

روش جدید برای ریزکردن محلی شبکه در روش اجزای محدود به کمک توابع شکل جایگزین

> نسرین خیرخواه برزکی و علیرضا صادقی راد * دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دريافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۱/۲۶ – دريافت نسخه نهايي: ۱۴۰۳/۰۳/۱۸) DOI: 10.47176/jcme.43.2.1031

چکیده – بر خلاف شبکههای متشکل از المانهای مثلثی/ چهاروجهی در روش اجزای محدود دو/سه بعدی، ریزکردن محلی شبکههای متشکل از المانهای چهارضلعی/ شش وجهی با حفظ سازگاری^۱ دشوار بوده و معمولا منجر به اعوجاج شدید المانها می گردد. روش شناخته شده و پرکاربرد برای برطرف کردن این مشکل، ریزکردن محلی شبکه بر اساس المانهای انتقالی^۲ و گرههای معلق^۲ است. نکتهی کلیدی در این روش، اعمال پیوستگی^۴ تغییر مکان در مرز المانهای انتقالی در حضور گرههای معلق است. المانهای انتقالی^۲ و گرههای معلق^۲ است. نکتهی کلیدی در این روش، اعمال پیوستگی^۴ تغییر مکان در مرز داشته و نیز محدود به یک تعداد مشخص از گرههای معلق بر مرز المان می باشند. بنابراین پیاده سازی آنها برای یک حالت بسیار عمومی پیچیده است. در این مقاله یک المان انتقالی جدید بر اساس توابع شکل جایگزین معرفی شده است که با یک رابطه بندی واحد حالات مختلف قرارگیری المان انتقالی در شبکه و نقاله یک المان انتقالی جدید بر اساس توابع شکل جایگزین معرفی شده است که با یک رابطه بندی واحد حالات مختلف قرارگیری المان انتقالی در شبکه و نیز تعداد دلخواه گرههای معلق را پشتیبانی می کند. هم چنین اثبات تحلیلی به منظور نشان دادن حفظ کامل شرایط پیوستگی و تقسیم جزء واحد^ه در روش پیشنهادی هنگام ریز کردن محلی شبکه به کمک توابع شکل جایگزین ارائه شده است. در نهایت با حل مثالهای عددی دو و سه بعدی مقایسه بین دقت و میر نیور روش پیشنهادی و روشهای موجود در پیشینه فنی صورت گرفته است.

واژههای کلیدی: روش اجزای محدود، ریزشدگی محلی شبکه، گرههای معلق، المان انتقالی، توابع شکل جایگزین.

A novel technique for local mesh refinement in the finite element method based on the alternative shape functions

N. Kheirkhah Barzoki and A. Sadeghirad

Department of Civil and Environmental Engineering, Amirkabir University of Technology

Abstract: Unlike triangular/tetrahedral elements used in the finite element method for two/three-dimensional problems, local refinement of meshes composed of quadrilateral/hexahedral elements while maintaining the compatibility is challenging, and often results in severe distortion of the elements. A well-known and widely used approach to address this issue is the local mesh refinement based on transitional elements with hanging nodes. The key point in this method is enforcing the displacement continuity at the transitional element boundaries in the presence of hanging nodes. Transitional elements introduced in the literature employ various formulations depending on their placement within the mesh, and are also constrained by a maximum number of hanging nodes. along

* : مسئول مكاتبات، پست الكترونيكي:sadeghirad@aut.ac.ir

the element boundary. Therefore, their implementation for a general case is quite complicated. This paper presents a novel transitional element based on alternative shape functions, which offers a unified formulation for different placements of transitional elements in the mesh, applicable to any number of hanging nodes. Additionally, an analytical proof is provided to demonstrate the continuity and partition of unity properties in the proposed method, used in local mesh refinement. Finally, numerical examples in two and three dimensions are simulated to compare the accuracy and convergence of the proposed method against the existing methods in the literature.

Keywords: Finite element method, Local mesh refinement, Hanging nodes, Transition elements, Alternative shape functions.

		علائم	فهرست
گره فعال	Na	مجموعه پايه	Н
گره غيرفعال	N_{if}	ضرایب چندجملهای پایه	α
تابع شکلی پیشنهادی	φ	تابع دلخواه	Ψ
تغيير مكان	u	مختصات طبيعي	ξ
تنش کاشی	σ	مختصات طبيعي	η
خطای جابجایی	E_{u}	تابع شكلى	χ
خطای انرژی	Ee	دامنه المان	Ω
		دامنه ذره	Ω_{p}

۱. مقدمه

بسیاری از مدلسازیها در مسائل مهندسی، با پدیدههایی مانند گرادیان بالای تنش، تکینگی در نواحی کوچکی از دامنه مسأله مواجه هستند. ایدهی مناسب برای افزایش دقت روش اجزای محدود در این مسائل، ریز کردن شبکه در این نواحی بحرانی است. خیلی زود پس از ابداع روش اجزای محدود در دهه ۱۹۶۰ میلادی، روشهای اجزای محدود انطباقی² برای ریز کردن شبکه معرفی شدند [1].

ریز کردن شبکه به دو صورت کلی و محلی قابل انجام است. در روش ریز کردن کلی شبکه، شبکه در تمام دامنهی مسأله دوباره ساخته شده و ریز می گردد. از آنجا که ریز کردن کلی شبکه منجر به ایجاد هزینه محاسباتی بسیار بالا و غیرضروری می گردد بنابراین تغییر ابعاد شبکه به شکل محلی پیشنهاد شده است. ریز کردن محلی

شبکه به دو صورت انطباقی^۷ [۵-۲] و محلی همراه با گرههای معلق^۸ امکانپذیر است. در حالت انطباقی ابعاد شبکه به صورت تدریجی تغییر کرده و تمام گرهها المان های مجاور روی یکدیگر منطبق خواهند بود و سازگاری^۸ شبکه حفظ میگردد. اما در حالت محلی همراه با گرههای معلق، تنها بخشی از شبکه ریز شده و گرههایی روی اضلاع المانهای همسایه ریزنشده، به نام «گرههای معلق» در مسأله ظاهر میگردند. بر خلاف شبکههای متشکل از المانهای مثلثی/ چهاروجهی در روش اجزای محدود، ریز کردن محلی شبکههای متشکل از المانهای چهارضلعی/ شش وجهی با المانها میگردد. بنابراین ریز کردن محلی همراه با گرههای معلق المانها میگردد. بنابراین ریز کردن محلی همراه با گرههای معلق بحرانی محلی است [۶]. واضح است با وجود این گرههای معلق،

[۲۱] و نحوهی جدیدی برای انتخاب المانهای انتقالی سعی شده تا مشکل عدم پیوستگی در مرز المانهای مجاور برطرف گردد. در روش پیشنهادی، در المانهای روی مرز بین شبکههای ریز و درشت بدون در نظر گرفتن درجه آزادی برای گرههای معلق، توابع شکل بر حسب گرههای گوشه المان والد^{۱۲} (المان درشتی که تقسیم بندی شده) به دست می آید که همواره مقادیر مثبتی تولید کرده و شرایط پیوستگی، تمامیت^{۱۳} و تقسیم جزء واحد را که در همگرایی مسئله تاثیر گذار هستند، برقرار می کنند. برخلاف روش المان انتقالی گوپتا، در روش پیشنهادی محدودیتی در نسبت المانهای ریز به درشت وجود نخواهد داشت و مقادیر توابع شکل همواره مثبت خواهند بود.

