نشریه علمی ـ پژوهشی
روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۳، شماره ۲، زمستان ۱۴۰۳، ص. ۲۶-۱

مقاله پژوهشی

روش جدید برای ریزکردن محلی شبکه در روش اجزای محدود به کمک توابع شکل جایگزین

نسرین خیرخواه برزکی و علیرضا صادقی راد *
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۱/۲۶ – دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۳/۰۳/۱۸)
DOI: 10.47176/jcme.43.2.1031

چکیده– بر خلاف شبکه‌های متشکل از المان‌های مثلثی/ چهاروجهی در روش اجزای محدود دو/سه بعدی، ریزکردن محلی شبکه‌های متشکل از المان‌های چهارضلعی/ شش وجهی با حفظ سازگاری[1] دشوار بوده و معمولا منجر به اعوجاج شدید المان‌ها می‌گردد. روش شناخته‌شده و پرکاربرد برای برطرف کردن این مشکل، ریزکردن محلی شبکه بر اساس المان‌های انتقالی[2] و گره‌های معلق[3] است. نکته‌ی کلیدی در این روش، اعمال پیوستگی[4] تغییر مکان در مرز المان‌های انتقالی در حضور گره‌های معلق است. المان‌های انتقالی معرفی‌شده در ادبیات فنی با توجه به نحوه‌ی قرارگیری در شبکه رابطه‌بندی‌های مختلف داشته و نیز محدود به یک تعداد مشخص از گره‌های معلق بر مرز المان می‌باشند. بنابراین پیاده‌سازی آن‌ها برای یک حالت بسیار عمومی پیچیده است. در این مقاله یک المان انتقالی جدید بر اساس توابع شکل جایگزین معرفی شده است که با یک رابطه‌بندی واحد حالات مختلف قرارگیری المان انتقالی در شبکه و نیز تعداد دلخواه گره‌های معلق را پشتیبانی می‌کند. هم چنین اثبات تحلیلی به منظور نشان دادن حفظ کامل شرایط پیوستگی و تقسیم جزء واحد[5] در روش پیشنهادی هنگام ریزکردن محلی شبکه به کمک توابع شکل جایگزین ارائه شده است. در نهایت با حل مثال‌های عددی دو و سه‌بعدی مقایسه بین دقت و همگرایی روش پیشنهادی و روش‌های موجود در پیشینه فنی صورت گرفته است.

واژه‌های کلیدی: روش اجزای محدود، ریزشدگی محلی شبکه، گره‌های معلق، المان انتقالی، توابع شکل جایگزین.

A novel technique for local mesh refinement in the finite element method based on the alternative shape functions

N. Kheirkhah Barzoki and A. Sadeghirad
Department of Civil and Environmental Engineering, Amirkabir University of Technology

Abstract*: Unlike triangular/tetrahedral elements used in the finite element method for two/three-dimensional problems, local refinement of meshes composed of quadrilateral/hexahedral elements while maintaining the compatibility is challenging, and often results in severe distortion of the elements. A well-known and widely used approach to address this issue is the local mesh refinement based on transitional elements with hanging nodes. The key point in this method is enforcing the displacement continuity at the transitional element boundaries in the presence of hanging nodes. Transitional elements introduced in the literature employ various formulations depending on their placement within the mesh, and are also constrained by a maximum number of hanging nodes. along*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی:sadeghirad@aut.ac.ir

the element boundary. Therefore, their implementation for a general case is quite complicated. This paper presents a novel transitional element based on alternative shape functions, which offers a unified formulation for different placements of transitional elements in the mesh, applicable to any number of hanging nodes. Additionally, an analytical proof is provided to demonstrate the continuity and partition of unity properties in the proposed method, used in local mesh refinement. Finally, numerical examples in two and three dimensions are simulated to compare the accuracy and convergence of the proposed method against the existing methods in the literature.

Keywords: ***Finite element method, Local mesh refinement, Hanging nodes, Transition elements, Alternative shape functions.***

فهرست علائم

H	مجموعه پایه	N_a	گره فعال
α	ضرایب چندجمله‌ای پایه	N_{if}	گره غیرفعال
Ψ	تابع دلخواه	φ	تابع شکلی پیشنهادی
ξ	مختصات طبیعی	u	تغییر مکان
η	مختصات طبیعی	σ	تنش کاشی
χ	تابع شکلی	E_u	خطای جابجایی
Ω	دامنه المان	E_e	خطای انرژی
Ω_p	دامنه ذره		

۱. مقدمه

بسیاری از مدل‌سازی‌ها در مسائل مهندسی، با پدیده‌هایی مانند گرادیان بالای تنش، تکینگی در نواحی کوچکی از دامنه مسأله مواجه هستند. ایده‌ی مناسب برای افزایش دقت روش اجزای محدود در این مسائل، ریز کردن شبکه در این نواحی بحرانی است. خیلی زود پس از ابداع روش اجزای محدود در دهه ۱۹۶۰ میلادی، روش‌های اجزای محدود انطباقی[۶] برای ریز کردن شبکه معرفی شدند [۱].

ریز کردن شبکه به دو صورت کلی و محلی قابل انجام است. در روش ریز کردن کلی شبکه، شبکه در تمام دامنه‌ی مسأله دوباره ساخته شده و ریز می‌گردد. از آنجا که ریز کردن کلی شبکه منجر به ایجاد هزینه محاسباتی بسیار بالا و غیرضروری می‌گردد بنابراین تغییر ابعاد شبکه به شکل محلی پیشنهاد شده است. ریز کردن محلی شبکه به دو صورت انطباقی[۷] [۵-۲] و محلی همراه با گره‌های معلق[۸] امکان‌پذیر است. در حالت انطباقی ابعاد شبکه به صورت تدریجی تغییر کرده و تمام گره‌ها المان های مجاور روی یکدیگر منطبق خواهند بود و سازگاری[۸] شبکه حفظ می‌گردد. اما در حالت محلی همراه با گره‌های معلق، تنها بخشی از شبکه ریز شده و گره‌هایی روی اضلاع المان‌های همسایه ریزنشده، به نام «گره‌های معلق» در مسأله ظاهر می‌گردند. بر خلاف شبکه‌های متشکل از المان‌های مثلثی/ چهاروجهی در روش اجزای محدود، ریز کردن محلی شبکه‌های متشکل از المان‌های چهارضلعی/ شش وجهی با حفظ سازگاری دشوار بوده و معمولا منجر به اعوجاج شدید المان‌ها می‌گردد. بنابراین ریز کردن محلی همراه با گره‌های معلق روشی پرکاربرد در تحلیل اجزای محدود در مسائل با نواحی بحرانی محلی است [۶]. واضح است با وجود این گره‌های معلق،

به دلیل ناسازگاری توابع شکل استاندارد اجزای محدود روی مرز المان‌ها پیوستگی تغییر مکان نقض شده و همگرایی روش دچار مشکل می‌گردد. بنابراین تکنیک‌های مختلفی برای غلبه بر این موضوع پیشنهاد شده است. یک روش، مقید کردن درجه آزادی گره‌های معلق در یک ضلع المان به گره‌های گوشه‌ی آن ضلع قرار گرفته بوده که روش تخمین مقید[9] نامیده می‌شود [۱۱-۷]. تکنیک بعدی اعمال شرایط انطباقی به کمک روش های پنالتی ضرایب لاگرانژ و نیچه است [۱۲ و ۱۳]. در نهایت روش دیگر، تولید توابع شکل جدید در المان‌های دارای گره‌های معلق و معرفی درجه آزادی مستقل در این گره‌ها است، که به این تکنیک، روش المان انتقالی[10] می‌گویند [۲۰-۱۴]. المان‌های انتقالی در کار گوپتا و همکاران [۱۴] در مسائل دوبعدی و پس از آن توسط مک دیل [۱۷] و مورتون [۱۸] در مسائل سه‌بعدی پیاده شده است. در این روش با معرفی توابع شکل در گره‌های معلق با درجه آزادی مستقل و اصلاح توابع شکل استاندارد در گره‌های گوشه‌ی مربوطه، پیوستگی تغییر مکان در مرز المان‌های انتقالی تضمین می‌گردد. یکی از محدودیت‌های این توابع، تعریف آن‌ها با شرط نسبت یک به دو در المان‌های ریز به درشت است که در [۱۹] با تعریف توابع جدید برای تعداد دلخواه گره‌ها به حل این موضوع پرداخته شده است. با وجود این‌که این روش در مناطق با ریزشدگی محدب با دقت خوبی پاسخ می‌دهد اما معمولا در مناطق مقعر (جایی که یک المان بیش از ۲ گره معلق داشته باشد) منجر به تولید توابع شکل منفی شده و در حل مسئله اختلال به وجود می‌آید. همچنین توابع شکل تولید شده در این روش برای هر حالت باید به صورت جداگانه به دست آمده و باعث افزایش محاسبات می‌گردد. مقاله‌ی دیگر پژوهش لینگ و همکارانش [۲۰] است که با روش جداسازی شبکه، المان مرزی را به سه بخش المان ریاضی، المان فیزیکی و المان انتقالی تقسیم کرده و با نگاشت دوگانه توابع شکل یکپارچه‌ای برای آن‌ها تولید می‌کند.

در این مقاله با کاربرد توابع شکل جایگزین در روش *CPDI* [11] [۲۱] و نحوه‌ی جدیدی برای انتخاب المان‌های انتقالی سعی شده تا مشکل عدم پیوستگی در مرز المان‌های مجاور برطرف گردد. در روش پیشنهادی، در المان‌های روی مرز بین شبکه‌های ریز و درشت بدون در نظرگرفتن درجه آزادی برای گره‌های معلق، توابع شکل بر حسب گره‌های گوشه المان والد[12] (المان درشتی که تقسیم‌بندی شده) به دست می‌آید که همواره مقادیر مثبتی تولید کرده و شرایط پیوستگی، تمامیت[13] و تقسیم جزء واحد را که در همگرایی مسئله تاثیرگذار هستند، برقرار می‌کنند. برخلاف روش المان انتقالی گوپتا، در روش پیشنهادی محدودیتی در نسبت المان‌های ریز به درشت وجود نخواهد داشت و مقادیر توابع شکل همواره مثبت خواهند بود.

اگرچه در مقاله حاضر المان انتقالی پیشنهادی بر اساس توابع شکل جایگزین *CPDI* برای شبکه‌های شامل المان‌های چهارضلعی/شش‌وجهی توسعه یافته است، قابل ذکر است که الگوریتم پیشنهادی قابل تعمیم به المان‌های مثلثی/ چهاروجهی نیز است. اما با توجه به اینکه (۱) ریز کردن محلی شبکه‌های متشکل از المان‌های مثلثی/ چهاروجهی ساده است و (۲) المان‌های چهارضلعی/ شش‌وجهی در تحلیل‌های اجزای محدود دقت بالاتری نسبت به المان‌های مثلثی/ چهاروجهی دارند، مقاله حاضر به توسعه المان انتقالی پیشنهادی برای شبکه‌های شامل المان‌های مثلثی/ چهاروجهی نمی‌پردازد. در ادامه برتری المان‌های چهارضلعی/ شش‌وجهی در قالب یک مثال بررسی می‌شود. در حل مسائل اجزای محدود، المان‌های چهارضلعی/ شش‌وجهی به دلیل توانایی درونیابی خطی توزیع تنش، در تجزیه و تحلیل‌هایی که به دقت بالای محاسبات تنش نیاز دارند، نسبت به المان‌های مثلثی/ چهاروجهی برتری دارند. این ویژگی به خصوص در مواردی با گرادیان‌ها و تغییرات تنش قابل توجه، به مزیت تبدیل می‌شود. این المان‌ها هم‌چنین در شبیه‌سازی‌های مکانیک سازه از جمله بارگذاری‌های پیچشی یا خمشی که در آن‌ها توزیع خطی تنش با رفتار واقعی مواد هماهنگی بیشتری دارد، بسیار کارآمد محسوب

می‌شوند. از نظر زمان محاسباتی نیز، شبکه‌های شامل المان‌های چهارضلعی/شش‌وجهی معمولاً به تعداد کمتری المان نیاز داشته و منجر به کاهش هزینه‌ی محاسباتی مرتبط با حل سیستم معادلات می‌گردند. جهت مقایسه‌ی دقت این دو نوع المان، مثال صفحه بی‌نهایت سوراخ‌دار تحت بارگذاری کششی برای هر دو نوع المان چهارضلعی و مثلثی حل شده است. جزئیات این مثال در بخش ۱.5 ارائه شده است. شکل ۱–الف و ۱–ب شبکه‌های مورد استفاده در تحلیل اجزای محدود شامل المان‌های چهارضلعی و مثلثی را نشان می‌دهد. شکل ۱–ج و ۱–د، نمودارهای تنش در فواصل مختلف از سوراخ را در دو مدل با گره‌های متفاوت نشان می‌دهند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود دقت تحلیل اجزای محدود با المان‌های چهارضلعی بالاتر از دقت نتایج حاصل از المان‌های مثلثی است. با توجه به اینکه در تحلیل‌های مورد مقایسه تعداد گره‌ها در شبکه با المان‌های چهارضلعی یکسان با تعداد گره‌ها در شبکه با المان‌های مثلثی است، هزینه محاسباتی تحلیل‌های اجزای محدود مشابه یکدیگر خواهد بود و می‌توان نتیجه گرفت که کاربرد المان‌های چهارضلعی با هزینه محاسباتی یکسان نتایج دقیق‌تری نسبت به کاربرد المان‌های مثلثی بدست می‌دهد.

در ادامه‌ی این مقاله خلاصه‌ای از روش‌های تخمین مقید و المان انتقالی و روابط ارائه‌شده برای آن‌ها در بخش دوم ارائه می‌گردد. پس از آن در بخش سوم توابع شکل جایگزین معرفی شده و ایده و نحوه به دست آوردن آن‌ها بیان می‌گردد. در ادامه بخش چهارم شامل روابط ریاضی و اثبات‌های تحلیلی جهت نشان دادن حفظ کامل شرایط پیوستگی و تقسیم جزء واحد در روش پیشنهادی است. بخش پنجم به حل مثال‌های عددی دو و سه بعدی به منظور مقایسه‌ای بین دقت و همگرایی روش پیشنهادی و روش المان انتقالی اختصاص یافته و نتایج مدل–سازی‌ها گزارش می‌شوند. در نهایت در بخش ششم نتیجه گیری ارائه می‌شود.

