ارائه روشی کارآمد برای اعمال بار گسترده بر سطوح دارای انحنا در تحلیل هم‌هندسی

مرتضی براتی[۱]، فرزاد شهابیان[۱*]، بهروز حسنی[۲]

۱- گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده– روش تحلیل هم‌هندسی با هدف کاهش فاصله بین تحلیل و طراحی به کمک رایانه معرفی شده است. این روش دارای مزایایی همچون مدل‌سازی دقیق هندسه، روش‌های بهبودسازی مناسب، راحتی دستیابی به توابع مرتبه بالا و دقت بالاتر در محاسبات است. هدف این پژوهش، ارائه روشی کارآمد برای اعمال بارهای گسترده بر سطوح دارای انحنا در تحلیل هم‌هندسی می‌باشد. یکی از چالش‌های اصلی در این روش، نحوه اعمال شرایط مرزی بر روی هندسه‌های پیچیده است. در مدل‌های دارای انحنا، برخی از نقاط کنترلی روی هندسه قرار نمی‌گیرند که موجب ابهام در توزیع بار روی این نقاط می‌شود. در این پژوهش، از توابع نربز که توابعی غیردرون‌یاب و استاندارد در سامانه‌های طراحی رایانه‌ای هستند، برای تقریب فضای حل و توصیف هندسه استفاده شده است. همچنین، به منظور استفاده از قابلیت‌های ابزارهای طراحی به کمک رایانه، نحوه وارد کردن هندسه‌های ایجاد شده در نرم‌افزار راینو به تحلیل هم‌هندسی با استفاده از فرآیند استخراج بزیه توضیح داده می‌شود. نتایج بدست آمده، صحت و کارآیی روش پیشنهادی را تأیید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: روش هم‌هندسی، توابع نربز، بار گسترده، سطوح دارای انحنا، استخراج بزیه.

An Efficient Method for Applying Distributed Loads on Curved Surfaces in Isogeometric Analysis

M. Barati[1], F. Shahabian [1*], B. Hassani[2]

1- Department of Civil Engineering, Ferdowsi Unsiversity of Mashhad

2- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

Abstract*: The isogeometric method was introduced to bridge the gap between computer-aided design (CAD) and analysis. This method offers advantages such as precise geometric modeling, suitable refinement methods, easy access to higher-order functions, and greater computational accuracy. The aim of this research is to provide an efficient method for applying distributed loads on curved surfaces in isogeometric analysis. One of the main challenges in this method is how to apply boundary conditions on complex geometries. In curved models, some control points may not lie on the geometry, leading to ambiguity in the distribution of loads on these points. This study uses NURBS functions, which are standard non-interpolatory functions in CAD systems, to approximate the solution space and describe the geometry. Additionally, to leverage the capabilities of CAD tools, the process of importing geometries created in Rhino into isogeometric analysis using Bézier extraction is explained. The results confirm the accuracy and efficiency of the proposed method.*

Keywords: *Isogeometric Method, NURBS, Distributed Loads, Curved Surfaces, Bézier Extraction.*

* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی:shahabf@um.ac.ir

فهرست علائم

B_i	تابع پایه برنشتاین	P^b	نقاط کنترل بزیه
b	نیروی حجمی	$\bar{q}$	شدت بار
C	ماتریس ضرایب بزیه	R_i	تابع پایه نربز
$C(t)$	منحنی بزیه	$S(\xi,\eta)$	سطح بی-اسپلاین و نربز
$C(\xi)$	منحنی بی-اسپلاین و نربز	$\bar{t}$	نیروی سطحی
$\{d\}$	بردار تغییرمکان	u	تغییرمکان
D	ماتریس تنش-کرنش	v_n	بردار عمود بر سطح
e_n	بردار یکه عمود	v_t	بردار مماس بر سطح
E	ضریب کشسانی	w_i	وزن نقاط کنترل
$\{F\}$	بردار نیرو	Γ	مرز فیزیکی
J	ماتریس ژاکوبین	ξ و η	مختصه فضای پارامتری
$[K]$	ماتریس سختی	Ξ و $\mathcal{H}$	بردار گرهی
L	عملگر دیفرانسیلی	υ	ضریب پواسون
n	مرتبه تابع برنشتاین	σ	تانسور تنش
N و M	توابع پایه نربز در هر راستا	Ω	دامنه فضای فیزیکی
p و q	مرتبه توابع پایه بی-اسپلاین و نربز	$\bar{\Omega}$	دامنه فضای پارامتری
P	نقاط کنترل بی-اسپلاین و نربز	$\hat{\Omega}$	دامنه فضای مرجع