اگرچه در مقاله حاضر المان انتقالی پیشنهادی بر اساس توابع شکل جایگزین CPDI برای شبکههای شامل المانهای چهارضلعی/ششوجهی توسعه یافته است، قابل ذکر است که الگوریتم پیشنهادی قابل تعمیم به المانهای مثلثی/ چهاروجهی نیز است. اما با توجه به اینکه (۱) ریز کردن محلی شبکههای متشکل از المان های مثلثی/ چهاروجهی ساده است و (۲) المان های چهارضلعی/شش وجهی در تحلیل های اجزای محدود دقت بالاتری نسبت به المان های مثلثی/ چهاروجهی دارند، مقاله حاضر به توسعه المان انتقالى پيشنهادى براى شبكههاى شامل المانهاى مثلثى/ چهاروجهی نمی پردازد. در ادامه برتری المانهای چهارضلعی/ شش وجهی در قالب یک مثال بررسی می شود. در حل مسائل اجزای محدود، المان،ای چهارضلعی/ ششوجهی به دلیل توانایی درونیابی خطی توزیع تنش، در تجزیه و تحلیلهایی که به دقت بالای محاسبات تنش نیاز دارند، نسبت به المان های مثلثی/ چهاروجهی برتری دارند. این ویژگی به خصوص در مواردی با گرادیانها و تغییرات تنش قابل توجه، به مزیت تبدیل می شود. این المانها همچنین در شبیهسازیهای مکانیک سازه از جمله بارگذاریهای پیچشی یا خمشی که در آنها توزیع خطی تنش با رفتار واقعى مواد هماهنگى بيشترى دارد، بسيار كارآمد محسوب به دلیل ناسازگاری توابع شکل استاندارد اجزای محدود روی مرز المانها پیوستگی تغییر مکان نقض شده و همگرایی روش دچار مشکل می گردد. بنابراین تکنیکهای مختلفی برای غلبه بر این موضوع پیشنهاد شده است. یک روش، مقید کردن درجه آزادی گرههای معلق در یک ضلع المان به گرههای گوشهی آن ضلع قرار گرفته بوده که روش تخمین مقید^۹ نامیده میشو*د* [۱۱–۷]. تکنیک بعدی اعمال شرایط انطباقی به کمک روش های پنالتی ضرایب لاگرانژ و نیچه است [۱۲ و ۱۳]. در نهایت روش دیگر، تولید توابع شکل جدید در المانهای دارای گرههای معلق و معرفی درجه آزادی مستقل در این گرهها است، که به این تکنیک، روش المان انتقالی' میگویند [۲۰–۱۴]. المانهای انتقالی در کار گوپتا و همکاران [۱۴] در مسائل دوبعدی و پس از آن توسط مک دیل [۱۷] و مورتون [۱۸] در مسائل سهبعدی پیاده شده است. در این روش با معرفی توابع شکل در گرههای معلق با درجه آزادی مستقل و اصلاح توابع شکل استاندارد در گرههای گوشهی مربوطه، پیوستگی تغییر مکان در مرز المانهای انتقالی تضمین میگردد. یکی از محدودیتهای این توابع، تعریف آنها با شرط نسبت یک به دو در المانهای ریز به درشت است که در [۱۹] با تعریف توابع جدید برای تعداد دلخواه گرهها به حل این موضوع پرداخته شده است. با وجود این که این روش در مناطق با ریزشدگی محدب با دقت خوبی پاسخ میدهد اما معمولا در مناطق مقعر (جایی که یک المان بیش از ۲ گره معلق داشته باشد) منجر به تولید توابع شکل منفی شده و در حل مسئله اختلال به وجود میآید. همچنین توابع شکل تولید شده در این روش برای هر حالت باید به صورت جداگانه به دست آمده و باعث افزایش محاسبات میگردد. مقالهی دیگر پژوهش لینگ و همکارانش [۲۰] است که با روش جداسازی شبکه، المان مرزى را به سه بخش المان رياضي، المان فيزيكي و المان انتقالي تقسیم کرده و با نگاشت دوگانه توابع شکل یکپارچهای برای آنها توليد ميكند.

در این مقاله با کاربرد توابع شکل جایگزین در روش CPDI ^{۱۱}

می شوند. از نظر زمان محاسباتی نیز، شبکه های شامل المان های چهارضلعی/ششوجهی معمولاً به تعداد کمتری المان نیاز داشته و منجر به کاهش هزینهی محاسباتی مرتبط با حل سیستم معادلات می گردند. جهت مقایسهی دقت این دو نوع المان، مثال صفحه بینهایت سوراخدار تحت بارگذاری کششی برای هر دو نوع المان چهارضلعی و مثلثی حل شده است. جزئیات این مثال در بخش ۱.۵ ارائه شده است. شکل ۱–الف و ۱–ب شبکههای مورد استفاده در تحلیل اجزای محدود شامل المانهای چهارضلعی و مثلثی را نشان میدهد. شکل ۱-ج و ۱-د، نمودارهای تنش در فواصل مختلف از سوراخ را در دو مدل با گرههای متفاوت نشان میدهند. همانگونه که مشاهده می شود دقت تحلیل اجزای محدود با المانهای چهارضلعی بالاتر از دقت نتایج حاصل از المانهای مثلثی است. با توجه به اینکه در تحلیل های مورد مقایسه تعداد گرهها در شبکه با المانهای چهارضلعی یکسان با تعداد گرهها در شبکه با المانهای مثلثی است، هزینه محاسباتی تحلیل های اجزای محدود مشابه یکدیگر خواهد بود و می توان نتیجه گرفت که کاربرد المانهای چهارضلعی با هزینه محاسباتی یکسان نتایج دقیقتری نسبت به کاربرد المانهای مثلثی بدست میدهد.

در ادامهی این مقاله خلاصهای از روش های تخمین مقید و المان انتقالی و روابط ارائهشده برای آنها در بخش دوم ارائه می گردد. پس از آن در بخش سوم توابع شکل جایگزین معرفی شده و ایده و نحوه به دست آوردن آنها بیان می گردد. در ادامه بخش چهارم شامل روابط ریاضی و اثباتهای تحلیلی جهت نشان دادن حفظ کامل شرایط پیوستگی و تقسیم جزء واحد در روش پیشنهادی است. بخش پنجم به حل مثالهای عددی دو و سه بعدی به منظور مقایسهای بین دقت و همگرایی روش پیشنهادی و روش المان انتقالی اختصاص یافته و نتایج مدل-سازیها گزارش می شوند. در نهایت در بخش ششم نتیجه گیری ارائه می شود.

۲. روش های تخمین مقید و المان انتقالی

در روش اجزای محدود جهت تقریب پاسخ یک مسئله، ابتدا دامنه ی حل به المانهای جداگانه با تعداد گرههای مختلف (N) وابسته به مرتبه یه هر المان تقسیم می گردد. در حالتی که تمامی این المانها هماندازه و هممرتبه باشند شبکه تولید شده منظم^{۱۴} و در غیر این صورت نامنظم^{۱۵} خواهد بود. هنگام ریزکردن هندسی شبکه^{۱۹} (بدون تغییر مرتبه ی المانها) به صورت محلی شبکههای نامنظم و در پی آن گرههای معلق در محل تماس المانهای ریز و درشت به وجود می آیند که سبب اختلال در پیوستگی توابع شکل روی مرز المانها می گردد. همانطور که اشاره شد، رویکردهای مختلفی برای حل این مسئله وجود دارد که می توان به روش های تخمین مقید و المان انتقالی اشاره کرد.

فرض کنید تابع $\Psi(x,y)$ از ترکیب چندجملهای های پایه داخل مجموعه H با ضرایب lpha به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\Psi^{h}(x,y) = \sum_{j=1}^{N_{H}} H_{j} \alpha_{j} \tag{1}$$

مجموعه پایه H که تعداد عناصر آن N_H بسته به رتبهی المان تعیین می گردد، به صورت استاندارد به فرم زیر تعریف می شود که در آن کچو *آ*مختصات محلی گره *i* در هر المان هستند:

$$H = \begin{bmatrix} 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi \eta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \dots \end{bmatrix}$$
(Y)

با به دست آوردن ضرایب مناسب *α* و در نظر گرفتن رابطهی (۱) و (۲) مقادیر توابع شکل استاندارد خطی برای یک المان چهار گرهای به صورت زیر خواهد بود:

$$\chi_i(x, y) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (\tilde{r})$$

روش تخمین مقید در قسمت قبل اشاره شد که هنگام تولید یک شبکه نامنظم گرههای معلقی در مرز المانها تولید میشود.