۲. روش‌های تخمین مقید و المان انتقالی

در روش اجزای محدود جهت تقریب پاسخ یک مسئله، ابتدا دامنه‌ی حل به المان‌های جداگانه با تعداد گره‌های مختلف (N) وابسته به مرتبه‌ی هر المان تقسیم می‌گردد. در حالتی که تمامی این المان‌ها هم‌اندازه و هم‌مرتبه باشند شبکه تولید شده منظم[۱۴] و در غیر این صورت نامنظم[۱۵] خواهد بود. هنگام ریزکردن هندسی شبکه[۱۶] (بدون تغییر مرتبه‌ی المان‌ها) به صورت محلی شبکه‌های نامنظم و در پی آن گره‌های معلق در محل تماس المان‌های ریز و درشت به وجود می‌آیند که سبب اختلال در پیوستگی توابع شکل روی مرز المان‌ها می‌گردد. همانطور که اشاره شد، رویکردهای مختلفی برای حل این مسئله وجود دارد که می‌توان به روش‌های تخمین مقید و المان انتقالی اشاره کرد.

فرض کنید تابع $\Psi(x,y)$ از ترکیب چندجمله‌ای‌های پایه داخل مجموعه H با ضرایب α به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\Psi^h(x,y)=\sum_{j=1}^{N_H} H_j\alpha_j \qquad (۱)$$

مجموعه پایه H که تعداد عناصر آن N_H بسته به رتبه‌ی المان تعیین می‌گردد، به صورت استاندارد به فرم زیر تعریف می‌شود که در آن ξ و η مختصات محلی گره i در هر المان هستند:

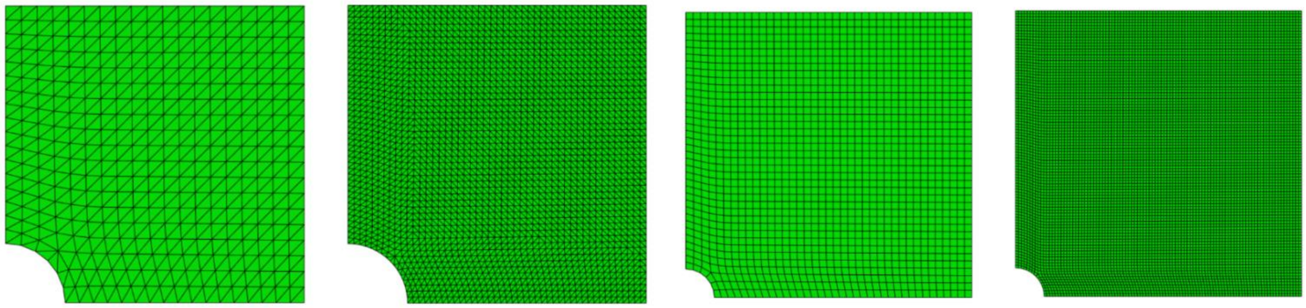
$$H=\begin{bmatrix}1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2 & \eta^2 & \dots\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

با به دست آوردن ضرایب مناسب α و در نظر گرفتن رابطه‌ی (۱) و (۲) مقادیر توابع شکل استاندارد خطی برای یک المان چهار گره‌ای به صورت زیر خواهد بود:

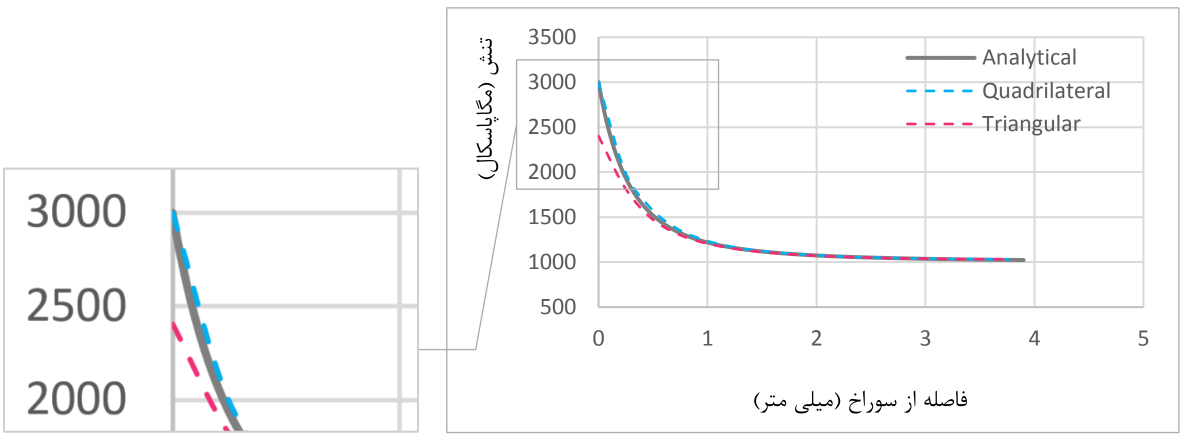
$$\chi_i(x,y)=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), \quad i=1,2,3,4 \qquad (۳)$$

روش تخمین مقید

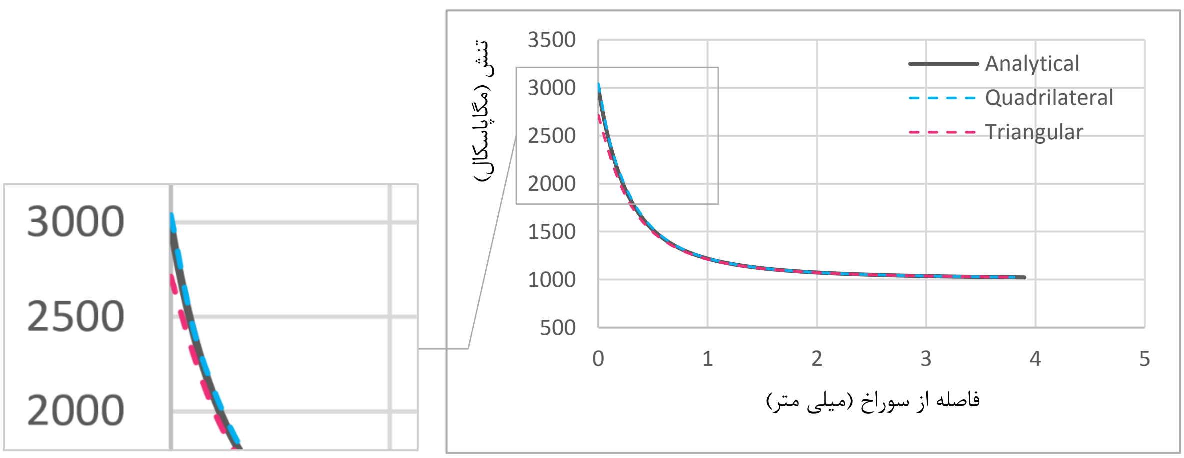
در قسمت قبل اشاره شد که هنگام تولید یک شبکه نامنظم گره‌های معلقی در مرز المان‌ها تولید می‌شود.



الف ب

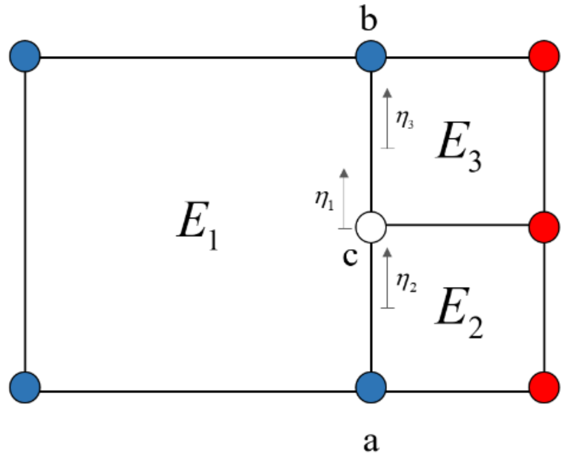


ج



د

شکل ۱- مقایسه‌ی دقت دو نوع المان: الف) المان چهارضلعی، ب) المان مثلثی، ج) تعداد ۳۹۸ گره، د) تعداد ۲۳۵۴ گره



شکل ۲ – تعریف تابع در گره معلق در روش تخمین مقید

یکی از روش‌های حل عدم ناپیوستگی در این اضلاع، مقید کردن گره معلق است. در این قسمت توضیح مختصری از این روش که در [۷] برای ریزشدگی ترکیبی *h-p* با مد نظر قرار دادن نسبت ۱:۲ هنگام تقسیم المان‌ها و در مقاله‌های بعدی برای تعداد دلخواه گره‌ی معلق روی هر ضلع اصلاح شده است [۴ و ۵] بیان می‌گردد. در واقع فرض اصلی در اینجا این است که تابع در این گره به صورت مستقل تعریف نشده است. یعنی، مقدار تابع در این گره وابسته به مقدار تابع در گره‌های اصلی واقع بر ضلعی از المان می‌باشد که این گره روی آن ضلع قرار گرفته است. در این روش مقدار تابع Ψ در نقطه‌ی c به صورت ترکیبی خطی از Ψ_a و Ψ_b خواهد بود (شکل ۲):

$$\Psi_c = \lambda_1\Psi_a + \lambda_2\Psi_b \qquad (۴)$$

بنابراین هدف، یافتن ضرایب مناسب λ با شرط حفظ پیوستگی روی مرز المان‌ها است. برای تخمین تابع Ψ روی ضلع ab، با در نظر گرفتن توابع پایه خطی در یک بعد بردار H تنها دارای دو مولفه‌ی یک و η خواهد بود. بنابراین توابع شکل استاندارد روی این وجه در هریک از المان‌های یک و دو و سه به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$\begin{aligned}
\chi_1^{E1} &= \frac{1}{2}(1-\eta_1), & \chi_2^{E1} &= \frac{1}{2}(1+\eta_1) \\
\chi_1^{E2} &= \frac{1}{2}(1-\eta_2), & \chi_2^{E2} &= \frac{1}{2}(1+\eta_2) \\
\chi_1^{E3} &= \frac{1}{2}(1-\eta_3), & \chi_2^{E3} &= \frac{1}{2}(1+\eta_3)
\end{aligned} \qquad (۵)$$

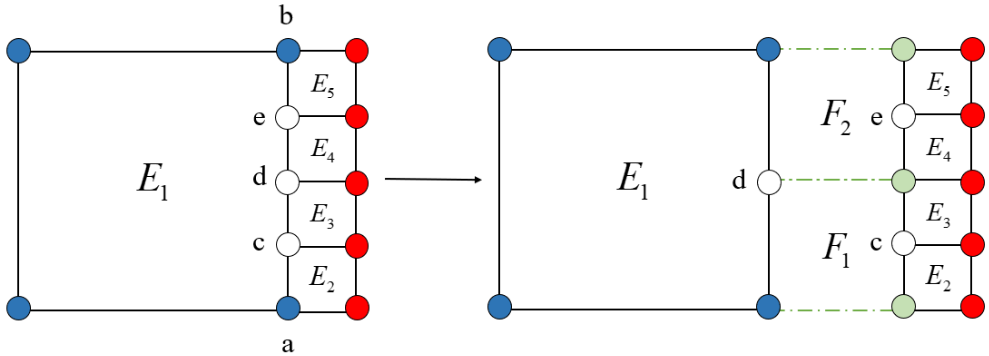
بنابراین مقدار تابع Ψ، به شکل زیر در هر یک از المان‌های روی وجه ab محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\Psi_{E1}^{h} &= \chi_1^{E1}(\eta_1).\Psi_a + \chi_2^{E1}(\eta_1).\Psi_b \\
\Psi_{E2}^{h} &= \chi_1^{E2}(\eta_2).\Psi_a + \chi_2^{E2}(\eta_2).\Psi_c \\
\Psi_{E3}^{h} &= \chi_1^{E3}(\eta_3).\Psi_c + \chi_2^{E3}(\eta_3).\Psi_b
\end{aligned} \qquad (۶)$$

با تبدیل مختصات محلی المان‌های کوچک E_2 و E_4 به مختصات المان اصلی E_1 رابطه ای بین توابع شکل آن‌ها پیدا می‌شود. با توجه به اینکه $\eta_2 = 2\eta_1 + 1$ و $\eta_4 = 2\eta_1 - 1$ توابع شکل χ^{E2} و χ^{E4} به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\chi_1^{E2} &= -\eta_1 \quad , & \chi_2^{E2} &= 1+\eta_1 \\
\chi_1^{E3} &= 1-\eta_1 \quad , & \chi_2^{E3} &= \eta_1
\end{aligned} \qquad (۷)$$

بنابراین ارتباط بین توابع شکل با ضریب ϑ نشان داده می‌شود:



شکل ۳ – محاسبه مقادیر تابع در گره‌های معلق به صورت سلسله مراتبی

$$\chi^{E1} = \vartheta^b . \chi^{E2} \quad , \vartheta^b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \chi^{E1} = \vartheta^t . \chi^{E3} \quad , \vartheta^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{۸}$$

حال با توجه به شرط پیوستگی $\Psi^h_{E1} = \Psi^h_{E2}$ و $\Psi^h_{E1} = \Psi^h_{E3}$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_c \end{bmatrix} &= (\vartheta^b)^T \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix} \to \Psi_c = \frac{1}{2}(\Psi_a + \Psi_b) \\ \begin{bmatrix} \Psi_c \\ \Psi_b \end{bmatrix} &= (\vartheta^t)^T \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{bmatrix} \to \Psi_c = \frac{1}{2}(\Psi_a + \Psi_b) \end{aligned} \tag{۹}$$

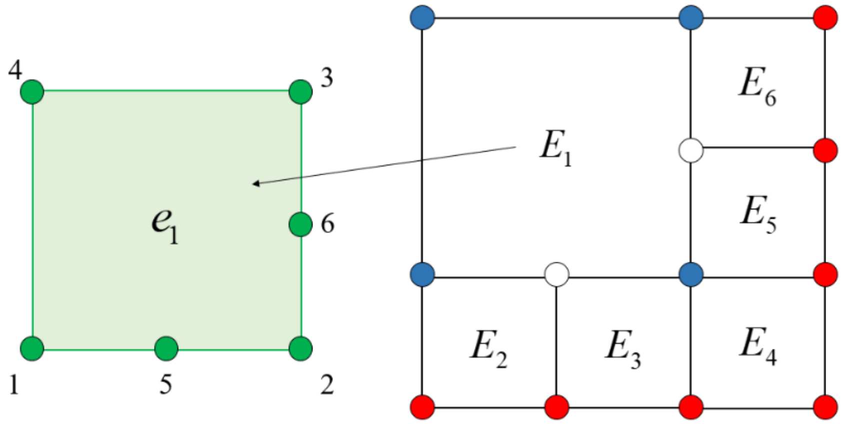
این رابطه بیان می‌کند که در حالت خطی و استفاده از توابع شکل رتبه یک، مقدار تابع در نقطه‌ی c برابر میانگین توابع در دو راس المان اصلی خواهد بود. در رتبه‌های بالاتر نیز مشابه همین رویکرد است با این تفاوت که ابعاد ماتریس ϑ افزایش یافته و با حل دستگاه معادلاتی مانند رابطه‌ی ۸ مقادیر تابع در گره‌های معلق تعیین می‌شود. حال برای حالتی با تعداد دلخواهی از گره‌های معلق روی مرز دو المان با در نظر گرفتن المان‌های فرضی بین المان‌های کوچک و اصلی مقادیر تابع در گره‌های معلق به صورت سلسله مراتبی[۱۷] تعیین می‌گردند. این رویکرد در شکل ۳ نشان داده شده است. ابتدا مقدار Ψ در گره‌ی d و پس از آن به کمک دو المان *F1* و *F2* در گره‌های c و e محاسبه می‌گردند. با اعمال این روش، با افزایش تعداد نقاط معلق میزان محاسبات زیاد شده و منجر به هزینه‌ی زمانی بالایی خواهد شد.