۱- معرفی

امروزه بسیاری از مسائل در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی توسط معادلات جبری یا دیفرانسیلی بیان می‌گردند. از آن جایی که تنها موارد معدودی از این معادله‌ها را می‌توان مستقیماً با روش‌های تحلیلی حل نمود، شیوه‌های عددی زیادی برای حل چنین معادلاتی وجود دارد. یکی از روش‌های عددی که در سال‌های اخیر برای حل مسائل مهندسی مورد استفاده قرارگرفته است، تحلیل هم‌هندسی[1] می‌باشد. انگیزه انجام نخستین فعالیت‌ها در زمینه تحلیل هم‌هندسی برطرف کردن فاصله موجود بین تحلیل اجزای محدود[2] و مدل‌سازی با استفاده از رایانه[3] بوده است [۱]. یکی از مزایای برجسته این روش، امکان مدل‌سازی دقیق هندسه سازه است که باعث حذف خطاهای ناشی از تقریب هندسی می‌شود. ایده اصلی تحلیل هم‌هندسی بهره‌گیری از توابع پایه استفاده شده در توصیف دقیق هندسه برای تقریب میدان حل می‌باشد. تفاوت بنیادی بین تحلیل هم‌هندسی و تحلیل اجزای محدود این است که در روش اجزای محدود توابع پایه برای تقریب میدان‌های تحلیل نامعلوم انتخاب می‌شوند و سپس از آن‌ها برای تقریب هندسه معلوم نیز استفاده می‌شود. تحلیل هم‌هندسی این شیوه را معکوس می‌کند به طوری که یک تابع پایه که قادر است به صورت دقیق هندسه معلوم را نمایش دهد، انتخاب می‌شود و آن را به عنوان پایه برای تقریب میدان حل استفاده می‌کند. با توجه به این که این روش به طور هم‌زمان از مزایای روش اجزای محدود و شیوه‌های تولید هندسه بهره‌مند می‌باشد، لذا به عنوان یک جایگزین کارآمد و مطلوب برای روش اجزای محدود مطرح شده است. روش تحلیل هم‌هندسی در زمینه‌های مختلفی ازجمله در مسائل کشسان [۲, ۳]، الکترومغناطیس [۴]، تماس [۵]، سیالات [۶] و اندرکنش سیال- سازه [۷, ۸] به کار گرفته شده است و عملکرد مناسبی از خود نشان داده است.

یکی از اهداف اصلی تحلیل هم‌هندسی، ترکیب مراحل طراحی و تحلیل می‌باشد به طوری که ایده طراحی هندسی و تحلیل عددی، هم‌زمان در یک بسته نرم‌افزاری میسر گردد [۱, ۹]. با توجه به این که تحلیل هم‌هندسی مانند بسیاری از ابزارهای طراحی به کمک رایانه از توابع نربز برای توصیف

هندسه استفاده می‌کند، مدل‌های ساخته شده در این ابزارها را می‌توان به صورت صریح در تحلیل هم‌هندسی به کار برد.

اکثر نرم‌افزاهای تجاری مهندسی به کمک رایانه به روش اجزای محدود پیاده‌سازی شده‌اند و روش هم‌هندسی را پشتیبانی نمی‌کنند؛ بنابراین نیاز به یک بستر نرم‌افزاری در این زمینه الزامی می‌باشد. در همین راستا برخی از کدها و برنامه‌های منبع‌باز توسعه یافته‌اند. هسو و همکاران [۱۰] یک نرم‌افزار تعاملی طراحی-تحلیل برای سازه‌های پوسته‌ای بر اساس نرم‌افزار تجاری راینو توسعه دادند، اما در روش آن‌ها مدل‌های سه‌بعدی قابل تحلیل نمی‌باشند. لای و همکاران [۱۱ و ۱۲] یک روش برای ادغام تحلیل هم‌هندسی با نرم‌افزارهای تجاری اجزای محدودی ارائه کردند. آن‌ها با افزودن یک زیربرنامه به نرم‌افزار آباکوس[۴] امکان تحلیل مدل‌های اولیه که توسط توابع تی-اسپلاین در نرم‌افزار راینو ایجاد شده را فراهم کردند. لی و همکاران [۱۳] یک نرم‌افزار تجاری برای تحلیل سازه‌های هیدرولیکی فراهم کردند. نرم‌افزار معرفی شده توسط ایشان امکان مدل‌سازی هندسی و تحلیل را برای سازه‌های هیدرولیکی در یک بسته نرم‌افزاری فراهم کرده است. با این حال، کدها یا برنامه‌های ارائه شده توسط پژوهشگران پاسخگوی خواسته‌های عملی مهندسان نمی‌باشند. از جمله مهم‌ترین دلایل آن عبارت است از:

الف- عدم امکان ادغام مدل‌سازی هندسی و تحلیل عددی در یک نرم‌افزار

ب- عدم وجود توانایی تحلیل خودکار برای سازه‌های سه‌بعدی

ج- عدم پیاده‌سازی رابط کاربر گرافیکی برای مدل‌سازی

تبدیل مدل‌های ساخته شده در ابزارهای. طراحی رایانه‌ای برای استفاده در یک تحلیل‌گر روش هم‌هندسی، از طریق عملگر استخراج بزیه[۵] فراهم می‌شود. در این پژوهش، رابطه‌سازی این فرآیند ارائه می‌گردد که با استفاده از آن امکان ساخت مدل‌های هندسی با شکل آزاد برای تحلیل هم‌هندسی به وجود می‌آید. شکل‌های آزاد هندسی به دلیل زیبایی بصری که دارند بسیار مورد توجه طراحان صنعتی و معماران قرار می‌گیرند [۱۴ و ۱۵]. به دلیل پیچیدگی‌های رابطه‌سازی و الگوسازی این‌گونه سازه‌ها، پژوهشگران و مهندسان به بررسی این موضوع پرداخته‌اند و مطالعه رفتار این سازه‌ها از جنبه عملی دارای اهمیت ویژه می‌باشد.

با وجود تلاش‌های صورت گرفته در زمینه تحلیل هم‌هندسی در سال‌های اخیر، هنوز برخی از جنبه‌های آن دارای ابهام است و نیاز به پژوهش‌های بیشتر دارد. توابع نربز از مجموعه‌ای از نقاط کنترلی[۶] که بر روی یک چندضلعی قرار می‌گیرند، تشکیل می‌گردد. با توجه به این‌که نقاط کنترلی ممکن است بر روی هندسه سازه، قرار نگیرند، از این رو نحوه توزیع بارها بین این نقاط در هندسه‌های تحلیلی دارای ابهام می‌باشد. در برخی منابع روش‌هایی برای اعمال بار در روش تحلیل هم‌هندسی ارائه شده است [۱۶-۱۹]. در این راستا و در پژوهش حاضر روشی برای اعمال بار گسترده بر روی سطوح دارای انحنا در تحلیل هم‌هندسی ارائه می‌گردد. برای این کار، ابتدا توابع بزیه، بی-اسپلاین و نربز به عنوان توابع پایه روش هم‌هندسی معرفی می‌شوند سپس نحوه مدل‌سازی هندسه‌های پیچیده و نحوه تبدیل آن به عنوان اطلاعات ورودی برای تحلیل هم‌هندسی شرح داده می‌شود. در ادامه چارچوب کلی تحلیل هم‌هندسی مبتنی بر توابع نربز تشریح می‌گردد و سپس روش اعمال بار گسترده و رابطه‌سازی مربوط به آن ارائه می‌شود. در پایان با ارائه چند مثال عددی، دقت روش پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- توابع بزیه و بی-اسپلاین

مبنای ریاضی منحنی‌های بزیه، چندجمله‌ای‌های برنشتاین[۷] می‌باشند. یک منحنی بزیه از مرتبه p به صورت ترکیب خطی از $p+1$ تابع پایه برنشتاین تعریف می‌شود. از مزایای اصلی توابع بزیه تعریف ساده و استفاده آسان از آن‌ها می‌باشد. به لحاظ ریاضی یک منحنی بزیه به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰].