۴



د

شکل ۱- مقایسه ی دقت دو نوع المان: الف) المان چهارضلعی، ب) المان مثلثی، ج) تعداد ۳۹۸ گره، د) تعداد ۲۳۵۴ گره



تعريف خواهند شد:

$$\begin{split} \chi_{1}^{E1} &= \frac{1}{2}(1 - \eta_{1}), \qquad \chi_{2}^{E1} = \frac{1}{2}(1 + \eta_{1}) \\ \chi_{1}^{E2} &= \frac{1}{2}(1 - \eta_{2}), \qquad \chi_{2}^{E2} = \frac{1}{2}(1 + \eta_{2}) \\ \chi_{1}^{E3} &= \frac{1}{2}(1 - \eta_{3}), \qquad \chi_{2}^{E3} = \frac{1}{2}(1 + \eta_{3}) \end{split}$$

بنابراین مقدار تابع Ψ، به شکل زیر در هر یک از المانهای روی وجه ab محاسبه می شود:

$$\begin{split} \Psi_{E1}^{h} &= \chi_{1}^{E1}(\eta_{1}).\Psi_{a} + \chi_{2}^{E1}(\eta_{1}).\Psi_{b} \\ \Psi_{E2}^{h} &= \chi_{1}^{E2}(\eta_{2}).\Psi_{a} + \chi_{2}^{E2}(\eta_{2}).\Psi_{c} \\ \Psi_{E3}^{h} &= \chi_{1}^{E3}(\eta_{3}).\Psi_{c} + \chi_{2}^{E3}(\eta_{3}).\Psi_{b} \end{split}$$
(\$

با تبدیل مختصات محلی المانهای کوچک $E_2 \ e_4 \ e_4$ به مختصات المان اصلی E_1 رابطه ای بین توابع شکل آنها پیدا می شود. با توجه به اینکه $1 + 1 \ q_2 = 2\eta_1 + 1$ و $\eta_4 = 2\eta_1 - 1$ و $\eta_2 = 2\eta_1 + 1$ توابع شکل χ^{E4} به شکل زیر بازنویسی می شوند: $\eta_4 = 1 - 2^{E_2}$

$$\chi_{1} = -\eta_{1} , \quad \chi_{2} = 1 + \eta_{1}$$

$$\chi_{1}^{E3} = 1 - \eta_{1} , \quad \chi_{2}^{E3} = \eta_{1}$$
(V)

یکی از روش های حل عدم ناپیوستگی در این اضلاع، مقید کردن گره معلق است. در این قسمت توضیح مختصری از این روش که در [۷] برای ریزشدگی ترکیبی *h-p* با مد نظر قرار دادن نسبت ۱:۲ هنگام تقسیم المانها و در مقالههای بعدی برای تعداد دلخواه گرهی معلق روی هر ضلع اصلاح شده است [۴ و ۵] بیان می گردد. در واقع فرض اصلی در اینجا این است که تابع در این گره به صورت مستقل تعریف نشده است. یعنی، مقدار تابع در این گره وابسته به مقدار تابع در گرههای اصلی واقع بر ضلعی از المان می باشد که این گره روی آن ضلع قرار گرفته است. در این روش مقدار تابع Ψ_b خواهد بود (شکل ۲):

$$\Psi_c = \lambda_1 \Psi_a + \lambda_2 \Psi_b \tag{(f)}$$

بنابراین هدف، یافتن ضرایب مناسب λ با شرط حفظ پیوستگی روی مرز المانها است. برای تخمین تابع Ψ روی ضلع ab ، با در نظر گرفتن توابع پایه خطی در یک بعد بردار H تنها دارای دو مولفهی یک و η خواهد بود. بنابراین توابع شکل استاندارد روی این وجه در هریک از المانهای یک و دو و سه به صورت زیر



شکل ۳ – محاسبه مقادیر تابع در گرههای معلق به صورت سلسله مراتبی

$$\chi^{E_1} = \mathcal{S}^b.\chi^{E_2} \quad , \mathcal{S}^b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \chi^{E_1} = \mathcal{S}^t.\chi^{E_3}$$

$$, \mathcal{S}^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{A}$$

 $\Psi^{h}_{E1} = \Psi^{h}_{E3}$ و $\Psi^{h}_{E1} = \Psi^{h}_{E2}$ حال با توجه به شرط پیوستگی نتیجه می شود:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{a} \\ \Psi_{c} \end{bmatrix} = (\mathcal{G}^{b})^{T} \begin{bmatrix} \Psi_{a} \\ \Psi_{b} \end{bmatrix} \rightarrow \Psi_{c} = \frac{1}{2} (\Psi_{a} + \Psi_{b})$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{c} \\ \Psi_{b} \end{bmatrix} = (\mathcal{G}^{t})^{T} \begin{bmatrix} \Psi_{a} \\ \Psi_{b} \end{bmatrix} \rightarrow \Psi_{c} = \frac{1}{2} (\Psi_{a} + \Psi_{b})$$
(9)

این رابطه بیان می کند که در حالت خطی و استفاده از توابع شکل رتبه یک، مقدار تابع در نقطهی c برابر میانگین توابع در دو راس المان اصلی خواهد بود. در رتبههای بالاتر نیز مشابه همین رویکرد است با این تفاوت که ابعاد ماتریس g افزایش یافته و با حل دستگاه معادلاتی مانند رابطهی ۸ مقادیر تابع در گرههای معلق تعیین می شود. حال برای حالتی با تعداد دلخواهی از گرههای معلق روی مرز دو المان با در نظر گرفتن المانهای فرضی بین المانهای کوچک و اصلی مقادیر تابع در گرههای معلق به صورت سلسله مراتبی^{۱۱} تعیین می گردند. این رویکرد در شکل ۳ نشان داده شده

FI است. ابتدا مقدار Ψ در گرهی d و پس از آن به کمک دو المان FI و F2 در گرههای c و e محاسبه می گردند. با اعمال این روش، با افزایش تعداد نقاط معلق میزان محاسبات زیاد شده و منجر به هزینهی زمانی بالایی خواهد شد.

روش المان انتقالى

این روش که اولین بار توسط Gupta و همکاران [۱۴] ارائه شده است، با تعریف درجه آزادی مستقل برای گرههای معلق و تولید المانهای انتقالی با توابع شکل متفاوت توانسته پیوستگی را در مرز المانهای ریز و درشت حفظ کند. ابتدا با رعایت نسبت ۱:۲ به معنی وجود تنها یک گرهی معلق در مرز هر دو المان، به کمک اضافه کردن چند عنصر به مجموعه ی چندجمله ای های پایه توابع شکل تعریف شدند. به طور مثال در حالت شکل ۴ یک المان شش گرهای e با چندجمله ای های پایه ی زیر جایگزین المان استاندارد E_1

 $H = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \left| \xi \right| (\eta - 1) & \left| \eta \right| (\xi + 1) \end{bmatrix} \quad (1 \circ)$

گرهی پنجم و ششم به ترتیب روی اضلاع بالا و چپ قرار گرفتهاند بنابراین دو جملهی آخر این بردار به صورتی تعیین شده تا مقدار تابع مربوط به این گرهها در اضلاع پایین و راست که بدون گرهی معلق هستند صفر شود. توابع شکل به صورت زیر محاسبه می شوند:



شکل ۴ – المان شش گرهای e_I در روش المان انتقالی با چندجملهای های پایهی جایگزین

محدودیت دیگر این روش، اجبار نسبت ۱:۲ در هنگام ریز کردن المانهاست که جهت رفع آن در [۱۹] پیشنهاد شد تا مانند روال قبل با اضافه کردن چندجمله ای های پایه بیشتر توابع شکل محاسبه گردند. با این تفاوت که این مقادیر پایه با توجه به مختصات گرههای معلق و وجهی از المان که روی آن قرار دارند تعیین مى گردند. جملەى $|\eta - \eta_{nr}|(\xi - 1)$ براى وجە راست، برای وجه چپ، $\left| \zeta - \zeta_{nt} \right| (\eta - 1)$ برای وجه پپ، $\left| \eta - \eta_{nt} \right| (\xi + 1)$ بالا و $(\eta + 1)$ بالا و $(\eta + 1)$ برای وجه پایین به مجموعه H اضافه خواهند شد و به ترتيب قبل توابع شكل مربوط به هر گره محاسبه می شود. واضح است در این روش برای هر تعداد گره باید بردار H و \overline{H} به صورت جداگانه نوشته شده و توابع شکل مربوط محاسبه گردند یکی از چالش های اساسی این روش است. به عنوان مثال در شکل ۶ فقط برای یک نوع المان، باید به بردار H تعداد ۱۶ جمله اضافه شود. بنابراین این روش، برای تعداد بالایی از گرههای معلق کم هزینه نیست و افزایش ابعاد این دو ماتریس با مقادیر مختلف برای هر المان، منجر به هزینهی محاسباتی بالایی خواهد شد. هم چنین مسئلهی منفی شدن توابع شکل همچنان پابرجا است.

$$\begin{split} \overline{\chi}_{1} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{4}(1-|\xi|)(1-\eta) \\ \overline{\chi}_{2} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{4}(1-|\xi|)(1-\eta) \\ &- \frac{1}{4}(1+\xi)(1-|\eta|) \\ \overline{\chi}_{3} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-|\eta|) \\ \hline{\chi}_{4} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ \overline{\chi}_{5} &= \frac{1}{2}(1-|\xi|)(1-\eta) \\ \hline{\chi}_{6} &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-|\eta|) \\ \hline{\chi}_{6} &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-|\eta|) \\ \text{In the equation of the set of the se$$

روی همگرایی پاسخها تاثیر گذاشته و یا بسته به نوع مسئله موجب تخمین مقادیری شود که معنای فیزیکی ندارند.



