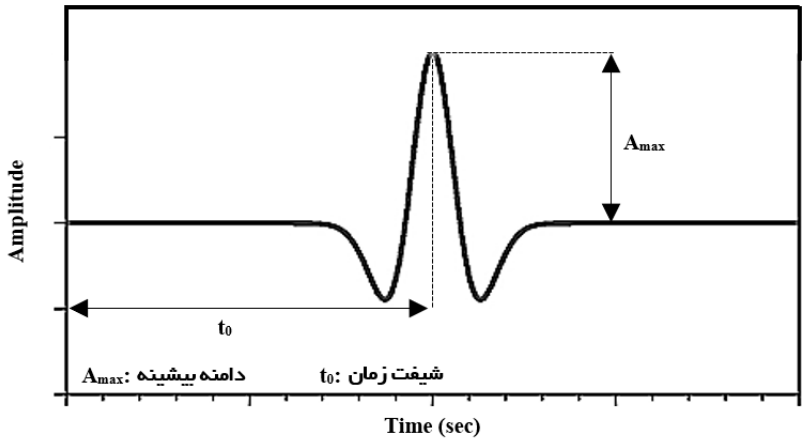
۵ -۱- مشخصات مدل

در شکل (۲) نمای کلی مدل یک محیط خاک شامل یک حفره دایره‌ای زیرزمینی با شعاع R و مدفون در عمق ۵R نشان داده شده است. محیط مورد نظر دارای مشخصات مصالح با سرعت موج برشی C_s معادل ۲۵۰ متر بر ثانیه و مدول برشی G، $۱۰^۶$ نیوتن بر متر مربع است. سطح زمین به صورت تنش آزاد بوده و موج منتشر شده از نوع تنش به صورت تابع ریکر است که به‌صورت ناگهانی در نقطه X در فاصله ۱۰R در سطح وارد می‌شود. به منظور تحلیل مدل به روش تقابل‌دوگانه از ۵۰ المان مرزی و ۲۰ نقطه درونی استفاده شده است. نحوه چیدمان نقاط درونی مطابق شکل (۲) انجام گرفته است. موجک ریکر به‌صورت یک موج فشاری با دامنه P برابر، یک تن بر متر مربع در عرض B به طول یک متر (R/5) در سطح وارد می‌شود. پارامتر شیفت زمان موجک ریکر معادل ۱/۵ ثانیه و فرکانس آن ۲/۵ هرتز در نظر گرفته شده است. شمای کلی موجک ریکر مورد استفاده در این تحقیق در شکل (۳) نمایش داده شده است. شایان ذکر است، برای حل این مسأله از ۲۰۰ گام زمانی با حدفاصل ۰/۱ ثانیه استفاده شده است.

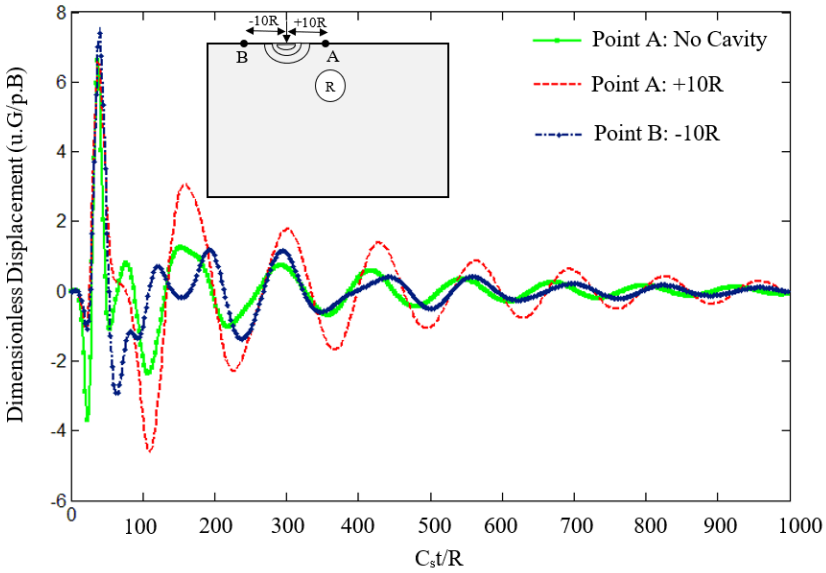
محققان مختلف از یک پارامتر بی‌بعد با عنوان β جهت تعیین رابطه بین حداکثر فاصله بین گره مرزی و طول گام زمانی بهره می‌برند. این پارامتر به کمک رابطه زیر قابل تعریف است [۳۲]:

$$\beta = \frac{C.\Delta t}{L} \qquad (۱۴)$$

که در آن C سرعت موج برشی، Δt طول گام زمانی و L فاصله بین گره مرزی است. طبق تحقیقات انجام شده مدل عددی اجزای مرزی زمانی دارای پایداری و همگرایی است که پارامتر β به یک نزدیک باشد. بدین ترتیب می‌توان با در دسترس بودن مشخصات



شکل ۳- تابع موجک ریکر به عنوان موج انتشار یافته سطحی. در این شکل A_{max} مبین دامنه بیشینه موج و t_0 پارامتر شیفت زمانی است.



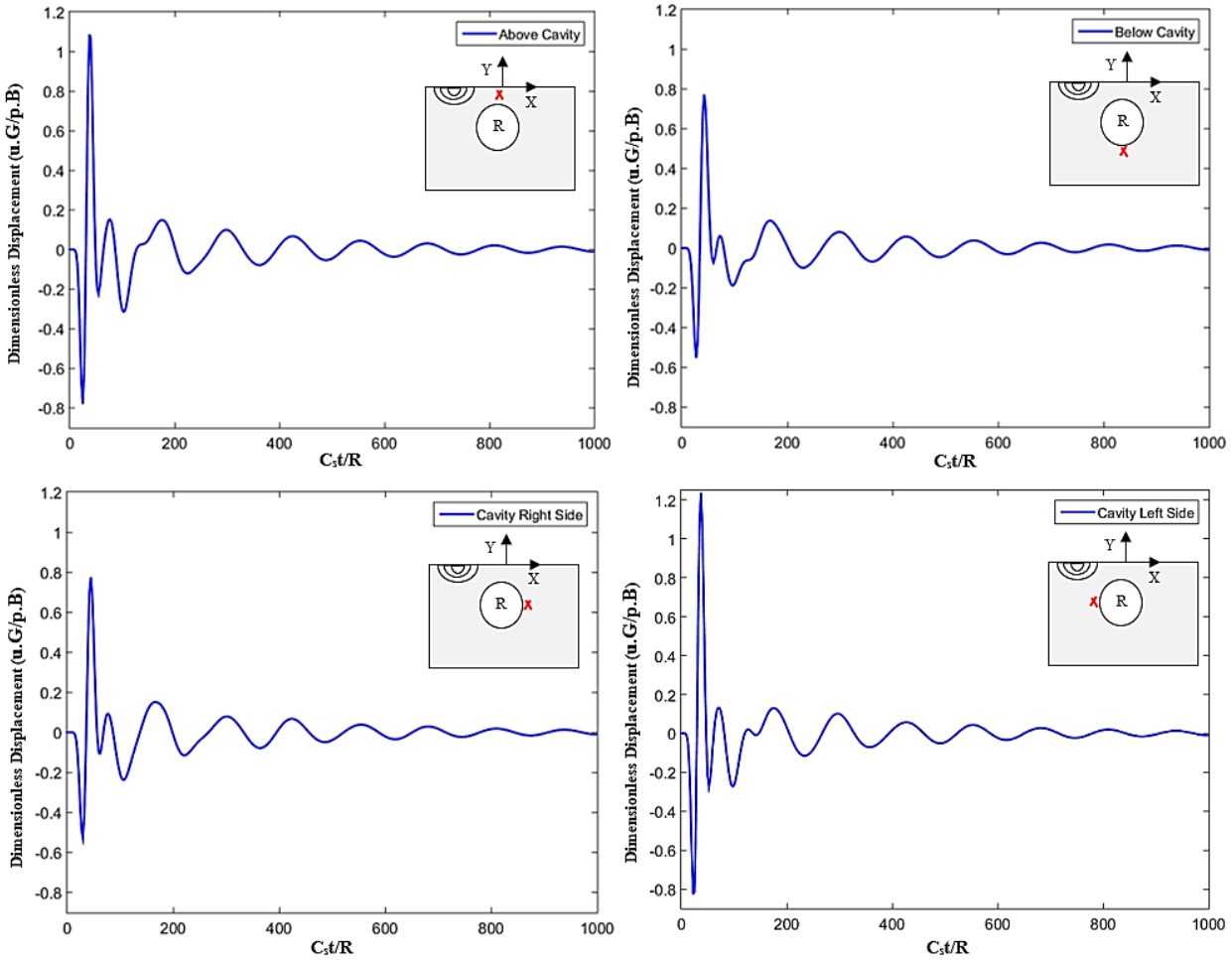
شکل ۴- دامنه تغییرمکان برون‌صفحه بی‌بعد سطح زمین برای نقاط A و B به ترتیب در فواصل مثبت و منفی ۱۰ برابر شعاع حفره از مرکز ناحیه ضربه‌ی فشاری(لازم به ذکر است در این شکل پاسخ نقطه A در حالت عدم حضور حفره نیز نشان داده شده است).