$$C(t)=\sum_{i=0} B_{n,i}(t)P_i^b \qquad 0\le t\le 1 \qquad (۱)$$

که در آن $B_{n,i}(t)$، i اُمین تابع پایه برنشتاین از مرتبه n است و از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$B_{n,i}(t)=\binom{n}{i}t^{i}(1-t)^{n-i} \qquad (0)^0\equiv 1 \qquad (۲)$$

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad 0!\equiv 1 \qquad (۳)$$

در رابطه (۱)، P_i^b نقاط کنترلی منحنی بزیه می‌باشند. توابع بزیه با وجود کاربردهای گسترده، دارای برخی کاستی‌ها از جمله نوسانات اضافی و عدم کنترل محلی[۸] می‌باشند که باعث می‌شود در تولید برخی از شکل‌های پیچیده و منحنی‌های با تغییرات زیاد، محدودیت‌هایی داشته باشند [۲۱].

توابع بی-اسپلاین به منظور غلبه بر محدودیت‌های توابع بزیه توسعه یافتند [۲۰ و ۲۲]. منحنی‌های بی-اسپلاین همانند منحنی‌های بزیه از ترکیب خطی نقاط کنترلی و توابع پایه که همان بی-اسپلاین‌ها هستند، بر روی فضای پارامتری تعریف می‌شوند. فرض می‌گردد که $\Xi=[\xi_1,\xi_2,...,\xi_m]$ مجموعه مقادیر پارامتری متوالی غیرنزولی است که در آن $\xi_i\le\xi_{i+1},\ i=1,...,m-1$ باشد. در این صورت Ξ بردار گرهی[۹] نامیده می‌شود. همچنین، ξ_i گره i اُم که $i=1,2,...,n+p+1$ می‌باشد، p درجه بی-اسپلاین و n تعداد توابع پایه است. توابع بی- اسپلاین $N_{i,p}(\xi)$ از درجه $p=0$ با استفاده از رابطه بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱].

$$N_{i,0}(\xi)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad \xi_i\le\xi\le\xi_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (۴)$$

همچنین برای توابع با درجه $p\ge 1$ به صورت رابطه (۵) بیان می‌شوند.

$$N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi) \qquad (۵)$$

توابع بی-اسپلاین دارای ویژگی‌های مهمی از قبیل غیر منفی بودن[۱۰]، پوشش محلی، بخشی از واحد بودن[۱۱] و استقلال خطی می‌باشند.

۳- فرآیند وارد کردن گره[۱۲]

وارد کردن گره شامل اضافه کردن گره‌های جدید بین گره‌های موجود می‌باشد. در نتیجه جزء موجود به اجزای کوچک‌تر تقسیم می‌شود و تعداد اجزا در شبکه افزایش می‌یابد. این فرآیند درجه توابع پایه را تغییر نمی‌دهد بلکه تعداد نقاط کنترل را افزایش می‌دهد. با وارد کردن گره، هیچ تغییری در شکل هندسی و پارامتری داده نمی‌شود، اما تعداد نقاط کنترل و توابع پایه افزایش می‌یابد. برای حفظ این ویژگی، لازم است نقاط کنترل به روشی خاص انتخاب شوند.

اگر $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n+p+1}\}$ بردار گرهی داده شده باشد، وارد کردن گره به بردار گرهی، به طوری که $\bar{\xi}\epsilon[\xi_k,\xi_{k+1})$ و $k>p$ باشد، باعث به وجود آمدن یک تابع پایه جدید و متناظر با آن یک نقطه کنترل جدید می‌شود. قابل توجه است که همه توابع پایه قدیمی باید مجدد تعریف شوند)مطابق رابطه‌های (۴) و(۵)). نقطه کنترل جدید مطابق رابطه زیر بدست می‌آید [۲۳].

$$\bar{P}_i=\begin{cases}P_1 & i=1\\ \alpha_i P_i+(1-\alpha_i)P_{i-1} & 1<i<m\\ P_n & i=m\end{cases} \qquad (۶)$$

که ضریب α_i مطابق رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\alpha_i=\begin{cases}1 & i\le k-p\\ \dfrac{\bar{\xi}-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i} & k-p+1<i<k\\ 0 & i\ge k+1\end{cases} \qquad (۷)$$

۴- توابع نربز

تابع نربز یک مدل ریاضی است که معمولاً در گرافیک رایانه‌ای کاربرد دارد و به منظور ایجاد و نمایش منحنی‌ها و سطوح