شکل ۵ – منفی شدن توابع شکل در روش المان انتقالی



CPDI یا درونیابی بر اساس دامنه ذرات سازگار با تغییرشکل^{۱۸} [۲۱ و ۲۲] تکنیکی در روش نقاط مادی ^{۱۹}*MPM* [۲۶–۲۳] به منظور بالابردن دقت و پایداری عددی است. روش MPM یک روش ترکیبی لاگرانژی-اویلری است که در آن نمونه به صورت جداگانه به ذراتی تقسیمبندی شده و انتگرالگیری روی شبکه پسزمینه صورت مي گيرد. بنابراين المان هاي ذرات و شبكه پسزمينه مستقل از یکدیگر هستند. در شکل ۷ حالت یکبعدی این نوع مسئله با دو نوع دامنه المان Ω و Ωp مشاهده می شود (مرز المان های Ω به صورت دایرههای سفید توخالی و Ω_p با خطوط | نمایش داده شدهاند). در صورت استفاده از توابع شکل استاندارد FEM شدهاند).) در شبکه پسزمینه، واضح است که شیب این توابع روی مرز المانها تغيير كرده و مشتق آن ناپيوسته است، كه در محاسبه تنش ايجاد مشكل ميكند.

با تغییر مقدار توابع روی این مرزها می توان این گسستگی را از



شكل ۶ – تعميم روش المان انتقالي

nb

nt

е

nr

بین برد. بنابراین در روش CPDI توابع شکل خود به مثابه یک تابع یا میدان (مثل جابجایی، سرعت، دما) در نظر گرفته شده و برای یافتن آنها در یک سری نقاط خاص، لازم است تا توابع شکل استاندارد توسط توابع شکل دیگری درونیابی شوند. این توابع جدید که با χ_i^{app} نشان داده شدهاند به کمک درونیابی از توابع روى المان Ω_p با توابع شكل Q_a^p توليد مىشوند. χ_i

$$\chi_i^{app}(x) = \sum_{\alpha=1}^4 Q_\alpha^p(x) \chi_i(x_\alpha^p) \quad on \quad \Omega_p \qquad (11)$$

در روش CPDI، توابع شکل جایگزین به منظور رفع مشکل ناپیوستگی تنش در مرز المانها زمانی که ذرات حمل کننده تاریخچه تنش و کرنش در یک تحلیل تغییرشکلهای بزرگ از مرز المانها عبور ميكنند، بكار ميروند. در مقاله حاضر پيشنهاد مي گردد که این توابع شکل جایگزین برای هدفی کاملا متفاوت، یعنی ازبین-بردن ناپیوستگی تغییرمکان در المانهای انتقالی در تحلیل اجزای محدود بکار گرفته شوند. در روش FEM به هنگام تقسیمبندی و ریز کردن محلی شبکه، توابع شکل استاندارد در مرز بین شبکه ریز و درشت دچار ناپیوستگی میشوند (شکل ۸). بنابراین برای حل



شکل ۷- توابع شکل جایگزین در روش CPDI : الف) توابع شکل استاندارد، ب) توابع CPDI



شکل ۸– الف) توابع شکل FEM با ناپیوستگی و ب) توابع شکل پیشنهادی دارای پیوستگی روی مرز ریز و درشت مربوط به گره i



شکل ۹– نمایش گرههای فعال و غیرفعال روی شبکه ریز شده

شکل ۱۰– المانهای انتقالی در روش پیشنهادی

این مشکل، در این مقاله به کمک ایده روش CPDI توابع شکل جدیدی روی المانهای انتقالی، تولید می شوند. برای این منظور ابتدا کلیهی گرههای روی شبکه به دو گروه تقسیمبندی می شوند: • گرههای فعال(Na): گرههایی هستند که در گوشهی المانها قرار گرفته و توابع شکل روی آنها تعریف می گردد.

 گرههای غیر فعال(N_{if}): گره هایی از المان کوچکتر هستند که در مرز بین المان ریز و درشت قرار گرفته و دارای توابع شکل مستقل در مسئله نیستند بلکه از این گرهها برای تعریف توابع شکل گرههای گوشه کمک گرفته می شود. در شکل ۹ نودهای فعال و غیرفعال به ترتیب با دایرههای توپر و توخالی مشخص شدهاند.

رابطهای که در اینجا برای توابع شکل CPDI در گرههای فعال تعریف میشود به صورت زیر است:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in N_{ij}} \chi_\alpha(\mathbf{x}) \ \chi'_i(\mathbf{x}_\alpha) + \chi_i(\mathbf{x}) \qquad , i \in N_a \qquad (1\mathfrak{r})$$

در این رابطه α نشاندهنده گرههای غیرفعال است، بنابراین در المانهای ساده با کلیه گرههای فعال بخش اول معادله حذف و تابع شکلی آنها همان توابع مرسوم FEM خواهد بود. اما در المانهای دارای حداقل یک گره غیرفعال که المان انتقالی نامیده می شوند، تابع شکلی در واقع ترکیبی از توابع مرسوم در المانهای کوچک و

المان بزرگتر یا اصطلاحا والد است. بنابراین بخش اول معادله ۱۳ نیز وارد محاسبات می گردد که در آن $\chi_{\alpha}(x)$ مقدار تابع شکلی گرههای غیرفعال در مختصات محلی المان کوچک، $_{\alpha}x$ مغدار تابع شکلی گرههای غیرفعال در مختصات محلی المان کوچک، $_{\alpha}x$ مغدار تابع محلی گرهای غیرفعال در المان محلی المان کوچک، $_{\alpha}x$ مقدار تابع شکلی گره ی غیرفعال در المان است. همچنین $\chi_i(x)$ مقدار تابع شکلی گره ی فعال در گره ی غیرفعال است. همچنین $\chi_i(x)$ مقدار تابع نتابع استاندارد گره ی فعال در مختصات محلی المان کوچک است. شکلی گره ی فعال در مختصات محلی المان کوچک است. شکلی گره ی فعال در مختصات محلی المان کوچک است. شکلی گره ی فعال در شکل ۱۰ که المان های انتقالی با رنگ قرمز در آن نشان داده شده است، مطابق رابطه ۱۳، در گرههای فعال *a* d *z* و نشان داده شده است، مطابق رابطه ۲۵، در گرههای فعال معاد مومان المان کوچک است. که که با المان داده شده است، مطابق رابطه ۲۵، در گرههای فعال که d *z* و منه اول معادله حذف شده و مقدار تابع شکلی همان روی ضلع *B* قرار دارند مقدار تابع شکلی در نقاط C *و ب*رابر صفر روی ضلع *B* قرار دارند مقدار تابع شکلی در نقاط C *و ب*رابر مفال باد کوچکتر درونیابی شده و تابع شکلی در نقاط C *و ب*رابر مفال مفر است. ای می می فعال می معان در کره مان محلی المان کوچکتر درونیابی شده و توابع ($\chi_i(x)$ می می مان المان کوچکتر درونیابی شده و توابع ($\chi_i(x)$ می مان المان کوچکتر درونیابی شده و توابع ($\chi_i(x)$ می می مان المان کوچکتر درونیابی شده و توابع ($\chi_i(x)$ می گردند.

در شکل ۱۱، کانتورهای دوبعدی توابع شکل پیشنهادی در المانهای مجاور مرز شبکه ریز و درشت برای سه حالت مختلف نشان داده شده است.



در شکل ۱۲ توابع شکل در تمامی نودهای فعال در یک ناحیه تقسیمبندی نشان داده شدهاند.