مصالح و طول گام زمانی حداکثر طول المان مرزی را طبق رابطه زیر تعیین نمود:

$$L \cong C.\Delta t \qquad (۱۵)$$

۵ -۲- نتایج حوزه زمان

یکی از قابلیت‌های مهم روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه امکان استخراج مستقیم پاسخ‌های دینامیکی در حوزه زمان است. در شکل (۴) تغییر مکان بی‌بعد دو نقطه در فاصله مفروض ۱۰R (۵۰ متر) در طرفین مرکز محل اعمال ضربه سطحی ارائه شده است. آنچه مسلم است در شرایط عدم حضور حفره پاسخ این دو نقطه یکسان است، درصورتی‌که حضور حفره موجب می‌شود تا پاسخ نقطه نزدیک متفاوت از پاسخ ناحیه دور از حفره باشد. بنابراین چنانچه در شکل (۴) مشاهده می‌شود، نوسان حاصل در پاسخ در نواحی نزدیک حفره تا مدت زمان بیشتر در سطح باقی می‌ماند درحالی‌که در نواحی دورتر میرا شدن پاسخ سریع‌تر به‌وقوع پیوسته است. این مورد می‌تواند به دلیل انعکاس و اثر



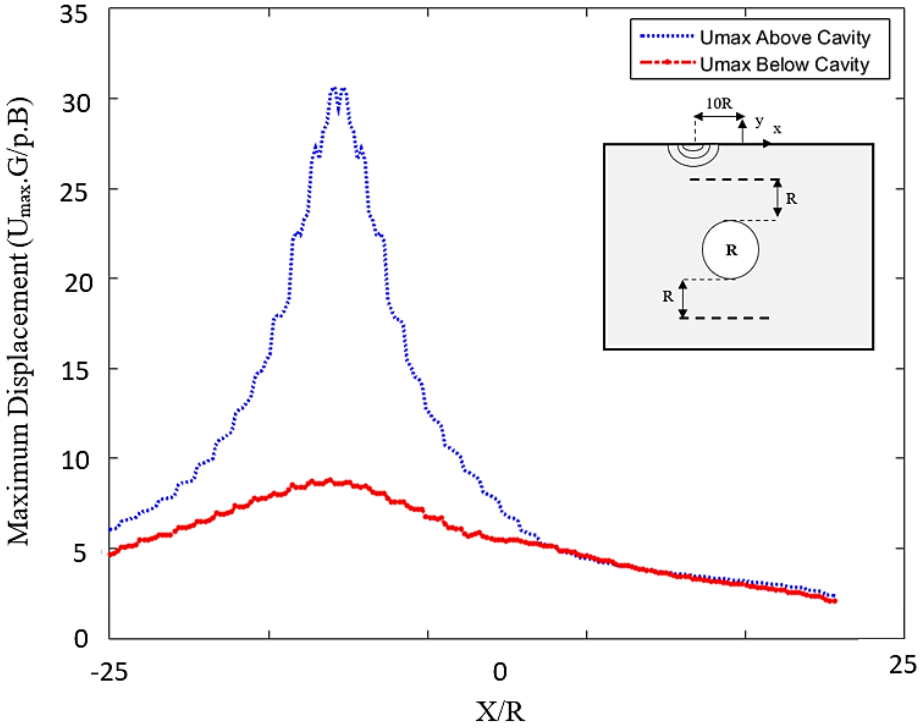
شکل ۵- تغییرمکان بی‌بعد نقاط پیرامون حفره دایره‌ای الف) تاج حفره ب) کف حفره پ) دیواره راست حفره ت) دیواره چپ حفره