استفاده می‌شود. به کمک نربزها می‌توان دسته وسیعی از مدل‌های هندسی را که پیش از این امکان ساخت آن‌ها به وسیله بسیاری از چند جمله‌ای‌های حاضر در طراحی مهندسی وجود نداشته است، نمایش داد [۱]. یک منحنی نربز با مرتبه، مجموعه نقاط کنترلی، وزن مربوط به هر یک از نقاط و بردار گرهی مشخص می‌شود. منحنی‌ها و سطوح نربز حالت تعمیم‌یافته بی–اسپلاین‌ها می‌باشند که تفاوت اصلی آن با بی–اسپلاین‌ها در نسبت دادن وزن به نقاط کنترلی است. توابع پایه نربز از رابطه زیر بدست می‌آیند [۱].

$$R_i^p(\xi)=\frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)}=\frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^{n}N_{i,p}(\xi)w_i} \tag{۸}$$

در این رابطه w_i وزن نقاط کنترلی می‌باشد. با استفاده از توابع پایه بدست آمده از رابطه (۸) و نقاط کنترلی p_i، منحنی نربز با رابطه (۹) محاسبه می‌شود.

$$C(\xi)=\sum_{i=1}^{n}R_i^p(\xi)P_i \tag{۹}$$

توابع پایه دو متغیره نربز نیز از رابطه (۱۰) حاصل می‌گردد.

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}} \tag{۱۰}$$

که در آن $N_{i,p}(\xi)$ و $M_{j,q}(\eta)$ به ترتیب توابع پایه در راستای ξ و η و از مرتبه p و q می‌باشند. همچنین یک سطح نربز به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود [۱].

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)P_{i,j} \tag{۱۱}$$

۵- ساخت مدل هندسی پیچیده در تحلیل هم‌هندسی

امروزه در اکثر نرم‌افزارهای طراحی به کمک رایانه از ابزار نربز برای طراحی هندسه‌های پیچیده استفاده می‌شود که نسبت به سایر ابزارها دارای انعطاف‌پذیری و دقت بالاتری می‌باشد. در فرآیند ساخت مدل‌های هندسی، نرم‌افزار راینو[۱۳] یکی از ابزارهای قدرتمند و پرکاربرد است که از توابع اسپلاین و نربز برای ایجاد هندسه استفاده می‌کند. در تحلیل هم‌هندسی، هدف اصلی ادغام مراحل طراحی و تحلیل می‌باشد، به طوری که مدل‌های هندسی ساخته شده در نرم‌افزارهای طراحی بتوانند مستقیم و بدون تغییرات اساسی وارد فرآیند تحلیل شوند. نرم‌افزار راینو با توانایی ایجاد مدل‌های دقیق و پیچیده با استفاده از نربز، ابزاری مناسب برای این هدف می‌باشد.

برای دستیابی به این هدف، ابتدا مدل هندسی در نرم‌افزار راینو ایجاد می‌شود، سپس این مدل به شکل مناسب برای تحلیل هم‌هندسی تبدیل و وارد فرآیند تحلیل می‌شود. این روش به کاربران اجازه می‌دهد تا از دقت و توانمندی‌های راینو در طراحی مدل‌های پیچیده بهره‌مند شوند و به طور مستقیم از این مدل‌ها در تحلیل‌های خود استفاده کنند، بدون این که نیاز به بازسازی مجدد مدل در محیط تحلیل باشد. این یکپارچگی بین مراحل طراحی و تحلیل، منجر به کاهش زمان و هزینه‌های محاسباتی می‌شود و امکان انجام تحلیل‌های دقیق‌تر و کارآمدتر را فراهم می‌کند.