شکل ۱۲-توابع شکل پیشنهادی در در تمامی نودهای فعال

۴. خواص توابع شکل پیشنهادی به طور کلی در حل مسائل اجزای محدود، به جهت تضمین دقت، همگرایی و پایداری در تخمین پاسخها ضروری است تا توابع شکل ویژگیهای مشخصی همچون دلتای کرونیکر، تقسیم جزء واحد، تمامیت و پیوستگی را ارضا کنند. در ادامه به بررسی هر کدام از این ویژگیها در توابع جدید پیشنهادی پرداخته می شود.

خاصیت دلتای کرونیکر: طبق این ویژگی مقدار تابع شکلی
 گره i در تمام نودهای غیر از گره i برابر صفر و در خود گره برابر
 یک است. با این ویژگی مقادیر درونیابی شده در هر گره دقیقا برابر
 با مقدار میدان در آن نقطه است.

$$\varphi_i(x_k) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$
(14)

طبق رابطه ۱۴ از آنجایی که α نشاندهنده یگرههای غیرفعال در المان کوچک است، توابع شکل آن $\chi_{\alpha}(x_{i})$ در گرههای فعال برابر صفر خواهد بود و تنها بخش دوم معادله که همان توابع استاندارد هستند، در رابطه بندی باقی می ماند بنابراین:

$$i \in N_a \to i \neq \alpha \to \chi_\alpha(x_i) = 0 \tag{10}$$

$$\sum_{\alpha \in N_{ij}} \chi_{\alpha}(x_i) \chi_i(x_{\alpha}) + \chi_i(x_i) = 0 + \chi_i(x_i) = 1$$
(19)

$$k = i \neq \alpha$$

$$\sum_{\alpha \in N_{ij}} \chi_{\alpha}(x_{i'}) \chi_{i}(x_{\alpha}) + \chi_{i}(x_{i'}) = 0 + \chi_{i}(x_{i'}) = 0$$

$$k \neq i, \alpha$$
(1V)

به این ترتیب خاصیت دلتای کرونکر برای توابع شکل پیشنهادی اثبات می گردد. • تقسیم جزء واحد : طبق این خاصیت، مجموع مقدار توابع شکل تمامی المانها در هر نقطه از دامنه برابر یک است. به عبارت

ديگر:

$$\sum_{i\in N_a} \varphi_i(x_k) = 1 \tag{1A}$$

در گرههای فعال غیرمرزی که توابع شکل آنها FEM استاندارد

است این قید به صورت خودکار برقرار است. بنابراین در حالت
کلی از جمع بستن توابع
$$arphi_i(x_k^-)$$
 روی کل گرههای فعال رابطه
زیر حاصل میشود:

$$\sum_{i \in N_{a}} \varphi_{i}(x_{k}) = \sum_{i \in N_{ac}} \sum_{\alpha \in N_{if}} \chi_{\alpha}(x_{k}) \chi_{i}'(x_{\alpha}) + \sum_{i \in N_{af}} \chi_{i}(x_{k})$$

$$= \sum_{\alpha \in N_{if}} [\chi_{\alpha}(x_{k}) \sum_{i \in N_{ac}} \chi_{i}'(x_{\alpha})] + \sum_{i \in N_{af}} \chi_{i}(x_{k}) \qquad (19)$$

$$= \sum_{\alpha \in N_{if}} \chi_{\alpha}(x_{k}) \times 1 + \sum_{i \in N_{af}} \chi_{i}(x_{k}) = \sum_{i \in N_{f}} \chi_{i}(x_{k}) = 1$$

• خاصیت تمامیت: این ویژگی بیانگر توانایی یک سری عددی در تخمین توابع با درجه دلخواه است. به عنوان مثال اگر تابعی مانند *u* با یک سری چندجمله ای که دارای ترم خطی نبوده تخمین زده شود، در صورتی که پاسخ واقعی *u* یک تابع خطی باشد، سری عددی هیچگاه نمی تواند پاسخ دقیقی از این مسئله ارائه دهد. در توابع شکل FEM لازم است که تابع درونیابی حداقل درجه یک باشند. با توجه به اینکه توابع پیشنهادی نیز توابعی ایزوپارامتریک هستند، مقادیر میدان و مختصات مسئله با یک نوع تابع شکلی تخمین زده می شوند، بنابراین ثابت می شود:

$$x = \sum_{i \in N_a} \varphi_i \, x_i \tag{Y \circ}$$

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N_a} \varphi_i \cdot \mathbf{u}_i = \sum_{i \in N_a} \varphi_i \cdot (a_0 + a_1 x_i) = a_0 \sum_{i \in N_a} \varphi_i$$
$$+ a_1 \sum_{i \in N_a} \varphi_i x_i = a_0 \times 1 + a_1 x = a_0 + a_1 x$$
(Y1)

دقت شود درحالتی که مسئله دو بعدی است، x به صورت بردار درنظر گرفته میشود که مولفه های آن (X,Y) میباشند.

• خاصیت پیوستگی: این ویژگی اشاره به همواربودن تابع تخمین یا تابع وزنی به میزان مورد نیاز در مسئله است. درجه هموار بودن تابع وابسته به مرتبهی مشتق ظاهرشده در فرم ضعیف معادله دیفرانسیل است. بنابراین در معادلات الاستیسیته که تنها مشتق مرتبه اول جابجایی در معادلات فرم ضعیف وجود دارد، لازم است که توابع حداقل از مرتبه ^{C0} باشند.



^{*}T که بین المان *I و III* قرار گرفته (شکل ۱۴)، برقرار باشد.

$$\varphi_{1}^{I}(x)\Big|_{x\in\Gamma^{*}} = \varphi_{1}^{III}(x)\Big|_{x\in\Gamma^{*}}$$
(YY)

در این حالت مقدار تابع شکلی در المان I برابر است با:

$$\varphi_1^I(x)\Big|_{x\in\Gamma^*} = \frac{1}{2}(1-\eta^I) \tag{(Yf)}$$

همچنین به علت هم پارامتر بودن توابع مختصات x به صورت زیر نوشته شده و مقدار η^I را که مختصات طبیعی در المان I است، بر حسب x بیان می گردد.

$$\begin{split} x = & \sum_{i \in N_a} \phi_i(x) x_i = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 = \\ & \frac{1}{2} (1 - n^I) x_i + \frac{1}{2} (1 + n^I) x_2 \end{split} \tag{72}$$

$$2^{(I - I_1)X_1 + 2} \frac{2^{(I - I_1)X_2}}{x_2}$$

$$\eta^{I} = \frac{2x - x_1 - x_2}{x_2 - x_1}$$
(Y9)

$$\varphi_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \varphi_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{YV}$$

در ادامه تابع شکلی المان III که توسط توابع CPDI به صورت زیر تعریف می شود:



با تخمین تابع به صورت خطی $(u(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 \mathbf{x})$ شرط ⁰C در محدوده المان ارضا می شود، اما لازم است تا پیوستگی میدان در مرز المانها (مانند خطوط سبز رنگ در شکل ۱۳) نیز ثابت شود تا اطمینان حاصل گردد که شرط ⁰C در کل دامنه برقرار خواهد بود. در توابع با پیوستگی ⁿC لازم است تا مشتق درجه *n*ام روی مرز دو المان برابر بوده و رابطهی زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial^{m}(\varphi_{i}^{I}(x))}{\partial x^{m}}\bigg|_{x\in\Gamma^{*}} = \frac{\partial^{m}(\varphi_{i}^{II}(x))}{\partial x^{m}}\bigg|_{x\in\Gamma^{*}}$$
(YY)
, $m = 1, 2, ..., n$

الف) المان میانی در این حالت برای پیوستگی ^C⁰ نیاز است تا رابطهی زیر در مرز

$$\varphi_{1}^{IV}(x)\Big|_{x\in\Gamma^{*}} = \varphi_{\alpha_{1}}^{IV}(x).\varphi_{1}^{II}(x_{\alpha_{1}}) + \varphi_{1}^{IV}(x)$$
(TT)

به صورت مشابه با جاگذاری توابع شکل بر حسب مختصات x رابطهی زیر برقرار می شود:

$$\begin{split} \varphi_{1}^{III}(x)\Big|_{x\in\Gamma^{*}} &= \frac{x-x_{1}}{x_{\alpha_{1}}-x_{1}} \times \frac{x_{2}-x_{\alpha_{1}}}{x_{2}-x_{1}} \\ &+ (1-\frac{x-x_{1}}{x_{\alpha_{1}}-x_{1}}) \\ &= 1+\frac{x-x_{1}}{x_{\alpha_{1}}-x_{1}} \times (\frac{x_{2}-x_{\alpha_{1}}}{x_{2}-x_{1}}-1) \\ &= 1+\frac{x-x_{1}}{x_{\alpha_{1}}-x_{1}} \times (\frac{y_{2}'-x_{\alpha_{1}}-y_{2}'+x_{1}}{x_{2}-x_{1}}) \\ &= 1-\frac{x-x_{1}}{x_{2}-x_{1}} = \boxed{\frac{x_{2}-x_{1}}{x_{2}-x_{1}}} \end{split}$$

در مرز المان *IV و I* نیز پیوستگی C0 برقرار است. در سایر مرزهای المانهای ریز دیگر و المان *I و* هم چنین مرزهای افقی با المانهای بالایی و پایینی نیز پیوستگی توابع به صورت مشابه اثبات می گردد.