پراکنش ناشی از حضور حفره باشد به‌طوری‌که امواج بین حفره و سطح زمین محصور می‌شوند و برهم نهی بخشی از آن موجب افزایش مقطعی دامنه پاسخ و ازدیاد انرژی آن خواهد شد. اما در ناحیه دورتر شرایط متفاوت است به‌طوری‌که در این نواحی پاسخ حاصل عمدتاً با پاسخ حالت بدون حفره یکسان هستند. در شکل (۵) تغییرمکان چهار سمت پیرامون حفره دایره در نواحی تاج، کف، راست و چپ حفره بر حسب زمان ترسیم شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، تغییرمکان بیشینه نقاط تاج حفره نسبت به کف ۱/۵ برابر بیشتر است.

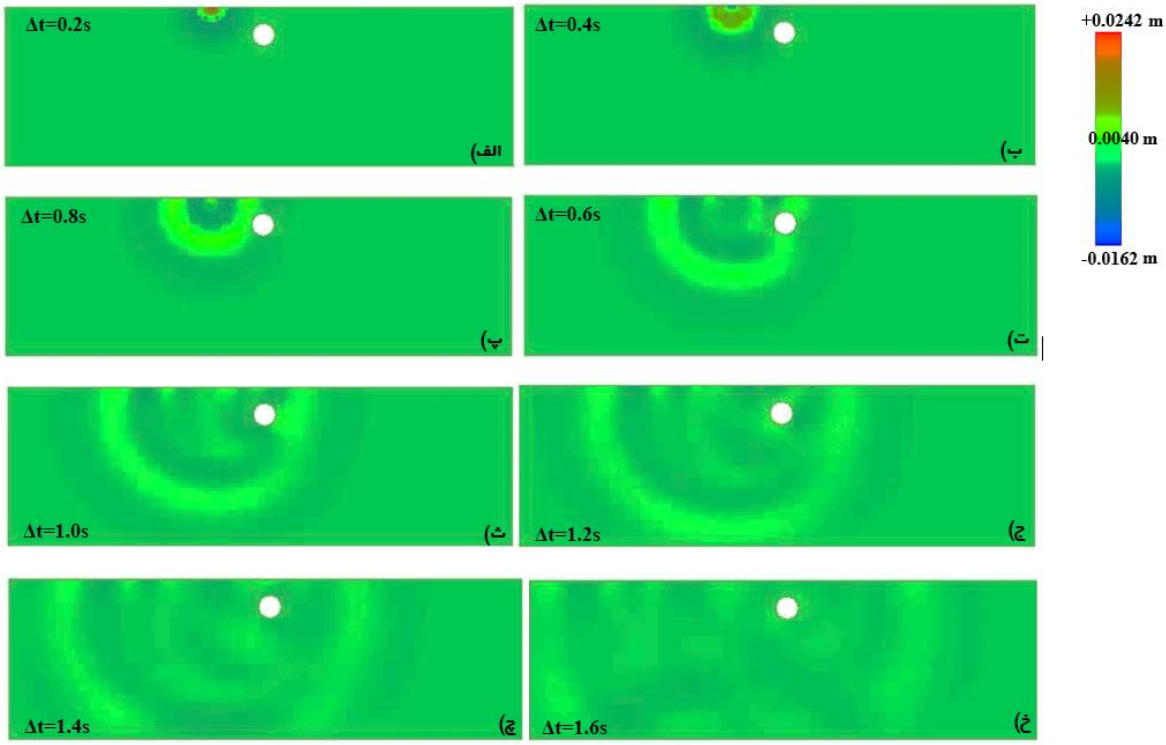
به صورت مشابه در شکل (۶) دامنه تغییرمکان بی بعد نقاط واقع بر روی یک خط مستقیم افقی در فاصله R (پنج متر) بالا و پایین حفره نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، تغییرمکان در نزدیکی ناحیه ضربه بیشینه است و با فاصله گرفتن از آن کاهش می‌یابد. همچنین دامنه تغییرمکان با فاصله گرفتن از سطح زمین کاهش می‌یابد و این کاهش با ضریب شش برابر رخ داده است.