یکی از چالش‌های پژوهش حاضر، تبدیل مدل‌های گرافیکی ساخته شده در نرم‌افزار راینو به اطلاعات هندسی قابل استفاده برای تحلیل‌گر[۱۴] هم‌هندسی می‌باشد. قابل توجه است که در این پژوهش از نرم‌افزار متلب به عنوان تحلیل‌گر روش هم‌هندسی استفاده شده است. نرم‌افزار راینو با استفاده از افزونه[۱۵] تی–اسپلاین یک خروجی متنی از مدل ساخته شده ارائه می‌کند که حاوی اطلاعات هندسی آن است. این اطلاعات شامل نقاط کنترل، وزن‌ها و ضرایب بزیه می‌باشد. همان‌طور که اشاره شد توابع بی–اسپلاین و نربز تعمیم توابع بزیه هستند و می‌توان آن‌ها را به صورت ترکیب خطی از توابع بزیه در هر دهانه تعریف کرد. ضرایب این ترکیب خطی، ضرایب بزیه می‌باشند؛ بنابراین با داشتن این ضرایب می‌توان تابع نربز را به راحتی ایجاد کرد. فرآیند تبدیل یک تابع نربز به تابع بزیه را استخراج بزیه می‌نامند. این روش به ویژه در تحلیل هم‌هندسی اهمیت ویژه‌ای دارد زیرا با استفاده از آن می‌توان مدل‌های پیچیده هندسی را به شکلی ساده‌تر و کارآمدتر برای تحلیل‌های

عددی تبدیل کرد [۲۳ و ۲۴]. با توجه به آنچه اشاره شد مراحل تبدیل مدل هندسی به داده‌های لازم برای تحلیل هم‌هندسی به صورت زیر می‌باشد.

الف- ابتدا مدل هندسی مورد نظر با استفاده از ابزارهای نربز در راینو ایجاد می‌شود.

ب- مدل نربز باید به قطعات بزیه تبدیل شود. این عمل توسط افزونه تی-اسپلاین در نرم افزار راینو صورت می‌پذیرد.

ج- پس از تبدیل مدل به فرم بزیه، مدل می‌تواند به ابزارهای تحلیل عددی صادر شود.

د- در انتها طی یک فرآیند معکوس ضرایب بزیه تبدیل به توابع نربز می‌شوند.

در ادامه فرآیند استخراج بزیه توضیح داده می‌شود.

۵-۱- استخراج بزیه

این بخش به چگونگی ساخت توابع نربز با استفاده از توابع بزیه و عملگر استخراج بزیه می‌پردازد. بی-اسپلاین‌ها و نربزها، بیش از یک جزء را پوشش می‌دهند در حالی که توابع پایه اجزای محدود تنها یک جزء را پوشش دهند. با محلی کردن توابع نربز امکان پوشش‌دهی تنها یک جزء فراهم می‌شود. این عمل به وسیله محاسبه توابع نربز به شکل توابع دیگر که فقط روی یک ناحیه جزء تعریف می‌شوند قابل حل است.

به وسیله انتخاب چند جمله‌ای‌های پایه برنشتاین که سازنده توابع بزیه هستند، خواسته مورد نظر برآورده می‌گردد. این عمل با روش استخراج بزیه صورت می‌پذیرد که امکان استفاده از ابزارهای استاندارد اجزای محدود را در چارچوب تحلیل هم‌هندسی تسهیل می‌کند. فرآیند استخراج بزیه اطمینان می‌دهد که مزایای تحلیل هم‌هندسی، مانند نمایش دقیق هندسه و پیوستگی بالاتر، حفظ می‌شوند در حالی که کارآیی محاسباتی و سازگاری با ابزارهای اجزای محدود را بهبود می‌بخشد [۲۵]. همان‌طور که اشاره شد توابع پایه نربز از مرتبه p درون هر جزء دارای پیوستگی C^{p-k} هستند. برای تجزیه مجموعه‌ای از توابع پایه نربز به اجزای بزیه که به آن تجزیه بزیه[۱۶] گفته می‌شود مقدار گره تا زمانی که k به p برسد، تکرار می‌شوند. پس از این عمل پیوستگی تابع به C^{0} می‌رسد. لازم به ذکر است که تجزیه بزیه مرتبه پیوستگی توابع پایه نربز را کاهش می‌دهد، اما پیوستگی هندسی حفظ می‌شود. فرآیند اضافه کردن گره مطابق آنچه در بخش بهبودسازی اضافه کردن گره اشاره شد انجام می‌پذیرد.