۵. مثالهای عددی

در این بخش جهت بررسی دقت و همگرایی پاسخها به کمک توابع شکل پیشنهادی و مقایسه آن با روش المان انتقالی، دو مثال عددی حل شدهاند. مثال اول، صفحهی بینهایت دوبعدی با سوراخ دایرهای شکل که به کمک نرم افزار متلب [۲۳] مدلسازی شده و مثال دوم، مکعب دارای حفره کروی شکل که حل آن با نرم افزار متلب [۳۳] و شبکه اجزای محدود و تصاویر نهایی به کمک نرمافزار تکپلات [۲۴] صورت گرفته است. جزئیات بیشتر در بخشهای بعدی ارائه می گردد.

$$\begin{split} \varphi_{1}^{III}(x)\Big|_{x\in\Gamma^{*}} &= \varphi_{\alpha_{2}}^{III}(x).\varphi_{1}^{II}(x_{\alpha_{2}}) \\ &+ \varphi_{\alpha_{3}}^{III}(x).\varphi_{1}^{II}(x_{\alpha_{3}}) \end{split}$$
(YA)

مشابه المان
$$I$$
 مقادیر φ به صورت تابعی از x نوشته می شود:

$$\begin{split} \varphi_{a_{2}}^{III}(x) &= \frac{x_{a_{3}} - x}{x_{a_{3}} - x_{a_{2}}} \\ , \quad \varphi_{a_{3}}^{III}(x) &= \frac{x - x_{a_{2}}}{x_{a_{3}} - x_{a_{2}}} = 1 - \varphi_{a_{2}}^{III}(x) \\ \varphi_{1}^{II}(x_{a_{2}}) &= \frac{x_{2} - x_{a_{2}}}{x_{2} - x_{1}} \\ , \quad \varphi_{1}^{II}(x_{a_{3}}) &= \frac{x_{2} - x_{a_{3}}}{x_{2} - x_{1}} \\ &: \\ , \quad \varphi_{1}^{II}(x_{a_{3}}) = \frac{x_{2} - x_{a_{3}}}{x_{2} - x_{1}} \\ &: \\ \chi_{0} \in \mathbb{C}$$
 (Y9)



شکل ۱۵- ورق بی نهایت سوراخدار: الف) یک چهارم نمونه جهت مدل سازی به علت شرایط مرزی متقارن ب) کل نمونه بارگذاری شده

۵–۱– مثال دوبعدی – صفحهی بینهایت با سوراخ دایرهای در این مثال صفحهای بینهایت به اضلاع ۱۰×۱۰ میلی متر با یک سوراخ دایرهای شکل به شعاع ۲۵ = ۲۵ در وسط آن تحت تنش تک محوري در راستاي افقي قرار گرفته است. مدول الاستيسيته و ضریب پواسون مادهی به کار رفته در این ورق به ترتیب برابر با ۱۰۰۰۰ مگاپاسکال و ۰/۳ هستند. در [۲۵] با فرض تنش مسطح حل تحلیلی برای مقادیر تنش در هر نقطه به صورت زیر به دست آمده است:

$$\sigma_{11} = \overline{\sigma} \begin{cases} 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left[\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right] \\ + \frac{3r_0^4}{2r^4} \cos(4\theta) \end{cases}$$
(76)
$$- \left[\frac{r_0^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right] \right]$$
(76)

$$\sigma_{22} = -\sigma \left\{ + \frac{3r_0^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right\}$$
(17)
$$\sigma_{12} = -\sigma \left\{ \frac{r_0^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right] \right\}$$
(17)

$$\sigma_{22} = -\overline{\sigma} \begin{cases} \frac{r_0^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right] \\ + \frac{3r_0^4}{r^2} \cos(4\theta) \end{cases}$$
(7)

$$\sigma_{12} = -\overline{\sigma} \begin{cases} \frac{r_0^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right] \\ -\frac{3r_0^4}{2r^4} \sin(4\theta) \end{cases}$$
(7V)

و مولفههای جابجایی به صورت زیر محاسبه می گردند: $u_{r} = \frac{\overline{\sigma}}{4\mu} \begin{cases} r \left[\frac{\kappa - 1}{2} + \cos(2\theta) \right] + \frac{r_{0}^{2}}{r} \\ \left[1 + (1 + \kappa)\cos(2\theta) \right] - \\ \frac{r_{0}^{4}}{r^{3}}\cos(2\theta) \end{cases}$ $(\Upsilon\Lambda)$

$$u_{\theta} = \frac{\overline{\sigma}}{4\mu} \left\{ (1-\kappa) \frac{r_0^2}{r} - r - \frac{r_0^4}{r^3} \right\} \sin(2\theta) \qquad (rq)$$

که در آنها K ثابت کولوسوف و μ مدول برشی میباشند. به علت وجود تقارن در این مسئله در جهت کاهش محاسبات، مطابق شکل ۱۵ یک چهارم ورق را جدا شده و با صفرکردن جابجایی در راستای افقی و عمودی به ترتیب برای مرزهای چپ و پايين نمونه، آن را مدلسازي مي گردد. مسئله در سه حالت مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت اول نمونهها به صورت یکنواخت با طول المان،های ۱، ۵/۵، ۲۵/۰ و ۱۲۵/۰ میلی متر شبکهبندی شدهاند و مقادیر خطای جابجایی و انرژی طبق روابط ۴۰ و ۴۱ محاسبه شدهاند.

$$E_{u} = \left(\frac{\int_{\Omega} \left[u_{n}^{numerical}(x) - u_{n}^{exact}(x) \right]}{\int_{\Omega} \left[u_{n}^{numerical}(x) - u_{n}^{exact}(x) \right] d\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\mathfrak{f} \circ)$$

$$E_{e} = \left(\frac{\int_{\Omega} e(u_{n}^{numerical} - u_{n}^{exact}) d\Omega}{\int_{\Omega} e(u_{n}^{exact}) d\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\mathfrak{f} \circ)$$

در حالت دوم، نمونهها اطراف سوراخ و به صورت محلى و با نسبت ۱:۲ با اندازه المانهای ۱، ۵/۵، ۲۵/۰ و ۱۲۵۰ میلی متر تقسيمبندي شده و با كمك دو تابع شكلي المان انتقالي و پيشنهادي، مقادير خطاي جابجايي و انرژي مجدد محاسبه مي گردند. در حالت سوم، مجددا شبکهبندی به صورت محلی اطراف سوراخ بوده با این تفاوت که بدون رعایت نسبت ۱:۲ در تقسیم بندی ها، اندازهی المان درشت، ثابت و برابر با یک و المان های کوچک به ترتیب برابر ۵/۰، ۲۵/۰ و ۱۲۵/۰ میلیمتر میباشند. در این حالت یکی از مزیتهای توابع شکل پیشنهادی مشاهده می شود، چرا که توابع المان انتقالی با شرط نسبت ۱:۲ در المان ریز و درشت، تولید شده و قادر به تخمین مقادیر در این حالت نیستند. در ادامه نمودارها و مقادیر به دست آمده در هر حالت نمایش داده می شوند. الف) حالت شبکه بدون ریز شدگی (جدول ۱ و شکل ۱۶) ب) حالت شبکه محلی ریزشده با نسبت ۱:۲ (جدول ۲ و ۳، شکل ۱۷ و ۱۸) ج) حالت شبکه محلی ریزشده با نسبت های دلخواه (جدول ۴ و شکل ۱۹)

در شکل ۲۰ مقدار خطاهای جابجایی و انرژی در این مثال بر حسب تعداد المانهای موجود در هر شبکهبندی ترسیم شده است. از این شکل مشخص است که در حالت کلی با افزایش تعداد

المانها خطا کاهش یافته است. نیز نمودارهای حاصل از روشهای المان انتقالی و روش توابع شکل پیشنهادی حالت نسبت ۱:۲ برای بخش درشت و ریز شبکه، تقریبا بر هم منطبق هستند. روش توابع شکل پیشنهادی دارای این خاصیت است که با یک الگوریتم واحد بدون نیاز به پیادهسازی کد جدید توابع شکل جدید را برای نسبتهای مختلف اندازه شبکه ریز شده به اندازه شبکه درشت، تولید کند.