۵ -۳- نمودار حرارتی

یکی از ویژگی‌های مهم روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه آن است که برای کلیه نقاط داخل محیط مورد تحلیل، تغییرمکان دینامیکی در گام‌های زمانی مختلف قابل حصول است و نمودارهای همتراز ترسیم می‌شود. بر این اساس در شکل (۷) نمودار حرارتی (اسنپ شات) توسعه و پراکنش موج بر حسب زمان ارائه شده است. چنانچه مشاهده می‌شود با انتشار موج ضربه و برخورد آن به حفره



شکل ۶- دامنه بی‌بعد تغییرمکان برای نقاط واقع بر امتداد مستقیم افقی در فاصله R بالا و پایین حفره



شکل ۷- نمودار حرارتی برای ضربه‌ی فشاری سطحی در حضور حفره دایره‌ای زیرسطحی

زیرسطحی امواج انعکاس یافته از سطح حفره به سمت سطح زمین بازگشته و پس از انجام تداخل و بر هم نهی امواج، یک الگوی اندرکنشی پیچیده در ناحیه نزدیک جبهه انتشار شکل می‌گیرد. این در صورتی است که در ناحیه پشت جبهه انتشار، یک ناحیه به اصطلاح سایه شکل گرفته که پاسخ‌ها در آن کمینه هستند. به عبارت دیگر حفره همانند یک جاذب موج عمل کرده و مانع از نفوذ موج به ناحیه مورد نظر شده است. همچنین در نمودار حرارتی (شکل ۷-ت) مؤلفه‌های انعکاس از سطح حفره نیز به خوبی توانایی روش تقابل‌دوگانه در مدل‌سازی این مسائل را نشان می‌دهند.

۶-نتیجه‌گیری

در این مقاله به تحلیل انتشار موج ناشی از یک ضربه‌ی فشاری سطحی در حضور یک حفره دایره‌ای زیرسطحی پرداخته شد. در این راستا از روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه استفاده شد که فرآیند شبکه‌بندی را برروی مرز مدل و در صورت نیاز در اندک نقاط درونی نهادینه ساخت. ضمن توسعه فرمول‌بندی برای مسأله مزبور و ارائه فرم گسسته‌شده آن، یک الگوریتم گام به گام محاسباتی به کمک زبان متلب توسعه داده شد. در ادامه دقت نتایج حاصل با تحلیل برخی مسائل کلاسیک در مقایسه با پاسخ-های تحلیلی در دسترس صحت‌سنجی شد. نتایج اعتبارسنجی از تدقیق و قابلیت روش تقابل‌دوگانه در تحلیل مسائل انتشار موج حاصل از سطح حکایت داشت. در گام بعد با مدل‌سازی انتشار موج ضربه‌ای مؤثر در سطح زمین در حضور حفره زیرسطحی تلاش شد تا پاسخ در نقاط مختلف ارائه و مقایسه شود. در نهایت نیز قابلیت‌های بارز روش تقابل‌دوگانه با فرض تعداد بی‌شمار نقاط درونی و حصول نمودار حرارتی انتشار موج در نقاط مختلف مبرم شد. نتایج حاصل از این پژوهش و مطالعه پارامتریک انجام شده به صورت زیر قابل جمع‌بندی است:

۱- روش تقابل‌دوگانه یک روش مرزی کارا در مدل‌سازی مسائل دینامیکی شناخته شد و به دلیل به‌کارگیری حل‌های اساسی استاتیکی مستقل از زمان در حل مسائل دینامیکی، فرمول‌بندی و روند مدل‌سازی ساده‌تری را نسبت به سایر روش‌ها ارائه نمود. با این حال استفاده از نقاط درونی جهت افزایش دقت محاسبات در این روش اجتناب ناپذیر شد که تا حدودی از رویکرد مرزی محض فاصله گرفت.

۲- مشاهده شد در استفاده از روش تقابل‌دوگانه تنها مستلزم به گسسته‌سازی مرزهای محیط مسأله شامل مرز محیط خاک و مرز حفره شد. نقاط درونی در مدل‌سازی تقابل‌دوگانه تنها در محدوده اطراف حفره و ناحیه مجاور ضربه‌ی فشاری انتخاب شد.