عملگر استخراج یا همان ضرایب بزیه برای j اُمین گره وارد شده به صورت زیر بدست می‌آید [۲۳].

$$C^{j}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 1-\alpha_2 & 0 & \dots & & 0\\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & & \alpha_{(n+j-1)} & 1-\alpha_{(n+j)}\end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

برای محاسبه ماتریس C، تنها بردار گرهی مورد نیاز است و این محاسبات به نقاط کنترل و توابع پایه وابسته نیست؛ بنابراین این عملگر برای بی-اسپلاین‌ها و نربزها یکسان است. نقطه کنترل جدید مرتبط با گره اضافه شده با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\overline{P}^{j+1}=(C^{j})^{T}\,\overline{P}^{j} \tag{۱۳}$$

با توجه به وارد کردن مجموعه‌ای از گره‌ها، عملگر استخراج بزیه کلی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$C^{T}=(C^{m})^{T}(C^{m-1})^{T}\dots(C^{1})^{T} \tag{۱۴}$$

رابطه بین نقاط کنترل بزیه جدید و نقاط کنترل نربز اولیه به صورت زیر بدست می‌آید.

$$P^{b}=C^{T}P \tag{۱۵}$$

با یادآوری این که وارد کردن گره باعث هیچ تغییر هندسی و پارامتری در منحنی نمی‌شود رابطه زیر برقرار می‌باشد [۲۳].

$$\begin{aligned}C(\xi)&=(P^{b})^{T}B(\xi)=(C^{T}P)^{T}B(\xi)=P^{T}CB(\xi)\\&=P^{T}N(\xi)\end{aligned} \tag{۱۶}$$

که در آن $B(\xi)$ مجموعه توابع پایه برنشتاین پس از استخراج بزیه است. رابطه بین توابع پایه بی-اسپلاین و چند جمله‌ای‌های برنشتاین به صورت زیر بیان می‌گردد [۲۴].

$$N(\xi)=CB(\xi) \tag{۱۶}$$

توجه شود که برای هندسه دوبعدی، ابعاد ماتریس P برابر با $n\times ۲$ است در حالی که P^b دارای ابعاد $(n+m)\times ۲$ می‌باشد؛ بنابراین ابعاد C برابر با $(n+m)\times n$ خواهد بود. در این جا n، تعداد توابع پایه یا نقاط کنترل قبل از تجزیه بزیه و m تعداد گره‌های وارد شده است. برای بدست آوردن توابع پایه نربز، تابع وزن باید به صورت رابطه (۱۷) بازنویسی شود.

$$W(\xi)=\sum_{i=۱}^{n}N_{i,p}(\xi)w_i=w^TN(\xi)=w^TCB(\xi)$$
$$=(C^Tw)^TB(\xi)=(w^b)^TB(\xi)=W^b(\xi) \qquad (۱۷)$$

که $w^b=C^Tw$، وزن‌های مرتبط با توابع پایه بزیه به صورت برداری می‌باشند. با جایگزینی رابطه (۱۶) در رابطه (۸) توابع پایه نربز با استفاده از عملگر استخراج بزیه بدست می‌آیند.

$$R(\xi)=\frac{۱}{W^b(\xi)}WCB(\xi) \qquad (۱۸)$$

در این رابطه W ماتریس قطری وزن‌های نربز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W=\begin{bmatrix} w_۱ & & & \\ & w_۲ & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

بنابراین یک منحنی نربز به صورت جزءهای بزیه با پیوستگی $C^۰$ مطابق رابطه (۲۰) بازنویسی می‌شود .

$$C(\xi)=P^TR(\xi)=\frac{۱}{W^b(\xi)}P^TWCB(\xi)$$
$$=\frac{۱}{W^b(\xi)}\left(C^TWP\right)^TB(\xi) \qquad (۲۰)$$
$$=\frac{۱}{W^b(\xi)}\left(W^bP^b\right)^TB(\xi)$$

رابطه بین نقاط کنترل بزیه و نقاط کنترل نربز از معادلات **Error! Reference source not found.** و (۲۰) قابل نتیجه‌گیری است [۲۵].

$$P^b=(W^b)^{-۱}C^TWP \qquad (۲۱)$$

با یادآوری رابطه (۸)، توابع پایه نربز پس از استخراج بزیه برای جزء e می‌توانند به صورت زیر تعریف شوند.

$$R^e(\xi)=\frac{W^eN^e(\xi)}{W^b(\xi)}=\frac{W^eC^eB^e(\xi)}{W^e(\xi)} \qquad (۲۲)$$

که در آن W^e ماتریس قطری وزن‌های نربز محلی است. مشتقات اول توابع شکل جزء به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial R^e(\xi)}{\partial\xi}=W^eC^e\begin{bmatrix}\dfrac{1}{W^b(\xi)}\dfrac{\partial B^e(\xi)}{\partial\xi}\\ -\dfrac{\partial W^b(\xi)}{\partial\xi}\dfrac{B^e(\xi)}{(W^b(\xi))^2}\end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