روش المان انتقالی

این روش که اولین بار توسط *Gupta* و همکاران [۱۴] ارائه شده است، با تعریف درجه آزادی مستقل برای گره‌های معلق و تولید المان‌های انتقالی با توابع شکل متفاوت توانسته پیوستگی را در مرز المان‌های ریز و درشت حفظ کند. ابتدا با رعایت نسبت ۱:۲ به معنی وجود تنها یک گره‌ی معلق در مرز هر دو المان، به کمک اضافه‌کردن چند عنصر به مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های پایه توابع شکل تعریف شدند. به طور مثال در حالت شکل ۴ یک المان شش گره‌ای e_1 با چندجمله‌ای‌های پایه‌ی زیر جایگزین المان استاندارد E_1 می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & |\xi|(\eta-1) & |\eta|(\xi+1) \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

گره‌ی پنجم و ششم به ترتیب روی اضلاع بالا و چپ قرار گرفته‌اند بنابراین دو جمله‌ی آخر این بردار به صورتی تعیین شده تا مقدار تابع مربوط به این گره‌ها در اضلاع پایین و راست که بدون گره‌ی معلق هستند صفر شود. توابع شکل به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

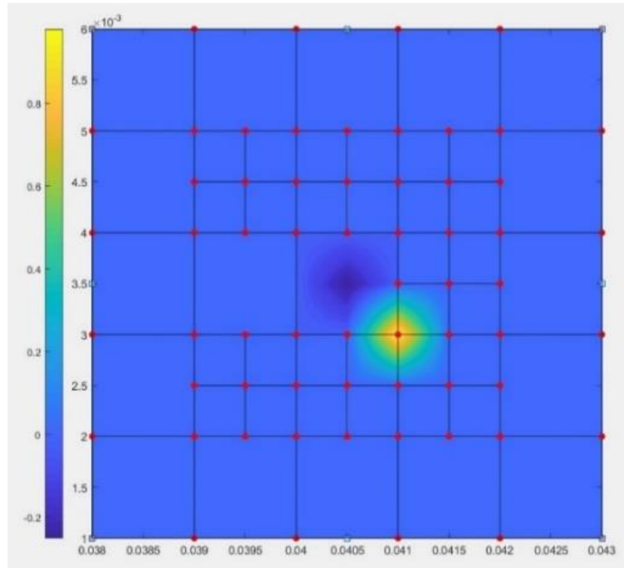


شکل ۴ - المان شش گره‌ای e_1 در روش المان انتقالی با چندجمله‌ای های پایه‌ی جایگزین

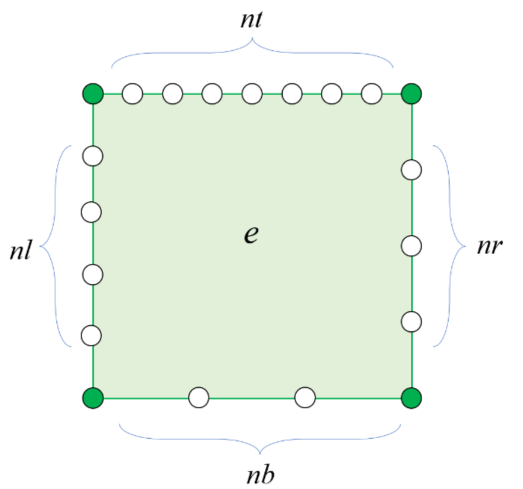
$$
\begin{aligned}
&\bar{\chi}_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)-\frac{1}{4}(1-|\xi|)(1-\eta)\\
&\bar{\chi}_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)-\frac{1}{4}(1-|\xi|)(1-\eta)\\
&-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-|\eta|)\\
&\bar{\chi}_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-|\eta|)\\
&\bar{\chi}_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\\
&\bar{\chi}_5=\frac{1}{2}(1-|\xi|)(1-\eta)\\
&\bar{\chi}_6=\frac{1}{2}(1+\xi)(1-|\eta|)
\end{aligned}
\qquad (۱۱)
$$

با توجه به اینکه گره‌ی چهارم با هیچکدام از گره‌های معلق در ارتباط نیست بنابراین مقدار استاندارد آن دست‌نخورده باقی می‌ماند. یکی از مشکلات این توابع شکل، منفی‌شدن آن‌ها با افزایش تعداد گره‌های معلق روی آن است (شکل ۵) که این موضوع ممکن است روی همگرایی پاسخ‌ها تاثیر گذاشته و یا بسته به نوع مسئله موجب تخمین مقادیری شود که معنای فیزیکی ندارند.

محدودیت دیگر این روش، اجبار نسبت ۱:۲ در هنگام ریزکردن المان‌هاست که جهت رفع آن در [۱۹] پیشنهاد شد تا مانند روال قبل با اضافه‌کردن چندجمله‌ای‌های پایه بیشتر توابع شکل محاسبه گردند. با این تفاوت که این مقادیر پایه با توجه به مختصات گره‌های معلق و وجهی از المان که روی آن قرار دارند تعیین می‌گردند. جمله‌ی $|\eta-\eta_{nr}|(\xi-1)$ برای وجه راست، $|\eta-\eta_{nl}|(\xi+1)$ برای وجه چپ، $|\xi-\xi_{nt}|(\eta-1)$ برای وجه بالا و $|\xi-\xi_{nb}|(\eta+1)$ برای وجه پایین به مجموعه H اضافه خواهند شد و به ترتیب قبل توابع شکل مربوط به هر گره محاسبه می‌شود. واضح است در این روش برای هر تعداد گره باید بردار H و $\overline{H}$ به صورت جداگانه نوشته شده و توابع شکل مربوط محاسبه گردند یکی از چالش‌های اساسی این روش است. به عنوان مثال در شکل ۶ فقط برای یک نوع المان، باید به بردار H تعداد ۱۶ جمله اضافه شود. بنابراین این روش، برای تعداد بالایی از گره‌های معلق کم هزینه نیست و افزایش ابعاد این دو ماتریس با مقادیر مختلف برای هر المان، منجر به هزینه‌ی محاسباتی بالایی خواهد شد. هم چنین مسئله‌ی منفی شدن توابع شکل همچنان پابرجا است.



شکل ۵ - منفی شدن توابع شکل در روش المان انتقالی



شکل ۶ – تعمیم روش المان انتقالی

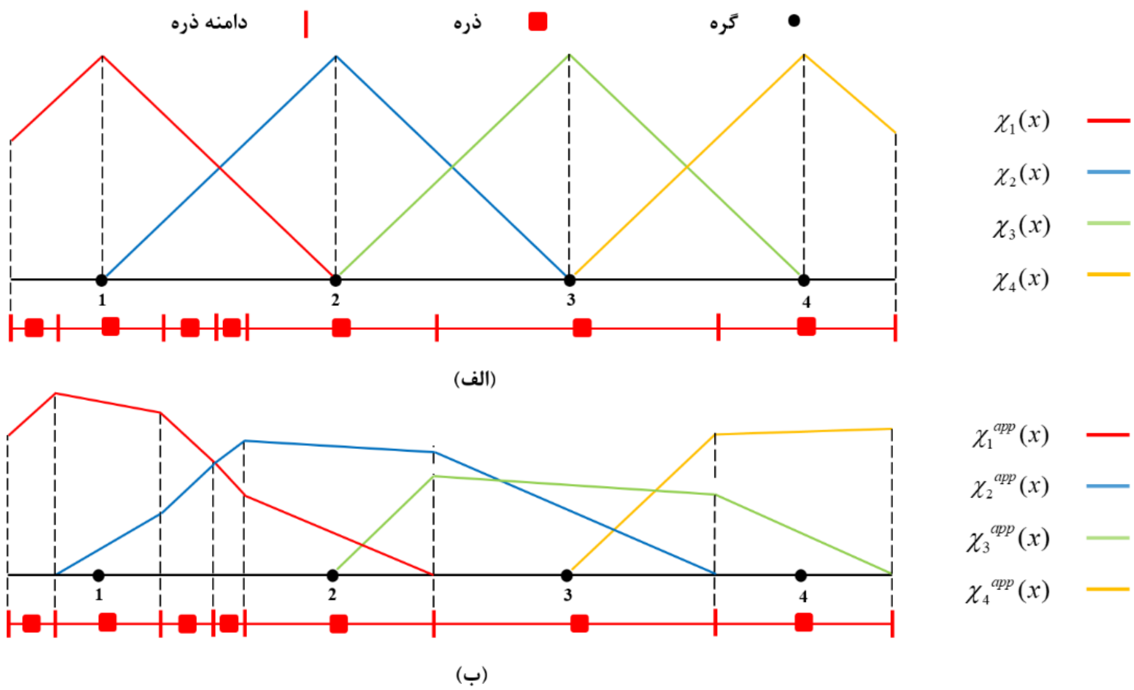
۳. روش پیشنهادی بر اساس توابع پایه جایگزین CPDI

CPDI یا درونیابی بر اساس دامنه ذرات سازگار با تغییرشکل[۱۸] [۲۱ و ۲۲] تکنیکی در روش نقاط مادی *MPM*[۱۹] [۲۳–۲۶] به منظور بالابردن دقت و پایداری عددی است. روش *MPM* یک روش ترکیبی لاگرانژی–اویلری است که در آن نمونه به صورت جداگانه به ذراتی تقسیم‌بندی شده و انتگرال‌گیری روی شبکه پس‌زمینه صورت می‌گیرد. بنابراین المان‌های ذرات و شبکه پس‌زمینه مستقل از یکدیگر هستند. در شکل ۷ حالت یک‌بعدی این نوع مسئله با دو نوع دامنه المان Ω و Ωp مشاهده می‌شود (مرز المان های Ω به صورت دایره‌های سفید توخالی و Ω_p با خطوط | نمایش داده شده‌اند). در صورت استفاده از توابع شکل استاندارد *FEM*[۲۰] (χ_i) در شبکه پس‌زمینه، واضح است که شیب این توابع روی مرز المان‌ها تغییر کرده و مشتق آن ناپیوسته است، که در محاسبه تنش ایجاد مشکل می‌کند.

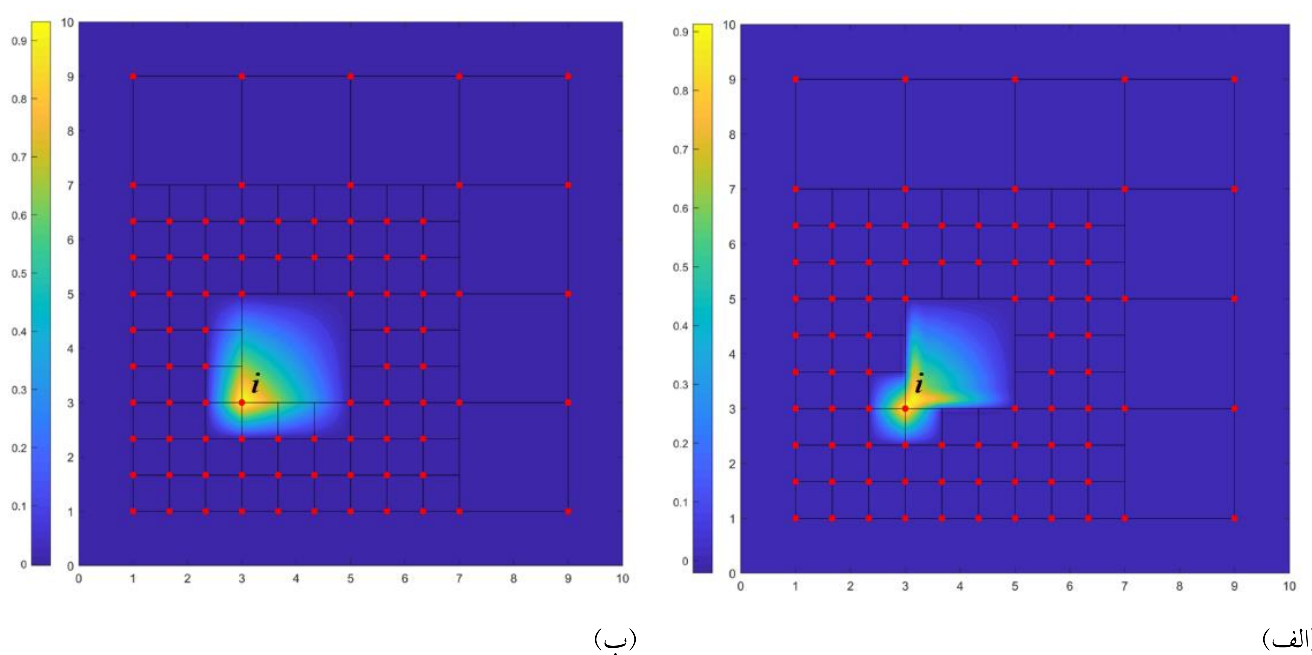
با تغییر مقدار توابع روی این مرزها می‌توان این گسستگی را از بین برد. بنابراین در روش *CPDI* توابع شکل خود به مثابه یک تابع یا میدان (مثل جابجایی، سرعت، دما) در نظر گرفته شده و برای یافتن آن‌ها در یک سری نقاط خاص، لازم است تا توابع شکل استاندارد توسط توابع شکل دیگری درونیابی شوند. این توابع جدید که با χ_i^{app} نشان داده شده‌اند به کمک درونیابی از توابع χ_i روی المان Ω_p با توابع شکل Q_α^p تولید می‌شوند.

$$\chi_i^{app}(x) = \sum_{\alpha=1}^{4} Q_\alpha^p(x)\chi_i(x_\alpha^p) \quad on \quad \Omega_p \qquad (۱۲)$$