۳- با علم بر تداخل و برهم‌نهی امواج بین حفره و سطح زمین، عدم همگرایی زود هنگام در پاسخ سطح برای نقطه نزدیک حفره حاصل شد. این در صورتی بود که برای نقطه دور از حفره نوسان پاسخ مشابه محیط خاک بی‌حفره بود و تسریع در همگرایی مشاهده شد.

۴- از نتایج پیرامون حفره مشخص شد که تغییرمکان تاج با شدت بیشتر و در حدود ۱/۵ برابر پاسخ کف عارضه حاصل شد. همچنین در نزدیک‌ترین نقطه به محل اعمال ضربه(دیواره چپ حفره) حداکثر ضریب بزرگنمایی[۱۸] در حدود ۱/۷ به‌چشم خورد.

۵- چنانچه از نتایج نقاط هم‌عمق در بالا و پایین حفره مشاهده شد تغییرمکان در نزدیکی ضربه‌ی فشاری با پیک ناگهانی مواجه شد که این مقدار با ضریب افزایش شش برابر در مقایسه با نقاط پیرامون در بالای حفره رویت شد.

واژه‌نامه

1- Closed Form Solution
2- Volumetric Methods
3- Finite Element Method
4- Finite Difference Method
5- Ansys Software
6- Direct Boundary Element Method (DBEM)
7- Wave Propagation
8- Dual Reciprocity Boundary Element Method (DR-BEM)
9- Scalar Wave
10- Displacement Fundamental solution
11- Traction Fundamental solution
12- Approximate Function
13- Internal Points
14- Houbolt Method
15- Newmark Beta Method
16- Surface Explosion
17- Boundary Methods
18- Amplification Factor

۷-مراجع

References

1. Kramer, S., *Geotechnical Earthquake Engineering*, Prentice Hall, London, 1996.
2. Charles, E., Anderson, Jr., Behner, T., and Carl, E. W., "Mine Blast Loading Experiments", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 38, pp. 697-706, 2011.
3. An, J., Tuan, C. Y., ASCE, F., Cheeseman, B. A., and Gazonas, G. A., "Simulation of Soil Behavior under Blast loading", *International Journal of Geotechnics*, Vol. 10, pp. 323-334, 2011.
4. Feldgun, V. R., Kochetkov, A. V., Karinski, Y. S., and Yankelevsky, D. Z., "Blast Response of a Lined Cavity in a Porous Saturated Soil", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 35, pp. 953-966, 2008.
5. Abedi, A. S., Hataf, N., and Ghahramani, A., "Analytical Solution of the Dynamic Response of Buried Pipelines Under Blast Wave", *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, Vol. 88, pp. 301-306, 2016.
6. Wu, Z., Rao, P., Nimbalkar, S., Chen, Q., Cui, J., and Ouyang, P., "A Semi-Analytical Solution for Shock Wave Pressure and Radius of Soil Plastic Zone Induced by Lightning Strikes", *Materials*, Vol. 15, No. 2239, pp. 2-18, 2022.
7. Huang, B., Gao, Q., Wang, J., Jiang, X., Wang, X., Jiang, B., and Wu, W., "Dynamic Analysis of Pile-Soil-Structure Interaction System Under Blasting Load", *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 638, pp. 433-436, 2014.
8. Seyedan, M. J., and Seyedi Hosseininia, E., "Significance of Soil Compaction on Blast Resistant Behavior of Underground Structures: A Parametric Study", *Civil Engineering Infrastructures Journal*, Vol. 48, No. 2, pp. 359-372, 2015.
9. Malekshahi, M., and Akhaveissy, A. H., "Experimental Study of Masonry Structure under Impact Loading and Comparing it with Numerical Modeling Results via Finite Element Model Updating", *Journal of Rehabilitation in Civil Engineering*, Vol. 8, pp. 90-105, 2020.
10. Mandal, J., and Goel, M. D., "Effect of Geo-Material on Dynamic Response of Tunnel Subjected to Surface Explosion", *Geotechnics*, Vol. 2, pp. 635-648, 2022.
11. Banerjee, P. K., and Butterfield, R., *Boundary Element Method in Geomechanics*, Wiley, London, 1977.
12. Brebbia, C. A., and Dominguez, J., *Boundary Elements an Introductory Course, Computational Mechanics Publications*, ISBN: 1562520873, 1992
13. Dominguez J., *Boundary Element in Dynamics. Computational Mechanics Publications*. ISBN: 1562521829, 1993.
14. Auersch, L., and Schmid, G., "A simple Boundary Element Formulation and Its Application to Wavefield Excited Soil-Structure Interaction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 931-947, 1990.
15. Chen, H., Zhou, J., Fan, H., Jin, F., Xu, Y., Qiu, Y., Wang, P., and Xie, W., "Dynamic Responses of Buried Arch Structure Subjected to Subsurface

Localized Impulsive Loading: Experimental Study", *International Journal of Impact Engineering*, pp. 1-57, 2013.