۵-۲- مثال سهبعدی - مکعب دارای حفره کروی شکل در این مثال محیطی سهبعدی به ابعاد ۱۰×۱۰×۱۰ میلیمتر با یک حفرهی کوچک کروی شکل به شعاع ۱ = ۲۵ تحت تنش کششی تک محوری در راستای z قرار گرفته است (شکل ۲۱). مدول الاستیسیته و ضریب پواسون محیط سهبعدی به ترتیب برابر با ۱۰۰۰۰ مگاپاسکال و ۲.۳ هستند. مولفه های جابجایی و مقادیر تنش به صورت تحلیلی مطابق روابط زیر محاسبه می شوند [۲۶]:

$$u_{x} = \frac{r_{0}^{3}\overline{\sigma}}{2\mu} \begin{bmatrix} -\frac{\lambda+6\mu}{2(9\lambda+14\mu)}\frac{x}{r^{3}} + \frac{\lambda+\mu}{9\lambda+14\mu} \\ (a^{2}-r^{2})\frac{\partial}{\partial x}\frac{3z^{2}-r^{2}}{r^{5}} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\frac{x}{r_{0}^{3}} \end{bmatrix} \quad (\$)$$

$$r_{0}^{3}\overline{\sigma} \begin{bmatrix} -\frac{\lambda+6\mu}{2(9\lambda+14\mu)}\frac{y}{r^{3}} + \frac{\lambda+\mu}{9\lambda+14\mu} \\ -\frac{\lambda+6\mu}{2(9\lambda+14\mu)}\frac{y}{r^{3}} + \frac{\lambda+\mu}{9\lambda+14\mu} \end{bmatrix}$$

$$u_{y} = \frac{r_{0}}{2\mu} \begin{bmatrix} 2(3\lambda + 1)\mu)^{\gamma} & 3\lambda + 1\mu \\ (a^{2} - r^{2})\frac{\partial}{\partial y}\frac{3z^{2} - r^{2}}{r^{5}} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\frac{y}{r_{0}^{3}} \end{bmatrix}$$
(47)

$$u_{z} = \frac{r_{0}^{3}\overline{\sigma}}{2\mu} \begin{bmatrix} \frac{11\lambda + 26\mu}{2(9\lambda + 14\mu)} \frac{z}{r^{3}} + \frac{\lambda + \mu}{9\lambda + 14\mu} \\ (a^{2} - r^{2})\frac{\partial}{\partial z} \frac{3z^{2} - r^{2}}{r^{5}} + \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{z}{r_{0}^{3}} \end{bmatrix}$$
(**)

که در آنها، *لا و µ ثو*ابت لامه میباشند. با توجه به وجود تقارن در این مساله، یک هشتم نمونه مدلسازی و برای شبکهبندی آن سه حالت پیادهسازی شده است: (۱) شبکه بدون ریز شدگی محلی،

اندازه مشخصه المانها	تعداد المانها	log (Eu)	log (Ee)
١	١٠٨	-7/48479	-1/17887
• /۵	427	-7/98117	- 1 / ۳۴۳۳ 1
۰/۲۵	١٧٢٨	-٣/۴٨۵١۴	-1/ Δ ٩٩λ٣
·/17۵	8912	-٣/٩እ۴ለለ	$-1/\lambda\lambda\Upsilon\Upsilon$

جدول ۱– مقادیر خطا در حالت شبکه بدون ریز شدگی محلی



شکل ۱۶ - شبکهبندی های متفاوت در حالت شبکه بدون ریزشدگی محلی : الف) ۱ میلی متر، ب) ۵/۰ میلی متر، ج) ۲۵/۰ میلی متر، د) ۱۲۵/۰ میلی متر



شکل ۱۷– شبکه بندی های متفاوت در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش المان انتقالی: الف) ۵/۵ – ۱ میلیمتر، ب) ۲۵/۰ – ۵/۰ میلیمتر، ج) ۱۲۵/۰ – ۲۵/۰ میلیمتر

اندازه مشخصه المانها در بخش شبکه ریز شده	اندازه مشخصه المانها در بخش شبکه درشت	تعداد المانها	log (Eu)	log (Ee)
• / ۵	١	100	-7/97•7	-1/3471
• /٢۵	• /۵	829	-٣/۴٨۶٧	-1/2948
٠/١٢۵	•/٢۵	7997	-٣/٨٨٩۶	-1/2288







اندازه مشخصه المانها در بخش شبکه ریز شده	اندازه مشخصه المانها در بخش شبکه درشت	تعداد المانها	log (Eu)	log (Ee)
• /۵	١	100	-۲/۹۵۹۵	-1/3424
۰/۲۵	• / ۵	889	-٣/۴٨۴	-1/294
• / ۱ ۲ ۵	۰/۲۵	7997	-٣/٨٨٩	-1/2287

جدول ۳- مقادیر خطا در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی



جدول ۴– مقادیر خطا در حالت شبکه ریز شده با نسبتهای دلخواه بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی

شکل ۱۹– شبکهبندیهای متفاوت در حالت شبکه ریزشده با نسبتهای دلخواه بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی: الف) ۵/۰ – ۱ میلیمتر، ب) ۲۵/۰ – ۵/۰ میلیمتر، ج) ۱۲۵/۰ – ۵/۰ میلیمتر، ج) ۱۲۵/۰ – ۲۵/۰ میلیمتر



شکل ۲۰- نمودارهای همگرایی بر حسب تعداد المانهای شبکه برای مثال صفحه سوراخدار: الف) نرم خطای جابجایی ب) نرم خطای انرژی

اندازه مشخصه المانها	تعداد المانها	log (Eu)	log (Ee)
١	1007	-4/• 4824	-1/77,601
• /۵	٨. ١۶	$-\Upsilon/arsigma \Upsilon$)	-t/•Vfav
۰ /۲۵	84171	- ۴ /۲・۷۳	-7/774
٠/١٢۵	018024	-4/7974	-۲/۶۵۸۴

جدول ۵– مقادیر خطا در حالت شبکه بدون ریز شدگی محلی



شکل ۲۱- شبکه بندی های متفاوت در حالت شبکه بدون ریز شدگی محلی با اندازه المان های: الف) ۱ میلی متر، ب) ۵/۰ میلی متر



جدول ۶– مقادیر خطا در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش المان انتقالی

شکل ۲۲– شبکه بندی های متفاوت در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش المان انتقالی با اندازه المانهای: الف) ۵/۰ – ۱ میلیمتر، ب) ۲۵/۰ – ۵/۰ میلیمتر

اندازه مشخصه المانها در بخش شبکه ریز شده	اندازه مشخصه المانها در بخش شبكه درشت	تعداد المانها	log (Eu)	log (Ee)
• / Δ	١	1841	-٣/۶٢١٧	-7/•7829
۰ /۲ ۵	• /۵	9988	-4/14•4	$-\tau/\tau\tau\tau\Delta$
۰/۱۲۵	٠/٢۵	19740	-4/2982	-۲/۵۵۵۱

جدول ۷- مقادیر خطا در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی



شکل ۲۳– شبکه بندی های متفاوت در حالت شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی با اندازه المانهای: الف) ۵/۵ –

۱ میلیمتر، ب) ۲۵/۰ – ۵/۰ میلیمتر

			5	
• / Δ	١	ا ملمد ا	-٣/۶٢١٧	-7/•7829
۰ /۲ ۵	١	36614	-4/10871	-7/29890
۰/۱۲۵	١	22402	-4/81884	-7/88731

جدول ۸- مقادیر خطا در حالت شبکه ریزشده با نسبتهای دلخواه بر اساس روش توابع شکل پیشنهادی



(۲) شبکه ریز شده با نسبت ۱:۲ و (۳) شبکه ریز شده با نسبتهای دلخواه. تحلیل اجزای محدود در حالات مختلف و بر اساس

روشهای المان انتقالی و توابع شکل پیشنهادی انجام گرفته است و مقادیر نرم خطای جابجایی و نرم خطای انرژی طبق روابط ۴۰ و

اندازه شبکه ریز شده به اندازه شبکه درشت، تولید کند.