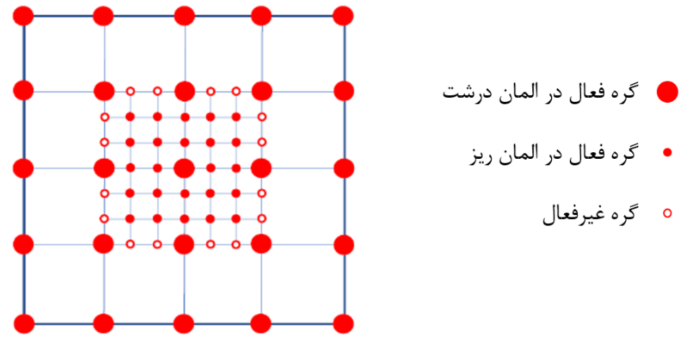
در روش *CPDI*، توابع شکل جایگزین به منظور رفع مشکل ناپیوستگی تنش در مرز المان‌ها زمانی که ذرات حمل‌کننده تاریخچه تنش و کرنش در یک تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ از مرز المان‌ها عبور می‌کنند، بکار می‌روند. در مقاله حاضر پیشنهاد می‌گردد که این توابع شکل جایگزین برای هدفی کاملا متفاوت، یعنی ازبین‌بردن ناپیوستگی تغییرمکان در المان‌های انتقالی در تحلیل اجزای محدود بکار گرفته شوند. در روش *FEM* به هنگام تقسیم‌بندی و ریز کردن محلی شبکه، توابع شکل استاندارد در مرز بین شبکه ریز و درشت دچار ناپیوستگی می‌شوند (شکل ۸). بنابراین برای حل



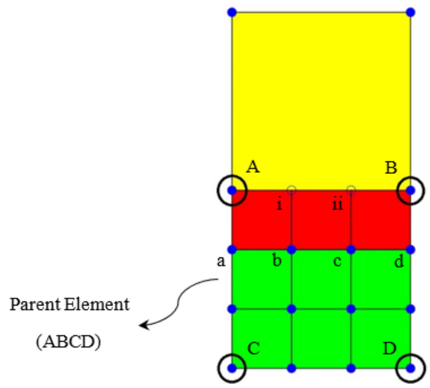
شکل ۷- توابع شکل جایگزین در روش *CPDI* : الف) توابع شکل استاندارد، ب) توابع *CPDI*



شکل ۸- الف) توابع شکل FEM با ناپیوستگی و ب) توابع شکل پیشنهادی دارای پیوستگی روی مرز ریز و درشت مربوط به گره *i*



شکل ۹- نمایش گره‌های فعال و غیرفعال روی شبکه ریز شده



شکل ۱۰- المان‌های انتقالی در روش پیشنهادی

این مشکل، در این مقاله به کمک ایده روش *CPDI* توابع شکل جدیدی روی المان‌های انتقالی، تولید می‌شوند. برای این منظور ابتدا کلیه‌ی گره‌های روی شبکه به دو گروه تقسیم‌بندی می‌شوند:

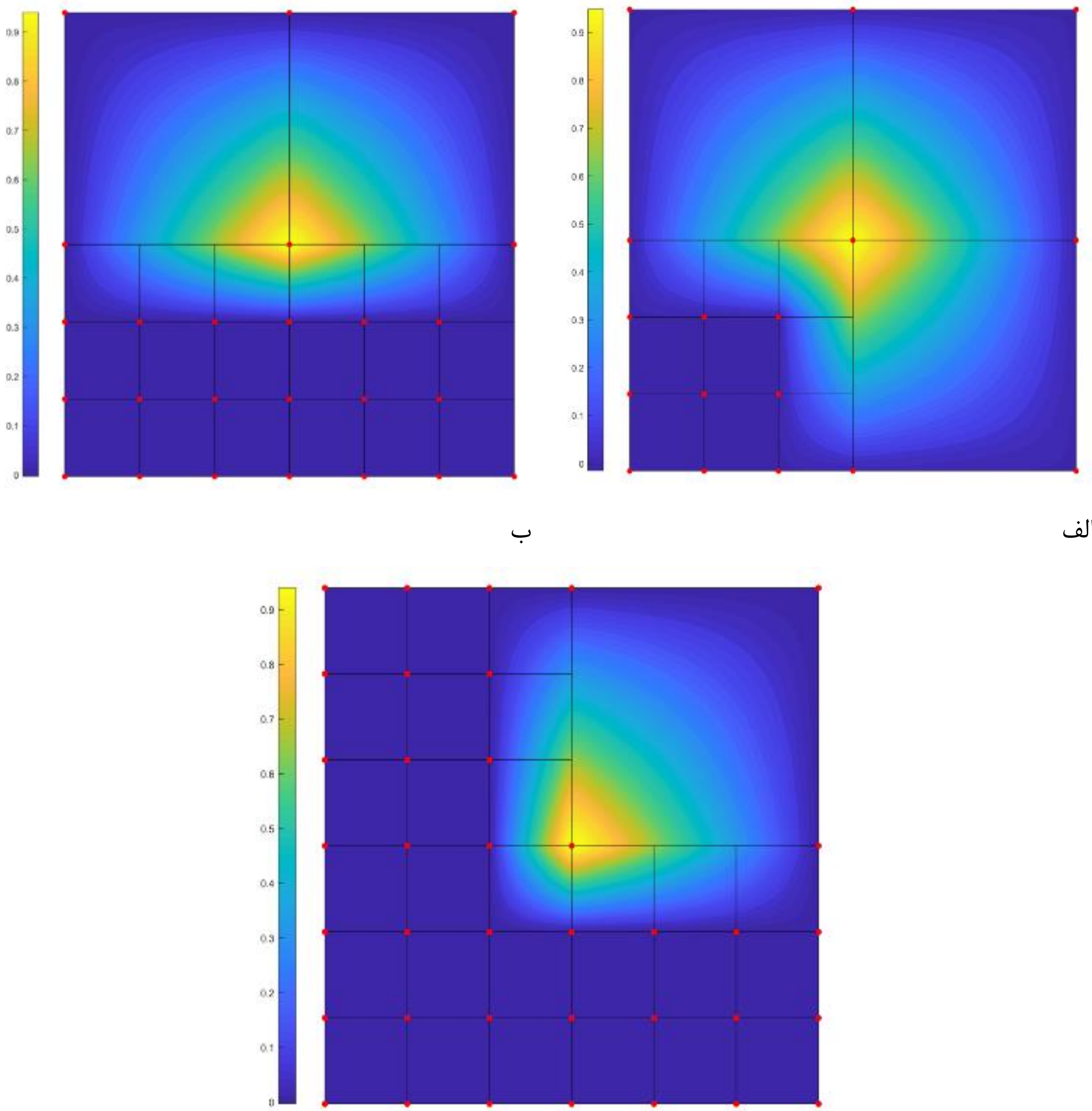
- گره‌های فعال(N_a): گره‌هایی هستند که در گوشه‌ی المان‌ها قرار گرفته و توابع شکل روی آن‌ها تعریف می‌گردد.
- گره‌های غیر فعال(N_{if}): گره هایی از المان کوچک‌تر هستند که در مرز بین المان ریز و درشت قرار گرفته و دارای توابع شکل مستقل در مسئله نیستند بلکه از این گره‌ها برای تعریف توابع شکل گره‌های گوشه کمک گرفته می‌شود. در شکل۹ نودهای فعال و غیرفعال به ترتیب با دایره‌های توپر و توخالی مشخص شده‌اند.

رابطه‌ای که در اینجا برای توابع شکل *CPDI* در گره‌های فعال تعریف می‌شود به صورت زیر است:

$$\varphi_i(x) = \sum_{\alpha\in N_{if}} \chi_\alpha(x)\,\chi_i'(x_\alpha) + \chi_i(x) \qquad ,i \in N_a \qquad (۱۳)$$

در این رابطه α نشان‌دهنده‌ی گره‌های غیرفعال است، بنابراین در المان‌های ساده با کلیه گره‌های فعال بخش اول معادله حذف و تابع شکلی آن‌ها همان توابع مرسوم *FEM* خواهد بود. اما در المان‌های دارای حداقل یک گره غیرفعال که المان انتقالی نامیده می‌شوند، تابع شکلی در واقع ترکیبی از توابع مرسوم در المان‌های کوچک و المان بزرگ‌تر یا اصطلاحا والد است. بنابراین بخش اول معادله ۱۳ نیز وارد محاسبات می‌گردد که در آن $\chi_\alpha(x)$ مقدار تابع شکلی گره‌های غیرفعال در مختصات محلی المان کوچک، x_α مختصات محلی گره‌ی غیرفعال در المان *Parent* و $\chi_i'(x_\alpha)$ مقدار تابع شکلی گره‌ی فعال در گره‌ی غیرفعال است. هم‌چنین $\chi_i(x)$ مقدار تابع استاندارد گره‌ی فعال در مختصات محلی المان کوچک است. به طور مثال در شکل ۱۰ که المان های انتقالی با رنگ قرمز در آن نشان داده شده است، مطابق رابطه ۱۳، در گره‌های فعال *a*، *b*، *c* و *d* که با المان *Parent* مشترک نیستند، مقدار $\chi_i'(x_\alpha)$ برابر صفر بوده بنابراین بخش اول معادله حذف شده و مقدار تابع شکلی همان $\chi_i(x)$ خواهد بود. اما در گره‌های *A* و *B* (چون گره‌های غیرفعال روی ضلع *AB* قرار دارند مقدار تابع شکلی در نقاط *C* و *D* برابر صفر است.)، توابع شکل استاندارد المان والد در گره‌های غیرفعال المان کوچکتر درونیابی شده و توابع $\varphi_i(x)$ جایگزین توابع استاندارد می‌گردند.

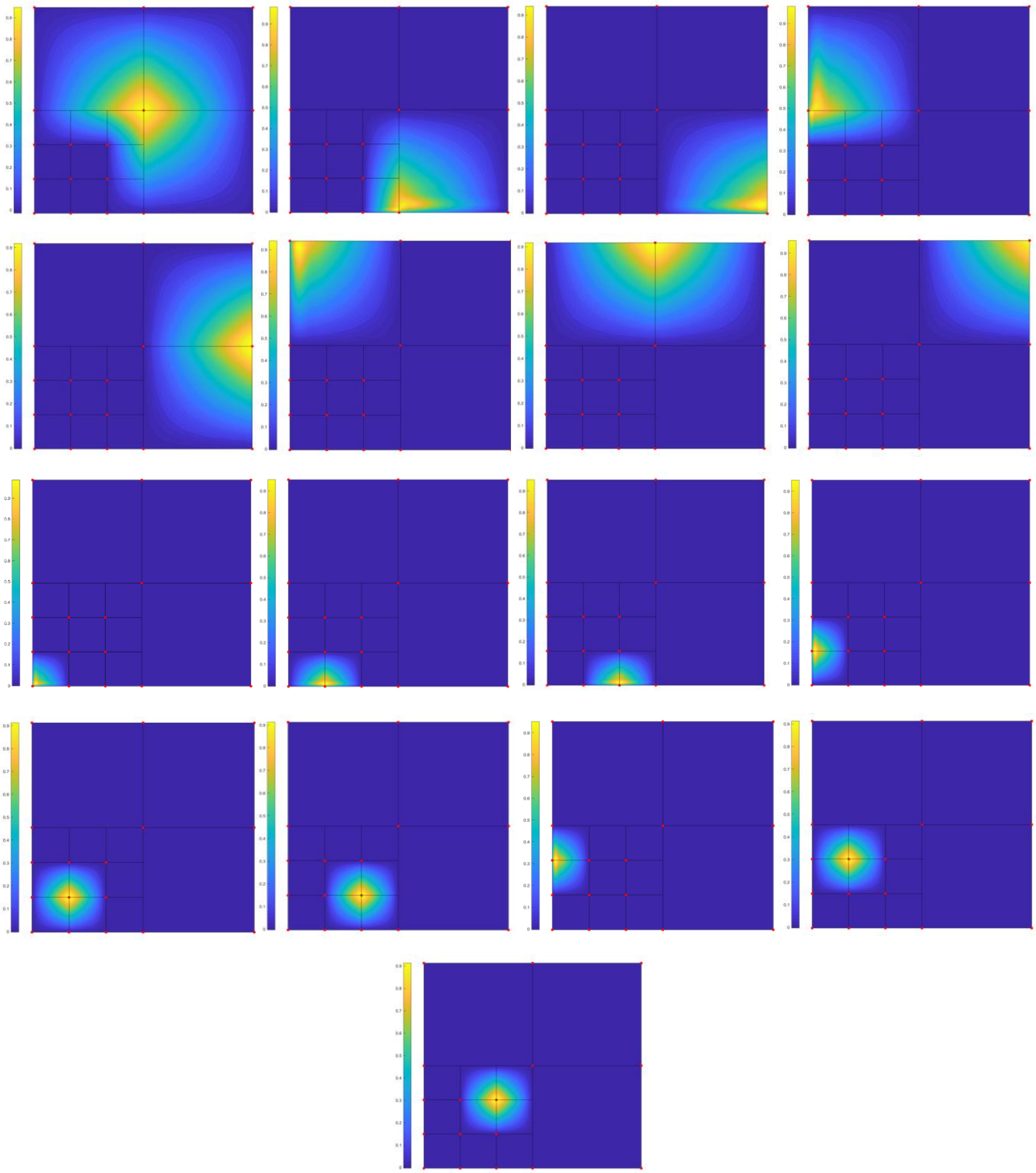
در شکل ۱۱، کانتورهای دوبعدی توابع شکل پیشنهادی در المان‌های مجاور مرز شبکه ریز و درشت برای سه حالت مختلف نشان داده شده است.



ج

شکل ۱۱ - کانتورهای دوبعدی توابع شکل پیشنهادی در مرز شبکه ریز و درشت در سه حالت مختلف

در شکل ۱۲ توابع شکل در تمامی نودهای فعال در یک ناحیه تقسیم‌بندی نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۲-توابع شکل پیشنهادی در در تمامی نودهای فعال

۴. خواص توابع شکل پیشنهادی

به طور کلی در حل مسائل اجزای محدود، به جهت تضمین دقت، همگرایی و پایداری در تخمین پاسخ‌ها ضروری است تا توابع شکل ویژگی‌های مشخصی همچون دلتای کرونیکر، تقسیم جزء واحد، تمامیت و پیوستگی را ارضا کنند. در ادامه به بررسی هر کدام از این ویژگی‌ها در توابع جدید پیشنهادی پرداخته می‌شود.