16. Abtahi, F., Hosseini, M., and Shah Hosseini, A., "Effect of Blast Loading on Stability of Ghareh Changool Ramp in Zehabad Lead and Zinc Mine", *Journal of Engineering Geology*, Vol. 13, No. 3, pp. 339-364, 2019.

17. Panji, M., and Ansari, B., "Modeling Pressure Pipe Embedded in Two-Layer Soil by a Half-Plane BEM", *Computers and Geotechnics*, Vol. 81, pp. 360-367, 2017a.

18. Panji, M., and Ansari, B., "Transient SH-Wave Scattering by the Lined Tunnels Embedded in an Elastic Half-Plane", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 84, pp. 220-230, 2017b.

19. Nardini, D., and Brebbia, C. A., "A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 7, pp. 157-162, 1983.

20. Wrobel, L. C., and Brebbia, C. A., "The dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Nonlinear Diffusion Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 65, pp. 147-164, 1987.

21. Partridge, P. W., Brebbia, C. A., and Wrobel, L. C., *The Dual Reciprocity Boundary Element Method. Computational Mechanics Publications*, ISBN: 0945824823, 1992.

22. Andrej. T, "Wave Propagation In Homogeneous Elastic Half-Space Using The Dual Reciprocity Boundary Element Method", *Ph.D Thesis*, Faculty of Civil Engineering of the Ruhr University Bochum, 2005 .

23. Yan. F, Feng. X. and Zhou. H, "A Dual Reciprocity Hybrid Radial Boundary Node Method Based on Radial Point Interpolation Method", *Computational Mechanics*, Vol. 45, pp. 541-552, 2010.

24. Yu, B., Cao, G., Huo, W., Zhou, H., and Atroshchenko, E., "Isogeometric Dual Reciprocity Boundary Element Method for Solving Transient Heat Conduction Problems with Heat Sources", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol, 385, No. 113197, pp. 1-20, 2021.

25. Galvis. A. F., Prada. D. M., Moura. L. S., Zavaglia. C., Foster. J. M., Sollero. P., and Wrobel. L. C., "BESLE: Boundary Element Software for 3D Linear Elasticity", *Computer Physics Communications*, Vol. 265, p. 108009, 2021.

26. Yu. J., Lei. Z., Yao. Q., Zhou. F., and Pan. X., "A Bounded Randomly Variable Shape Multi-Quadric Interpolation Method in Dual Reciprocity Boundary Element Method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 134, pp. 377-387, 2022.

27. Newmark, N. M., "A Method of Computation for Structural Dynamics", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, No. 3, pp. 67-94, 1959.

28. Loeffler, C. F., and Mansur, W. J., Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Potential Problems in Infinite Domains, in Boundary Elements X, Computational Mechanics Publications, Vol 2, Berlin and New York. 1988.

29. Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 194.

30. Partridge, P. W., and Brebbia, C. A., Computer Implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the Solution of General Field Equations", *Communications in Applied numerical methods*, Vol. 6, pp. 83-92, 1990.

31. Nardini, D., and Brebbia, C. A., *Boundary Integral Formulation of Mass Matrixes for Dynamic Analysis, In Topics in Boundary Research*. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1985.

32. Dominguez, J., and Meise, T., "On the Use of the BEM for Wave Propagation in Infinite Domains", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 8, No. 3, pp. 132-138, 1991.

33. Nardini, D., and Brebbia, C. A., Transient Boundary Element Elastodynamics Using Dual Reciprocity Method and Model Superposition, *Boundary Elements VIII*, Vol1, Springer-Verlag, Berlin and New York. 1986.

34. Johnson, D. E., "A Proof of the Stability of the Houblot Method", *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 4, No. 8, pp. 1450-1451, 1996.