در این مقاله با ارائهی توابع شکل پیشنهادی (بر مبنای توابع CPDI)، مشکل ناپیوستگی و منفی شدن توابع شکل در المانهای انتقالی با گرههای معلق که هنگام ریز کردن شبکه به صورت محلی در نقاط

بحرانی به وجود می آیند، حل شده است. در روابط ارائه شده در

بخش های قبل به صورت تحلیلی ثابت شد که این توابع پیشنهادی

با حفظ خواص پيوستگي، تماميت وتقسيم جزء واحد مي توانند

جایگزین توابع استاندارد اجزاء محدود شوند. هم چنین در مثالهای

حل شده نشان داده شد که نتایج حاصل از حل مسائل با کمک

توابع پیشنهادی و توابع المان انتقالی در شرایط مشابه، تقریبا برابر

بوده و علاوه بر آن در روش جدید با برطرف کردن محدودیت

شرط ۱:۲ می توان با هزینه محاسباتی کمتر به نتایج دقیق تری نسبت

۶. نتیجه گیری

به روش های قبلی رسید.

۴۱ محاسبه شدهاند. در ادامه نمودارها و مقادیر به دست آمده در هر حالت ارائه میشوند.

در شکل ۲۴ مقدار خطاهای جابجایی و انرژی در مثال محیط سه بعدی با حفره کروی شکل بر حسب تعداد المانهای موجود در هر شبکهبندی ترسیم شده است. با توجه به این شکل مشاهده میشود که نمودارهای حاصل از روشهای المان انتقالی و روش توابع شکل پیشنهادی حالت نسبت ۱:۲ برای بخش درشت و ریز شبکه، تقریبا بر هم منطبق هستند. روش توابع شکل پیشنهادی دارای این خاصیت می باشد که با یک الگوریتم واحد بدون نیاز به پیاده سازی کد جدید توابع شکل جدید را برای نسبتهای مختلف

واژەنامە

- 1. Conformability
- 2. Transitional elements
- 3. Hanging nodes
- 4. Continuity
- 5. Partition of unity
- 6. Adaptive finite element methods
- 7. Adaptive local mesh refinement
- 8. Local mesh refinement with hanging nodes
- 9. Conformability
- 10. Constrained approximation
- 11. Transition element
- 1. Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L., "The Finite Element Method For Solid And Structural
- Mechanics," Elsevier, 2005.2. Aksoylu B., Bond, S., and Holst, M., "An Odyssey Into Local Refinement And Multilevel Preconditioning Iii:

- 12. Convected Particle Domain Interpolation
- 13. Parent
- 14. Completeness
- 15. Regular
- 16. Irregular
- 17. h-refinement
- 18. hierarchical
- 19. Convected Particle Domain Interpolation
- 20. Material Point Method
- 21. Finite Element Method

منابع

Implementation And Numerical Experiments", *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 25, No. 2, pp. 478-498, 2003.

3. Aksoylu, B., and Holst, M., "Optimality of Multilevel Preconditioners for Local Mesh Refinement in Three Dimensions", SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 44, No. 3, pp. 1005–1025, 2006.

- 4. Chen, H., Hoppe, R. H. W., and Xu, X., "Uniform Convergence Of Local Multigrid Methods For The Time-Harmonic Maxwell Equation", *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 47, No. 1, pp. 125–147, 2013.
- Hannukainen, A., Korotov, S., and Křížek, M., "On Global and Local Mesh Refinements by a Generalized Conforming Bisection Algorithm," *Journal of computational and applied mathematics*, Vol. 235, No. 2, pp. 419–436, 2010.
- Fries, T. P., Byfut, A., Alizada, A., Cheng, K. W., and Schröder, A., "Hanging Nodes and XFEM", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 86, No. 4–5, pp. 404–430, 2011.
- Demkowicz, L., Oden, J. T., Rachowicz, W., and Hardy, O., "Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 1. Constrained Approximation and Data Structure", *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, Vol. 77, No. 1–2, pp. 79–112, 1989.
- Ainsworth, M., and Senior, B., "Aspects of an Adaptive Hp-Finite Element Method: Adaptive Strategy, Conforming Approximation And Efficient Solvers", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 150, No. 1–4, pp. 65–87, 1997.
- Byfut, A., and Schröder, A., "Hp-Adaptive Extended Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 89, No. 11, pp. 1392–1418, 2012.
- 10. Kůs, P., "Automatic hp-Adaptivity on Meshes with Arbitrary-Level Hanging Nodes in 3D," *Ph.D. Dissertation*, Charles University, Prague, 2011.
- Šolín, P., Červený, J., and Doležel, I., "Arbitrary-Level Hanging Nodes And Automatic Adaptivity in the hp-FEM," *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 77, No. 1, pp. 117–132, 2008.
- Jeong G. E., Song, Y. U., Youn, S. K., and Park, K. C., "A New Approach for Nonmatching Interface Construction by the Method Of Localized Lagrange Multipliers", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 361, p. 112728, 2020.
- Muixí, A., Fernández-Méndez, S., and Rodríguez-Ferran, A., "Adaptive Refinement for Phase-Field Models of Brittle Fracture Based on Nitsche's Method", *Computational mechanics*, Vol. 66, No. 1, pp. 69–85, 2020.
- Gupta, A. K., "A Finite Element for Transition From A Fine to A Coarse Grid", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 35-45, 1978.

- Tabarraei, A., and Sukumar, N., "Adaptive Computations on Conforming Quadtree Meshes", *Finite Elements in Analysis and Design*, 2005, Vol. 41, No. 7–8, pp. 686–702.
- Baitsch, M., and Hartmann, D., "Piecewise Polynomial Shape Functions for Hp-Finite Element Methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 13–14, pp. 1126– 1137, 2009.
- McDill, J. M., Goldak, J. A., Oddy, A. S., and Bibby, M. J., "Isoparametric Quadrilaterals and Hexahedrons for Mesh-Grading Algorithms", *Communications in applied numerical methods*, Vol. 3, No. 2, pp. 155– 163, 1987.
- Morton, D. J., Tyler, J. M., and Dorroh, J. R., "A New 3D Finite Element for Adaptive h-Refinement in 1-Irregular Meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, No. 23, pp. 3989–4008, 1995.
- Lim, J. H., Sohn, D., and Im, S., "Variable-Node Element Families for Mesh Connection and Adaptive Mesh Computation", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 43, No. 3, pp. 349–370, 2012.
- Ling, D., Bu, L., Tu, F., Yang, Q., and Chen, Y., "A Finite Element Method with Mesh-Separation-Based Approximation Technique and Its Application in Modeling Crack Propagation with Adaptive Mesh Refinement", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 99, No. 7, pp. 487–521, 2014.
- Sadeghirad, A., Brannon, R. M., and Burghardt, J., "A Convected Particle Domain Interpolation Technique to Extend Applicability of the Material Point Method for Problems Involving Massive Deformations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 86, No. 12, pp. 1435–1456, 2011.
- Sadeghirad, A., Brannon, R. M., and Guilkey, J. E., "Second-Order Convected Particle Domain Interpolation (CPDI2) with Enrichment for Weak Discontinuities at Material Interfaces", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 95, No. 11, pp. 928–952, 2013.
- 23. MATLAB Release 2019, MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.
- 24. Tecplot 360 EX, Tecplot, Inc., Bellevue, WA, United States.
- 25. Timoshenko, S., and J. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1969.
- Gronwall, T. H., "Elastic Stresses in an Infinite Solid with a Spherical Cavity", *Annals of Mathematics*, Vol. 19, No. 4, p. 295, 1918.