- **خاصیت دلتای کرونیکر**: طبق این ویژگی مقدار تابع شکلی گره i در تمام نودهای غیر از گره i برابر صفر و در خود گره برابر یک است. با این ویژگی مقادیر درونیابی شده در هر گره دقیقا برابر با مقدار میدان در آن نقطه است.

$$\varphi_i(x_k)=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases} \tag{۱۴}$$

طبق رابطه ۱۴ از آنجایی که α نشان‌دهنده‌ی گره‌های غیرفعال در المان کوچک است، توابع شکل آن $\chi_\alpha(x_i)$ در گره‌های فعال برابر صفر خواهد بود و تنها بخش دوم معادله که همان توابع استاندارد هستند، در رابطه بندی باقی می‌ماند بنابراین:

$$i\in N_a \rightarrow i\neq\alpha \ \rightarrow \chi_\alpha(x_i)=0 \tag{۱۵}$$

$$\sum_{\alpha\in N_{if}}\chi_\alpha(x_i)\,\chi_i(x_\alpha)+\chi_i(x_i)=0+\chi_i\ (x_i)=1 \qquad k=i\neq\alpha \tag{۱۶}$$

$$\sum_{\alpha\in N_{if}}\chi_\alpha(x_{i'})\,\chi_{\mathrm{i}}(x_\alpha)+\chi_{\mathrm{i}}\ (x_{i'})=0+\chi_{\mathrm{i}}\ (x_{i'})=0 \qquad k\neq i,\alpha \tag{۱۷}$$

به این ترتیب خاصیت دلتای کرونکر برای توابع شکل پیشنهادی اثبات می‌گردد.

- **تقسیم جزء واحد** : طبق این خاصیت، مجموع مقدار توابع شکل تمامی المان‌ها در هر نقطه از دامنه برابر یک است. به عبارت دیگر:

$$\sum_{i\in N_a}\varphi_i(x_k)=1 \tag{۱۸}$$

در گره‌های فعال غیرمرزی که توابع شکل آن‌ها FEM استاندارد است این قید به صورت خودکار برقرار است. بنابراین در حالت کلی از جمع بستن توابع $\varphi_i(x_k)$ روی کل گره‌های فعال رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N_a}\varphi_i(x_k)&=\sum_{i\in N_{ac}}\sum_{\alpha\in N_{if}}\chi_\alpha(x_k)\chi_i'(x_\alpha)+\sum_{i\in N_{af}}\chi_i(x_k)\\ &=\sum_{\alpha\in N_{if}}[\chi_\alpha(x_k)\sum_{i\in N_{ac}}\chi_i'(x_\alpha)]+\sum_{i\in N_{af}}\chi_i(x_k)\\ &=\sum_{\alpha\in N_{if}}\chi_\alpha(x_k)\times 1+\sum_{i\in N_{af}}\chi_i(x_k)=\sum_{i\in N_f}\chi_i(x_k)=1\end{aligned} \tag{۱۹}$$

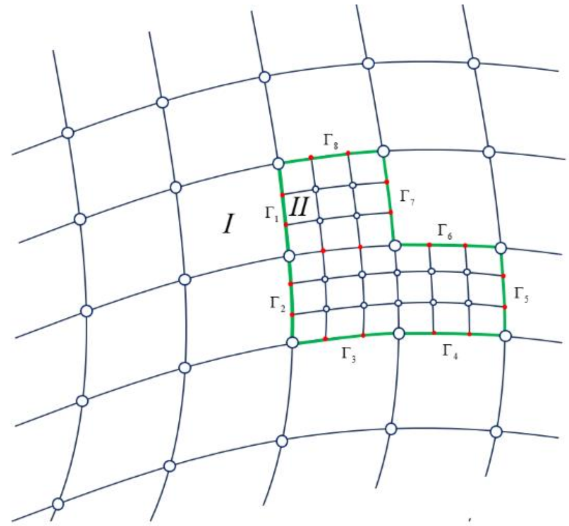
- **خاصیت تمامیت:** این ویژگی بیانگر توانایی یک سری عددی در تخمین توابع با درجه دلخواه است. به عنوان مثال اگر تابعی مانند u با یک سری چندجمله ای که دارای ترم خطی نبوده تخمین زده شود، در صورتی که پاسخ واقعی u یک تابع خطی باشد، سری عددی هیچگاه نمی‌تواند پاسخ دقیقی از این مسئله ارائه دهد. در توابع شکل FEM لازم است که تابع درونیابی حداقل درجه یک باشند. با توجه به اینکه توابع پیشنهادی نیز توابعی ایزوپارامتریک هستند، مقادیر میدان و مختصات مسئله با یک نوع تابع شکلی تخمین زده می‌شوند، بنابراین ثابت می‌شود:

$$x=\sum_{i\in N_a}\varphi_i\,x_i \tag{۲۰}$$

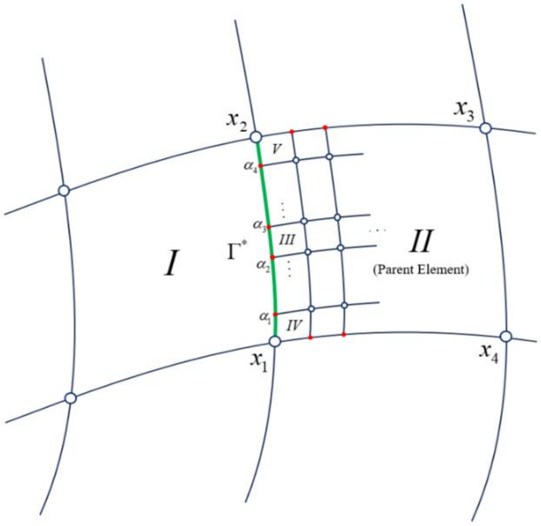
$$\begin{aligned}u(\mathrm{x})&=\sum_{i\in N_a}\varphi_i\,.\mathrm{u}_i=\sum_{i\in N_a}\varphi_i\,.(a_0+a_1x_i)=a_0\sum_{i\in N_a}\varphi_i\\ &+a_1\sum_{i\in N_a}\varphi_i x_i=a_0\times 1+a_1x=a_0+a_1x\end{aligned} \tag{۲۱}$$

دقت شود درحالتی که مسئله دو بعدی است، x به صورت بردار درنظر گرفته می‌شود که مولفه های آن (X,Y) می‌باشند.

- **خاصیت پیوستگی:** این ویژگی اشاره به همواربودن تابع تخمین یا تابع وزنی به میزان مورد نیاز در مسئله است. درجه هموار بودن تابع وابسته به مرتبه‌ی مشتق ظاهرشده در فرم ضعیف معادله دیفرانسیل است. بنابراین در معادلات الاستیسیته که تنها مشتق مرتبه اول جابجایی در معادلات فرم ضعیف وجود دارد، لازم است که توابع حداقل از مرتبه C^0 باشند.



شکل ۱۳- خاصیت پیوستگی در توابع شکل پیشنهادی



شکل ۱۴ - پیوستگی C^0 بر مرز Γ^* بین المان‌های *I* و *III*

با تخمین تابع به صورت خطی ($u(x)=a_0+a_1x$) شرط C^0 در محدوده المان ارضا می‌شود، اما لازم است تا پیوستگی میدان در مرز المان‌ها (مانند خطوط سبز رنگ در شکل ۱۳) نیز ثابت شود تا اطمینان حاصل گردد که شرط C^0 در کل دامنه برقرار خواهد بود. در توابع با پیوستگی C^n لازم است تا مشتق درجه nام روی مرز دو المان برابر بوده و رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\left.\frac{\partial^m(\varphi_i^I(x))}{\partial x^m}\right|_{x\in\Gamma^*}=\left.\frac{\partial^m(\varphi_i^{II}(x))}{\partial x^m}\right|_{x\in\Gamma^*} \quad , \quad m=1,2,\ldots,n \tag{۲۲}$$

بنابراین در توابع C^0 کافی است تا مقدار خود توابع شکل در مرز المان‌ها برابر باشند. در ادامه پیوستگی توابع پیشنهادی در مرز مشترک المان درشت با دو نوع از المان‌های ریز میانی و گوشه بررسی می‌گردد. از آنجایی که روند محاسبات در هر دو گره یک و دو مشابه یکدیگر است، روابط تنها برای تابع گره یک با مختصات x_1 بسط داده می‌شوند.

الف) المان میانی

در این حالت برای پیوستگی C^0 نیاز است تا رابطه‌ی زیر در مرز Γ^* که بین المان *I* و *III* قرار گرفته (شکل ۱۴)، برقرار باشد.

$$\left.\varphi_1^I(x)\right|_{x\in\Gamma^*}=\left.\varphi_1^{III}(x)\right|_{x\in\Gamma^*} \tag{۲۳}$$

در این حالت مقدار تابع شکلی در المان *I* برابر است با:

$$\left.\varphi_1^I(x)\right|_{x\in\Gamma^*}=\frac{1}{2}(1-\eta^I) \tag{۲۴}$$

هم‌چنین به علت هم پارامتر بودن توابع مختصات *x* به صورت زیر نوشته شده و مقدار η^I را که مختصات طبیعی در المان *I* است، بر حسب *x* بیان می‌گردد.

$$\mathrm{x}=\sum_{\mathrm{i}\in \mathrm{N_a}}\varphi_\mathrm{i}(\mathrm{x})\mathrm{x_i}=\varphi_1\mathrm{x}_1+\varphi_2\mathrm{x}_2=\frac{1}{2}(1-\eta^\mathrm{I})\mathrm{x}_1+\frac{1}{2}(1+\eta^\mathrm{I})\mathrm{x}_2 \tag{۲۵}$$

$$\eta^\mathrm{I}=\frac{2\mathrm{x}-\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1} \tag{۲۶}$$

بنابراین مقدار توابع شکل بر حسب *x* برابرند با:

$$\varphi_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\quad \varphi_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{۲۷}$$

در ادامه تابع شکلی المان *III* که توسط توابع *CPDI* به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{III}(x)\Big|_{x\in\Gamma^*} &= \varphi_{\alpha_2}^{III}(x).\varphi_{_1}^{II}(x_{\alpha_2})\\ &+\varphi_{\alpha_3}^{III}(x).\varphi_{_1}^{II}(x_{\alpha_3})\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

مشابه المان I مقادیر φ به صورت تابعی از x نوشته می‌شود:

$$\varphi_{\alpha_2}^{III}(x) = \frac{x_{\alpha_3}-x}{x_{\alpha_3}-x_{\alpha_2}} \quad , \quad \varphi_{\alpha_3}^{III}(x) = \frac{x-x_{\alpha_2}}{x_{\alpha_3}-x_{\alpha_2}} = 1-\varphi_{\alpha_2}^{III}(x) \qquad (۲۹)$$

$$\varphi_{_1}^{II}(x_{\alpha_2}) = \frac{x_2-x_{\alpha_2}}{x_2-x_1} \quad , \quad \varphi_{_1}^{II}(x_{\alpha_3}) = \frac{x_2-x_{\alpha_3}}{x_2-x_1} \qquad (۳۰)$$

روابط ۲۹ و ۳۰ در رابطه ۲۸ جایگذاری می‌شوند:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{III}(x)\Big|_{x\in\Gamma^*} &= \frac{x_{\alpha_3}-x}{x_{\alpha_3}-x_{\alpha_2}}\times\frac{x_2-x_{\alpha_2}}{x_2-x_1}+ (1-\frac{x_{\alpha_3}-x}{x_{\alpha_3}-x_{\alpha_2}})\times\frac{x_2-x_{\alpha_3}}{x_2-x_1}\\ &= \frac{x_2-x_{\alpha_3}}{x_2-x_1}+\frac{x_{\alpha_3}-x}{x_{\alpha_3}-x_{\alpha_2}}\times (\frac{x_2-x_{\alpha_2}}{x_2-x_1}-\frac{x_2-x_{\alpha_3}}{x_2-x_1})\\ &= \frac{x_2-x_{\alpha_3}}{x_2-x_1}+\frac{x_{\alpha_3}-x}{\cancel{x_{\alpha_3}-x_{\alpha_2}}}\times(\frac{\cancel{x_{\alpha_3}-x_{\alpha_2}}}{x_2-x_1})\\ &= \frac{x_2-x_{\alpha_3}}{x_2-x_1}+\frac{x_{\alpha_3}-x}{x_2-x_1} = \boxed{\frac{x_2-x}{x_2-x_1}}\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

بنابراین توابع شکل در هر دو المان روی مرز برابر هستند.

ب) المان گوشه

به طور مشابه، در المان گوشه IV نیز باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\varphi_1^{I}(x)\Big|_{x\in\Gamma^*} = \varphi_1^{IV}(x)\Big|_{x\in\Gamma^*} \qquad (۳۲)$$

تابع شکلی المان IV نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_1^{IV}(x)\Big|_{x\in\Gamma^*} = \varphi_{\alpha_1}^{IV}(x).\varphi_{_1}^{II}(x_{\alpha_1})+\varphi_1^{IV}(x) \qquad (۳۳)$$

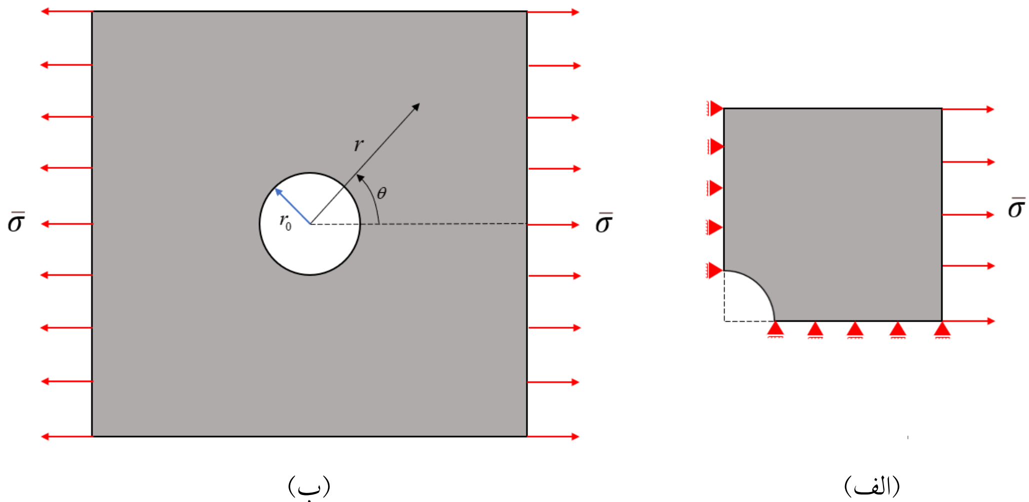
به صورت مشابه با جاگذاری توابع شکل بر حسب مختصات x رابطه‌ی زیر برقرار می‌شود:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{III}(x)\Big|_{x\in\Gamma^*} &= \frac{x-x_1}{x_{\alpha_1}-x_1}\times\frac{x_2-x_{\alpha_1}}{x_2-x_1} +(1-\frac{x-x_1}{x_{\alpha_1}-x_1})\\ &=1+\frac{x-x_1}{x_{\alpha_1}-x_1}\times(\frac{x_2-x_{\alpha_1}}{x_2-x_1}-1)\\ &=1+\frac{x-x_1}{x_{\alpha_1}-x_1}\times(\frac{\cancel{x_2}-x_{\alpha_1}-\cancel{x_2}+x_1}{x_2-x_1})\\ &=1-\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \boxed{\frac{x_2-x}{x_2-x_1}}\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

در مرز المان IV و I نیز پیوستگی $C0$ برقرار است. در سایر مرزهای المان‌های ریز دیگر و المان I و هم چنین مرزهای افقی با المان‌های بالایی و پایینی نیز پیوستگی توابع به صورت مشابه اثبات می‌گردد.

۵. مثال‌های عددی

در این بخش جهت بررسی دقت و همگرایی پاسخ‌ها به کمک توابع شکل پیشنهادی و مقایسه آن با روش المان انتقالی، دو مثال عددی حل شده‌اند. مثال اول، صفحه‌ی بی‌نهایت دوبعدی با سوراخ دایره‌ای شکل که به کمک نرم افزار متلب [۲۳] مدل‌سازی شده و مثال دوم، مکعب دارای حفره کروی شکل که حل آن با نرم افزار متلب [۲۳] و شبکه اجزای محدود و تصاویر نهایی به کمک نرم‌افزار تک‌پلات [۲۴] صورت گرفته است. جزئیات بیشتر در بخش‌های بعدی ارائه می‌گردد.



شکل ۱۵- ورق بی‌نهایت سوراخ‌دار: الف) یک‌چهارم نمونه جهت مدل‌سازی به علت شرایط مرزی متقارن ب) کل نمونه بارگذاری‌شده

۵-۱- مثال دوبعدی - صفحه‌ی بی‌نهایت با سوراخ دایره‌ای

در این مثال صفحه‌ای بی‌نهایت به اضلاع ۱۰×۱۰ میلی متر با یک سوراخ دایره‌ای شکل به شعاع $r_0 = ۱$ در وسط آن تحت تنش تک محوری در راستای افقی قرار گرفته است. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون ماده‌ی به کار رفته در این ورق به ترتیب برابر با ۱۰۰۰۰ مگاپاسکال و ۰/۳ هستند. در [۲۵] با فرض تنش مسطح حل تحلیلی برای مقادیر تنش در هر نقطه به صورت زیر به دست آمده است:

$$\sigma_{11} = \bar{\sigma}\left\{\begin{array}{l} 1-\dfrac{r_0^2}{r^2}\left[\dfrac{3}{2}\cos(2\theta)+\cos(4\theta)\right] \\ +\dfrac{3r_0^4}{2r^4}\cos(4\theta) \end{array}\right\} \qquad (۳۵)$$

$$\sigma_{22} = -\bar{\sigma}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{r_0^2}{r^2}\left[\dfrac{1}{2}\cos(2\theta)-\cos(4\theta)\right] \\ +\dfrac{3r_0^4}{2r^4}\cos(4\theta) \end{array}\right\} \qquad (۳۶)$$

$$\sigma_{12} = -\bar{\sigma}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{r_0^2}{r^2}\left[\dfrac{1}{2}\sin(2\theta)+\sin(4\theta)\right] \\ -\dfrac{3r_0^4}{2r^4}\sin(4\theta) \end{array}\right\} \qquad (۳۷)$$

و مولفه‌های جابجایی به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$u_r = \frac{\bar{\sigma}}{4\mu}\left\{\begin{array}{l} r\left[\dfrac{\kappa-1}{2}+\cos(2\theta)\right]+\dfrac{r_0^2}{r} \\ \left[1+(1+\kappa)\cos(2\theta)\right]- \\ \dfrac{r_0^4}{r^3}\cos(2\theta) \end{array}\right\} \qquad (۳۸)$$

$$u_\theta = \frac{\bar{\sigma}}{4\mu}\left\{(1-\kappa)\frac{r_0^2}{r}-r-\frac{r_0^4}{r^3}\right\}\sin(2\theta) \qquad (۳۹)$$

که در آن‌ها κ ثابت کولوسوف و μ مدول برشی می‌باشند.

به علت وجود تقارن در این مسئله در جهت کاهش محاسبات، مطابق شکل ۱۵ یک چهارم ورق را جدا شده و با صفرکردن جابجایی در راستای افقی و عمودی به ترتیب برای مرزهای چپ و پایین نمونه، آن را مدل‌سازی می‌گردد. مسئله در سه حالت مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت اول نمونه‌ها به صورت یکنواخت با طول المان‌های ۱، ۰/۵، ۰/۲۵ و ۰/۱۲۵ میلی متر شبکه‌بندی شده‌اند و مقادیر خطای جابجایی و انرژی طبق روابط ۴۰ و ۴۱ محاسبه شده‌اند.

$$E_u = \left(\frac{\int\limits_{\Omega} \left[u_n^{numerical}(x) - u_n^{exact}(x) \right] . \left[u_n^{numerical}(x) - u_n^{exact}(x) \right] d\Omega}{\int\limits_{\Omega} u_n^{exact}(x) . u_n^{exact}(x) d\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۰)$$

$$E_e = \left(\frac{\int\limits_{\Omega} e(u_n^{numerical} - u_n^{exact}) d\Omega}{\int\limits_{\Omega} e(u_n^{exact}) d\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۱)$$

در حالت دوم، نمونه‌ها اطراف سوراخ و به صورت محلی و با نسبت ۱:۲ با اندازه المان‌های ۱، ۰/۵، ۰/۲۵ و ۰/۱۲۵ میلی متر تقسیم‌بندی شده و با کمک دو تابع شکلی المان انتقالی و پیشنهادی، مقادیر خطای جابجایی و انرژی مجدد محاسبه می‌گردند. در حالت سوم، مجددا شبکه‌بندی به صورت محلی اطراف سوراخ بوده با این تفاوت که بدون رعایت نسبت ۱:۲ در تقسیم بندی‌ها، اندازه‌ی المان درشت، ثابت و برابر با یک و المان‌های کوچک به ترتیب برابر ۰/۵، ۰/۲۵ و ۰/۱۲۵ میلی‌متر می‌باشند. در این حالت یکی از مزیت‌های توابع شکل پیشنهادی مشاهده می‌شود، چرا که توابع المان انتقالی با شرط نسبت ۱:۲ در المان ریز و درشت، تولید شده و قادر به تخمین مقادیر در این حالت نیستند. در ادامه نمودارها و مقادیر به دست آمده در هر حالت نمایش داده می‌شوند.

الف) حالت شبکه بدون ریز شدگی (جدول ۱ و شکل ۱۶)

ب) حالت شبکه محلی ریزشده با نسبت ۱:۲ (جدول ۲ و ۳، شکل ۱۷ و ۱۸)

ج) حالت **شبکه محلی ریزشده با نسبت‌های دلخواه (جدول ۴ و شکل ۱۹)**

در شکل ۲۰ مقدار خطاهای جابجایی و انرژی در این مثال بر حسب تعداد المان‌های موجود در هر شبکه‌بندی ترسیم شده است. از این شکل مشخص است که در حالت کلی با افزایش تعداد المان‌ها خطا کاهش یافته است. نیز نمودارهای حاصل از روش‌های المان انتقالی و روش توابع شکل پیشنهادی حالت نسبت ۱:۲ برای بخش درشت و ریز شبکه، تقریبا بر هم منطبق هستند. روش توابع شکل پیشنهادی دارای این خاصیت است که با یک الگوریتم واحد بدون نیاز به پیاده‌سازی کد جدید توابع شکل جدید را برای نسبت‌های مختلف اندازه شبکه ریز شده به اندازه شبکه درشت، تولید کند.

۵-۲- مثال سه‌بعدی - مکعب دارای حفره کروی شکل

در این مثال محیطی سه‌بعدی به ابعاد ۱۰×۱۰×۱۰ میلی‌متر با یک حفره‌ی کوچک کروی شکل به شعاع $r_0 = ۱$ تحت تنش کششی تک محوری در راستای z قرار گرفته است (شکل ۲۱). مدول الاستیسیته و ضریب پواسون محیط سه‌بعدی به ترتیب برابر با ۱۰۰۰۰ مگاپاسکال و ۰.۳ هستند. مولفه‌های جابجایی و مقادیر تنش به صورت تحلیلی مطابق روابط زیر محاسبه می‌شوند [۲۶]:

$$u_x = \frac{r_0^3 \bar{\sigma}}{2\mu} \begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda + 6\mu}{2(9\lambda + 14\mu)} \dfrac{x}{r^3} + \dfrac{\lambda + \mu}{9\lambda + 14\mu} \\ (a^2 - r^2) \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{3z^2 - r^2}{r^5} - \dfrac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \dfrac{x}{r_0^3} \end{bmatrix} \qquad (۴۲)$$

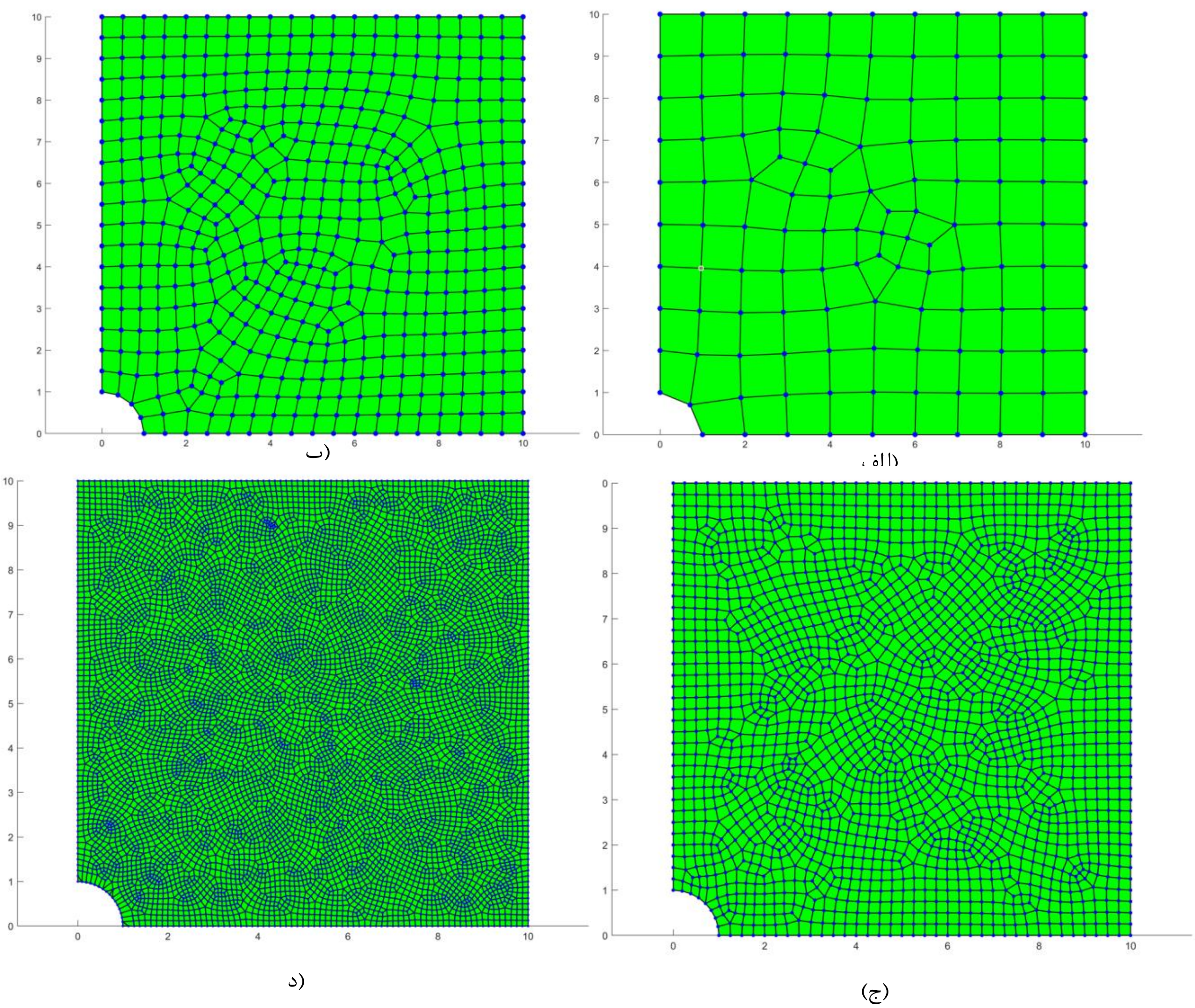
$$u_y = \frac{r_0^3 \bar{\sigma}}{2\mu} \begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda + 6\mu}{2(9\lambda + 14\mu)} \dfrac{y}{r^3} + \dfrac{\lambda + \mu}{9\lambda + 14\mu} \\ (a^2 - r^2) \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{3z^2 - r^2}{r^5} - \dfrac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \dfrac{y}{r_0^3} \end{bmatrix} \qquad (۴۳)$$

$$u_z = \frac{r_0^3 \bar{\sigma}}{2\mu} \begin{bmatrix} \dfrac{11\lambda + 26\mu}{2(9\lambda + 14\mu)} \dfrac{z}{r^3} + \dfrac{\lambda + \mu}{9\lambda + 14\mu} \\ (a^2 - r^2) \dfrac{\partial}{\partial z} \dfrac{3z^2 - r^2}{r^5} + \dfrac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \dfrac{z}{r_0^3} \end{bmatrix} \qquad (۴۴)$$

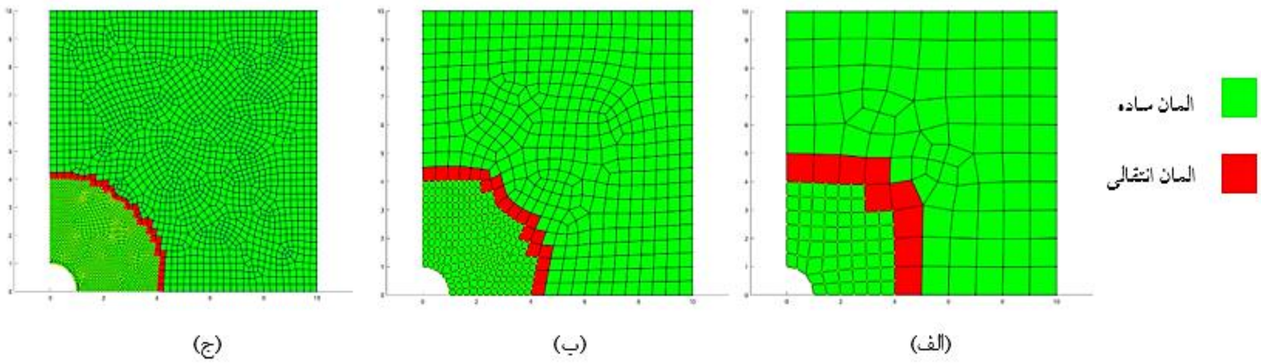
که در آن‌ها، λ و μ ثوابت لامه می‌باشند. با توجه به وجود تقارن در این مساله، یک هشتم نمونه مدلسازی و برای شبکه‌بندی آن سه حالت پیاده‌سازی شده است: (۱) شبکه بدون ریز شدگی محلی،

جدول ۱- مقادیر خطا در حالت شبکه بدون ریز شدگی محلی

log (Ee)	log (Eu)	تعداد المان‌ها	اندازه مشخصه المان‌ها
-۱/۱۳۳۴۲	-۲/۴۵۴۷۹	۱۰۸	۱
-۱/۳۴۳۳۱	-۲/۹۶۱۱۲	۴۳۲	۰/۵
-۱/۵۹۹۸۳	-۳/۴۸۵۱۴	۱۷۲۸	۰/۲۵
-۱/۸۸۲۷۳	-۳/۹۸۴۸۸	۶۹۱۲	۰/۱۲۵



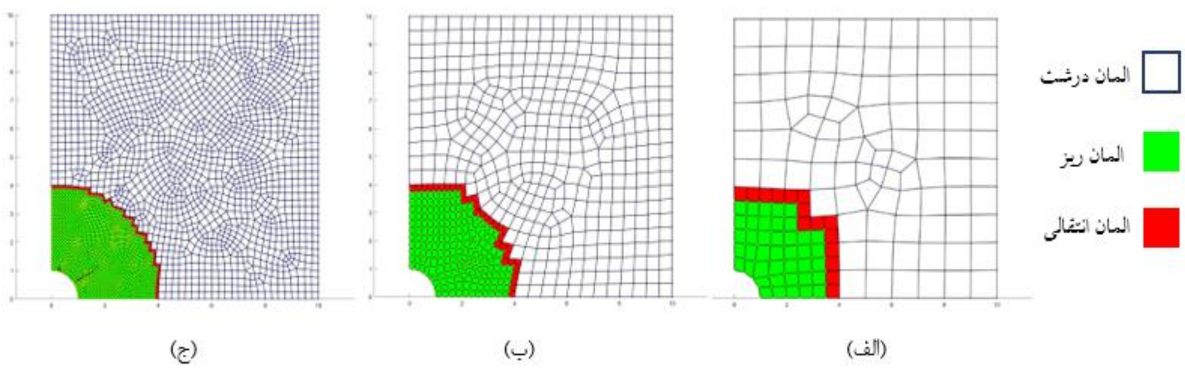
شکل ۱۶- شبکه‌بندی‌های متفاوت در حالت شبکه بدون ریزشدگی محلی : الف) ۱ میلی‌متر، ب) ۰/۵ میلی‌متر، ج) ۰/۲۵ میلی‌متر، د) ۰/۱۲۵ میلی‌متر



شکل ۱۷- شبکه بندی های متفاوت در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش المان انتقالی: الف) ۰/۵ - ۱ میلی‌متر، ب) ۰/۲۵ - ۰/۵ میلی‌متر، ج) ۰/۱۲۵ - ۰/۲۵ میلی‌متر

جدول ۲- مقادیر خطا در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش المان انتقالی

اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه ریز شده	اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه درشت	تعداد المان‌ها	log (Eu)	log (Ee)
۰/۵	۱	۱۵۰	-۲/۹۷۰۲	-۱/۳۴۷۱
۰/۲۵	۰/۵	۶۳۹	-۳/۴۸۶۷	-۱/۵۹۴۶
۰/۱۲۵	۰/۲۵	۲۶۶۲	-۳/۸۸۹۶	-۱/۸۲۹۸



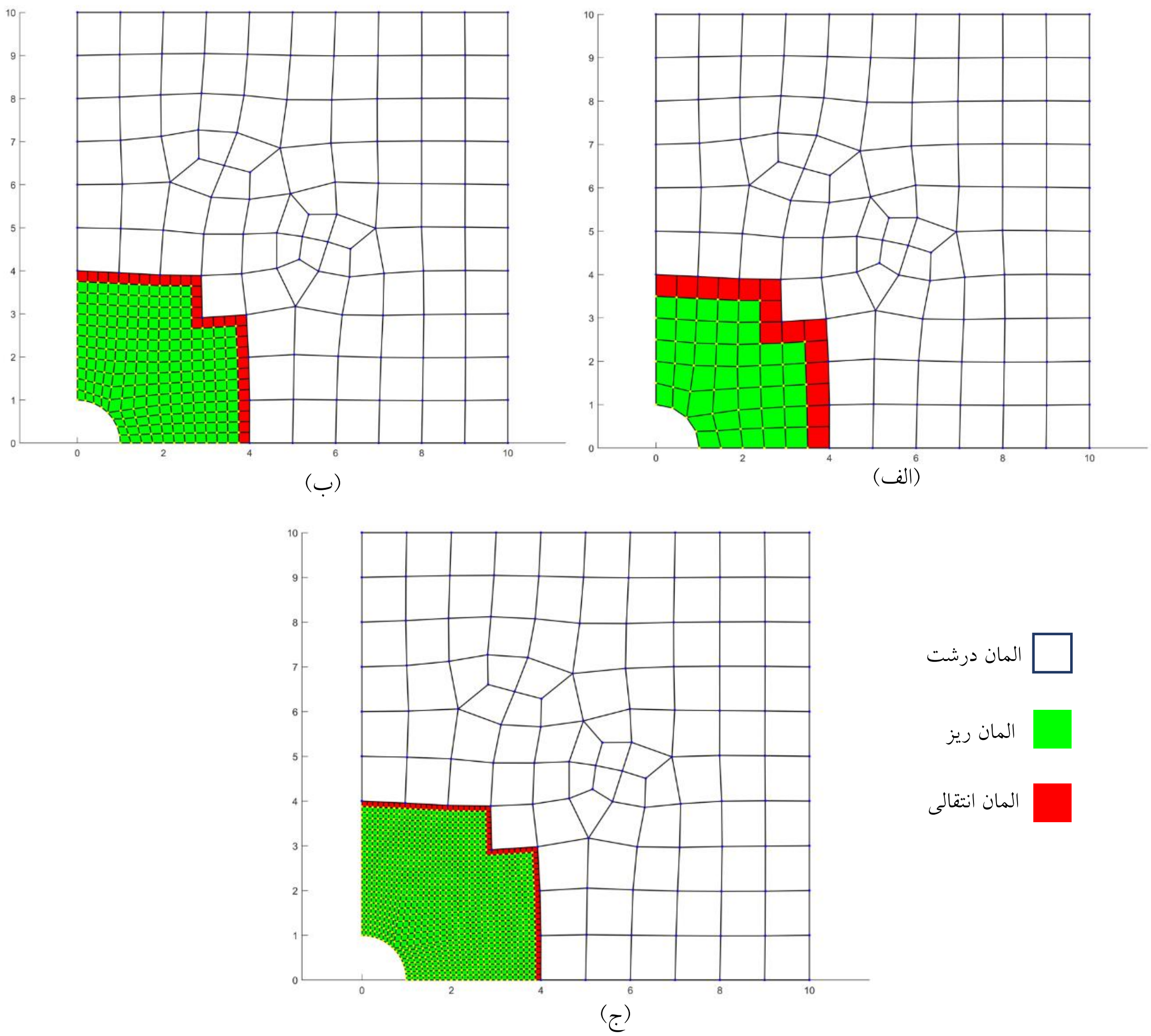
شکل ۱۸- شبکه‌بندی‌های متفاوت در حالت شبکه ریزشده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی: الف) ۰/۵ - ۱ میلی‌متر، ب) ۰/۲۵ - ۰/۵ میلی‌متر، ج) ۰/۱۲۵ - ۰/۲۵ میلی‌متر

جدول ۳- مقادیر خطا در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی

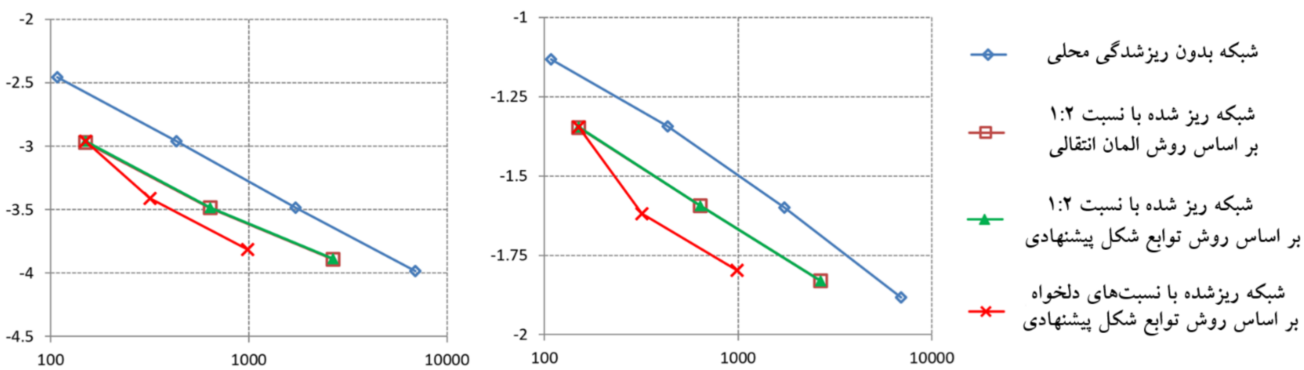
اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه ریز شده	اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه درشت	تعداد المان‌ها	log (Eu)	log (Ee)
۰/۵	۱	۱۵۰	-۲/۹۵۹۵	-۱/۳۴۵۴
۰/۲۵	۰/۵	۶۳۹	-۳/۴۸۴	-۱/۵۹۴
۰/۱۲۵	۰/۲۵	۲۶۶۲	-۳/۸۸۹	-۱/۸۲۹۷

جدول ۴- مقادیر خطا در حالت شبکه ریز شده با نسبت‌های دلخواه بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی

log (Ee)	log (Eu)	تعداد المان‌ها	اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه درشت	اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه ریز شده
-۱/۳۴۵۴	-۲/۹۵۹۵	۱۵۰	۱	۰/۵
-۱/۶۱۸۹	-۳/۴۰۹۸	۳۱۸	۱	۰/۲۵
-۱/۷۹۶۷۹	-۳/۸۱۵۴۲	۹۹۰	۱	۰/۱۲۵



شکل ۱۹- شبکه‌بندی‌های متفاوت در حالت شبکه ریزشده با نسبت‌های دلخواه بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی: الف) ۰/۵ - ۱ میلی‌متر، ب) ۰/۲۵ - ۰/۵ میلی‌متر، ج) ۰/۱۲۵ - ۰/۲۵ میلی‌متر

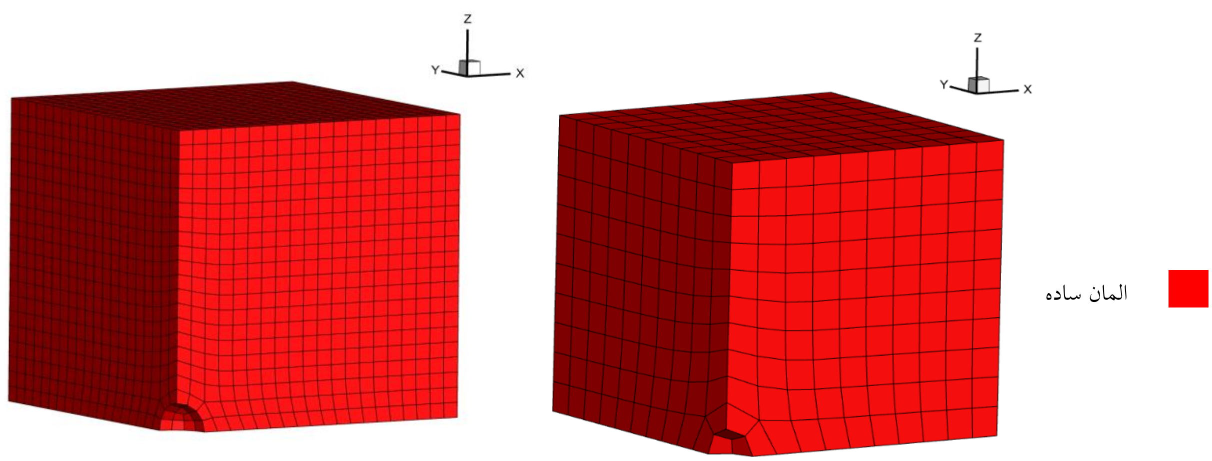


(ب) (الف)

شکل ۲۰- نمودارهای همگرایی بر حسب تعداد المان‌های شبکه برای مثال صفحه سوراخ‌دار: الف) نرم خطای جابجایی ب) نرم خطای انرژی

جدول ۵- مقادیر خطا در حالت شبکه بدون ریز شدگی محلی

log (Ee)	log (Eu)	تعداد المان‌ها	اندازه مشخصه المان‌ها
-۱/۷۸۴۵۹	-۳/۰۸۸۲۴	۱۰۰۲	۱
-۲/۰۷۴۵۷	-۳/۶۲۷۱	۸۰۱۶	۰/۵
-۲/۳۷۴	-۴/۲۰۷۳	۶۴۱۲۸	۰/۲۵
-۲/۶۵۸۴	-۴/۷۹۲۴	۵۱۳۰۲۴	۰/۱۲۵

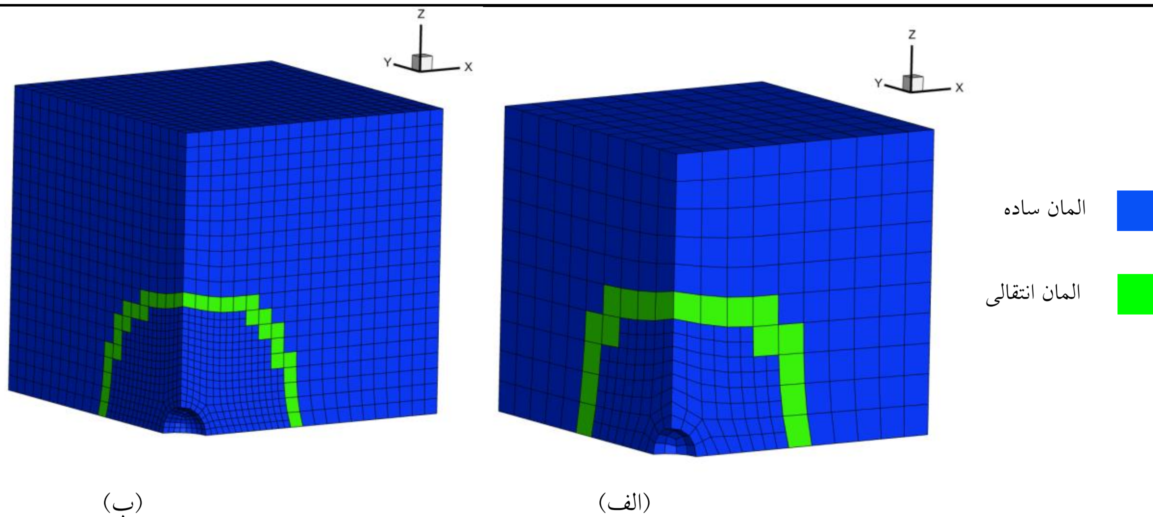


(ب) (الف)

شکل ۲۱- شبکه بندی های متفاوت در حالت شبکه بدون ریز شدگی محلی با اندازه المان‌های: الف) ۱ میلی‌متر، ب) ۰/۵ میلی‌متر

جدول ۶- مقادیر خطا در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش المان انتقالی

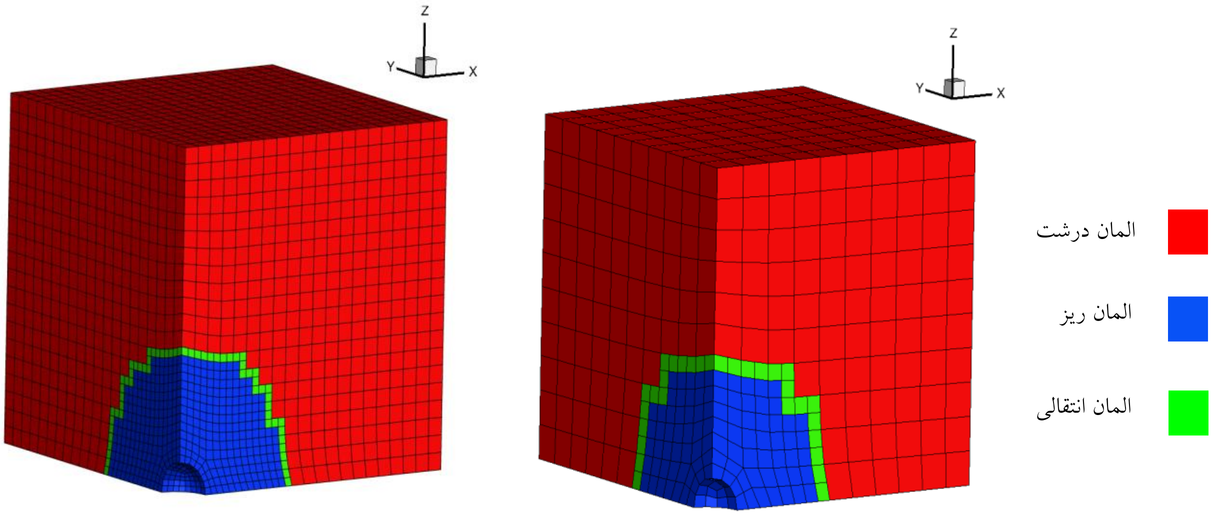
اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه ریز شده	اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه درشت	تعداد المان‌ها	log (Eu)	log (Ee)
۰/۵	۱	۱۳۳۱	-۳/۶۲۵۳۲	-۲/۰۷۴۱۲
۰/۲۵	۰/۵	۹۹۳۶	-۴/۱۴۱۹	-۲/۳۲۲۸
۰/۱۲۵	۰/۲۵	۸۹۲۴۵	-۴/۶۲۰۹	-۲/۵۴۵۷



شکل ۲۲- شبکه بندی های متفاوت در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش المان انتقالی با اندازه المان‌های: الف) ۰/۵ – ۱ میلی‌متر، ب) ۰/۲۵ – ۰/۵ میلی‌متر

جدول ۷- مقادیر خطا در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی

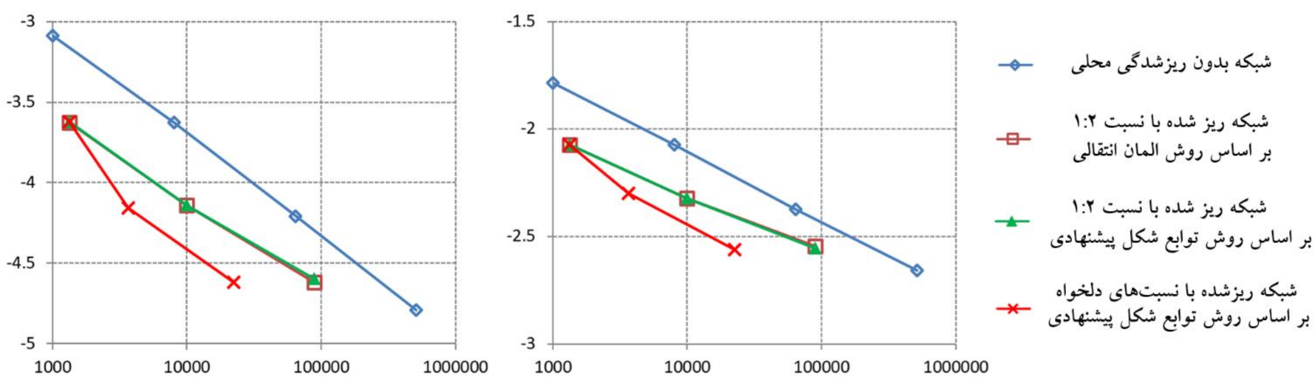
اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه ریز شده	اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه درشت	تعداد المان‌ها	log (Eu)	log (Ee)
۰/۵	۱	۱۳۳۱	-۳/۶۲۱۷	-۲/۰۷۳۵۹
۰/۲۵	۰/۵	۹۹۳۶	-۴/۱۴۰۴	-۲/۳۲۲۵
۰/۱۲۵	۰/۲۵	۸۹۲۴۵	-۴/۵۹۶۲	-۲/۵۵۵۱



شکل ۲۳- شبکه بندی های متفاوت در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی با اندازه المان‌های: الف) ۰/۵ – ۱ میلی‌متر، ب) ۰/۲۵ – ۰/۵ میلی‌متر

جدول ۸- مقادیر خطا در حالت شبکه ریزشده با نسبت‌های دلخواه بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی

log (Ee)	log (Eu)	تعداد المان‌ها	اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه درشت	اندازه مشخصه المان‌ها در بخش شبکه ریز شده
-۲/۰۷۳۵۹	-۳/۶۲۱۷	۱۳۳۱	۱	۰/۵
-۲/۲۹۸۹۵	-۴/۱۵۶۷۱	۳۶۷۸	۱	۰/۲۵
-۲/۵۶۲۳۱	-۴/۶۱۶۸۴	۲۲۴۵۲	۱	۰/۱۲۵



شکل ۲۴- نمودارهای همگرایی بر حسب تعداد المان‌های شبکه برای مثال مکعب دارای حفره کروی شکل: الف) نرم خطای جابجایی ب) نرم خطای انرژی

(۲) شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ و (۳) شبکه ریز شده با نسبت‌های دلخواه. تحلیل اجزای محدود در حالات مختلف و بر اساس روشهای المان انتقالی و توابع شکل پیشنهادی انجام گرفته است و مقادیر نرم خطای جابجایی و نرم خطای انرژی طبق روابط ۴۰ و

۴۱ محاسبه شده‌اند. در ادامه نمودارها و مقادیر به دست آمده در هر حالت ارائه می‌شوند.

الف) حالت شبکه یکنواخت (جدول ۵ و شکل ۲۱)

ب) حالت شبکه محلی ریزشده با نسبت ۱:۲ (جدول ۶ و ۷ و شکل ۲۲ و ۲۳)

ج) حالت شبکه محلی ریزشده با نسبت‌های مختلف (جدول ۸)

در شکل ۲۴ مقدار خطاهای جابجایی و انرژی در مثال محیط سه بعدی با حفره کروی شکل بر حسب تعداد المان‌های موجود در هر شبکه‌بندی ترسیم شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که نمودارهای حاصل از روشهای المان انتقالی و روش توابع شکل پیشنهادی حالت نسبت ۱:۲ برای بخش درشت و ریز شبکه، تقریبا بر هم منطبق هستند. روش توابع شکل پیشنهادی دارای این خاصیت می باشد که با یک الگوریتم واحد بدون نیاز به پیاده سازی کد جدید توابع شکل جدید را برای نسبت‌های مختلف اندازه شبکه ریز شده به اندازه شبکه درشت، تولید کند.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله با ارائه‌ی توابع شکل پیشنهادی (بر مبنای توابع *CPDI*)، مشکل ناپیوستگی و منفی شدن توابع شکل در المان‌های انتقالی با گره‌های معلق که هنگام ریز کردن شبکه به صورت محلی در نقاط بحرانی به وجود می‌آیند، حل شده است. در روابط ارائه شده در بخش‌های قبل به صورت تحلیلی ثابت شد که این توابع پیشنهادی با حفظ خواص پیوستگی، تمامیت وتقسیم جزء واحد می‌توانند جایگزین توابع استاندارد اجزاء محدود شوند. هم چنین در مثال‌های حل شده نشان داده شد که نتایج حاصل از حل مسائل با کمک توابع پیشنهادی و توابع المان انتقالی در شرایط مشابه، تقریبا برابر بوده و علاوه بر آن در روش جدید با برطرف کردن محدودیت شرط ۱:۲ می‌توان با هزینه محاسباتی کمتر به نتایج دقیق‌تری نسبت به روش‌های قبلی رسید.

واژه‌نامه

1. Conformability
2. Transitional elements
3. Hanging nodes
4. Continuity
5. Partition of unity
6. Adaptive finite element methods
7. Adaptive local mesh refinement
8. Local mesh refinement with hanging nodes
9. Conformability
10. Constrained approximation
11. Transition element
12. Convected Particle Domain Interpolation
13. Parent
14. Completeness
15. Regular
16. Irregular
17. h-refinement
18. hierarchical
19. Convected Particle Domain Interpolation
20. Material Point Method
21. Finite Element Method

منابع

1. Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L., "*The Finite Element Method For Solid And Structural Mechanics*," Elsevier, 2005.
2. Aksoylu B., Bond, S., and Holst, M., "An Odyssey Into Local Refinement And Multilevel Preconditioning Iii: Implementation And Numerical Experiments", *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 25, No. 2, pp. 478-498, 2003.
3. Aksoylu, B., and Holst, M., "Optimality of Multilevel Preconditioners for Local Mesh Refinement in Three

Dimensions”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 44, No. 3, pp. 1005–1025, 2006.
4. Chen, H., Hoppe, R. H. W., and Xu, X., “Uniform Convergence Of Local Multigrid Methods For The Time-Harmonic Maxwell Equation”, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 47, No. 1, pp. 125–147, 2013.
5. Hannukainen, A., Korotov, S., and Křížek, M., “On Global and Local Mesh Refinements by a Generalized Conforming Bisection Algorithm,” *Journal of computational and applied mathematics*, Vol. 235, No. 2, pp. 419–436, 2010.
6. Fries, T. P., Byfut, A., Alizada, A., Cheng, K. W., and Schröder, A., “Hanging Nodes and XFEM”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 86, No. 4–5, pp. 404–430, 2011.
7. Demkowicz, L., Oden, J. T., Rachowicz, W., and Hardy, O., “Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 1. Constrained Approximation and Data Structure”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 77, No. 1–2, pp. 79–112, 1989.
8. Ainsworth, M., and Senior, B., “Aspects of an Adaptive Hp-Finite Element Method: Adaptive Strategy, Conforming Approximation And Efficient Solvers”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 150, No. 1–4, pp. 65–87, 1997.
9. Byfut, A., and Schröder, A., “Hp-Adaptive Extended Finite Element Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 89, No. 11, pp. 1392–1418, 2012.
10. Kůs, P., “Automatic hp-Adaptivity on Meshes with Arbitrary-Level Hanging Nodes in 3D,” *Ph.D. Dissertation*, Charles University, Prague, 2011.
11. Šolín, P., Červený, J., and Doležel, I., “Arbitrary-Level Hanging Nodes And Automatic Adaptivity in the hp-FEM,” *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 77, No. 1, pp. 117–132, 2008.
12. Jeong G. E., Song, Y. U., Youn, S. K., and Park, K. C., “A New Approach for Nonmatching Interface Construction by the Method Of Localized Lagrange Multipliers”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 361, p. 112728, 2020.
13. Muixí, A., Fernández-Méndez, S., and Rodríguez-Ferran, A., “Adaptive Refinement for Phase-Field Models of Brittle Fracture Based on Nitsche’s Method”, *Computational mechanics*, Vol. 66, No. 1, pp. 69–85, 2020.
14. Gupta, A. K., “A Finite Element for Transition From A Fine to A Coarse Grid”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 35-45, 1978.
15. Tabarraei, A., and Sukumar, N., “Adaptive Computations on Conforming Quadtree Meshes”, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2005, Vol. 41, No. 7–8, pp. 686–702.
16. Baitsch, M., and Hartmann, D., “Piecewise Polynomial Shape Functions for Hp-Finite Element Methods”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 13–14, pp. 1126–1137, 2009.
17. McDill, J. M., Goldak, J. A., Oddy, A. S., and Bibby, M. J., “Isoparametric Quadrilaterals and Hexahedrons for Mesh-Grading Algorithms”, *Communications in applied numerical methods*, Vol. 3, No. 2, pp. 155–163, 1987.
18. Morton, D. J., Tyler, J. M., and Dorroh, J. R., “A New 3D Finite Element for Adaptive h-Refinement in 1-Irregular Meshes”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, No. 23, pp. 3989–4008, 1995.
19. Lim, J. H., Sohn, D., and Im, S., “Variable-Node Element Families for Mesh Connection and Adaptive Mesh Computation”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 43, No. 3, pp. 349–370, 2012.
20. Ling, D., Bu, L., Tu, F., Yang, Q., and Chen, Y., “A Finite Element Method with Mesh-Separation-Based Approximation Technique and Its Application in Modeling Crack Propagation with Adaptive Mesh Refinement”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 99, No. 7, pp. 487–521, 2014.
21. Sadeghirad, A., Brannon, R. M., and Burghardt, J., “A Convected Particle Domain Interpolation Technique to Extend Applicability of the Material Point Method for Problems Involving Massive Deformations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 86, No. 12, pp. 1435–1456, 2011.
22. Sadeghirad, A., Brannon, R. M., and Guilkey, J. E., “Second-Order Convected Particle Domain Interpolation (CPDI2) with Enrichment for Weak Discontinuities at Material Interfaces”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 95, No. 11, pp. 928–952, 2013.
23. MATLAB Release 2019, MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.
24. Tecplot 360 EX, Tecplot, Inc., Bellevue, WA, United States.
25. Timoshenko, S., and J. Goodier, “*Theory of Elasticity*”, McGraw-Hill, 1969.
26. Gronwall, T. H., “Elastic Stresses in an Infinite Solid with a Spherical Cavity”, *Annals of Mathematics*, Vol. 19, No. 4, p. 295, 1918.