همچنین مشتق تابع وزن به صورت رابطه (۲۴) بیان می‌گردد.

$$\frac{\partial W^b(\xi)}{\partial\xi}=\sum_{i=1}^{(p+1)^{d_p}}B_{i,p}(\xi)w_i^b \qquad (۲۴)$$

رابطه بین نقاط کنترل بزیه محلی و نربز محلی مانند رابطه حالت کلی آن می‌باشد (رابطه (۲۱)).

$$P^{b,e}=(W^{b,e})^{-۱}(C^e)^TW^eP^e \qquad (۲۵)$$

در این رابطه $W^{b,e}$ وزن‌های بزیه محلی هستند و به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$W^{b,e}=\begin{bmatrix} w_۱^{b,e} & & & \\ & w_۲^{b,e} & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n^{b,e} \end{bmatrix},\quad w^{b,e}=(C^e)^Tw^e \qquad (۲۶)$$

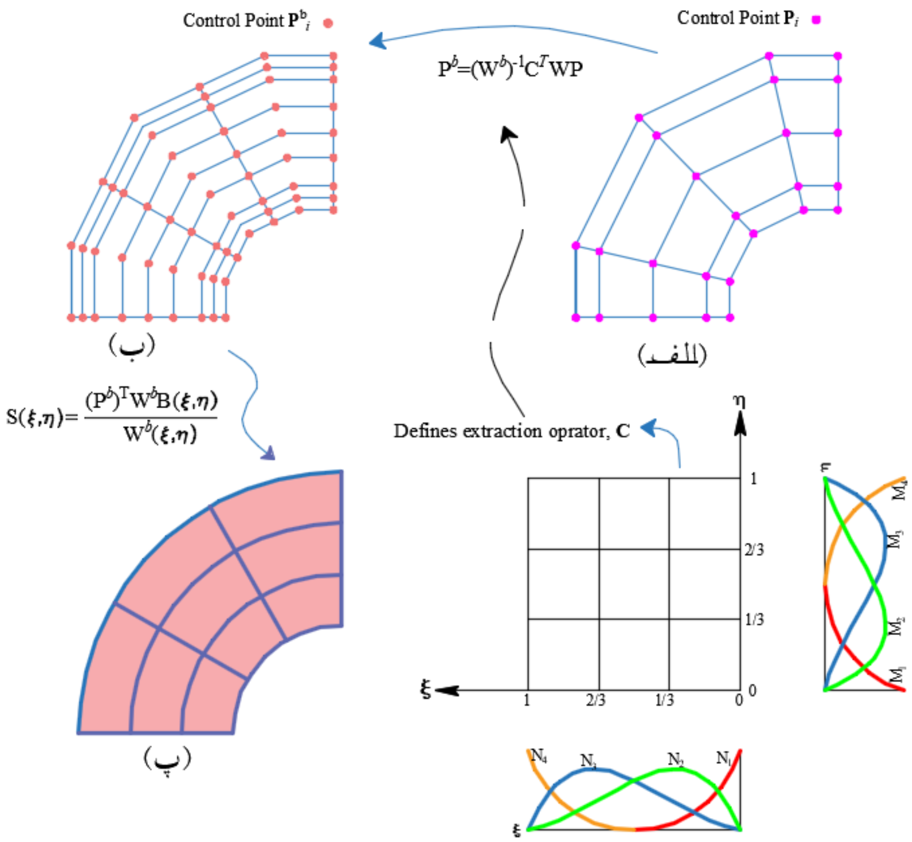
عملگر استخراج دو متغیره محلی از عملگر استخراج تک متغیره تانسوری طبق رابطه زیر بدست می‌آید.

$$C^e=C_\eta^j\otimes C_\xi^i=\begin{bmatrix} C_{\eta,۱۱}^jC_\xi^i & C_{\eta,۱۲}^jC_\xi^i & \cdots \\ C_{\eta,۲۱}^jC_\xi^i & C_{\eta,۲۲}^jC_\xi^i & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

که C_ξ^i و C_η^j به ترتیب i اُمین و j اُمین عملگر استخراج جزء تک متغیره در راستای ξ و η می‌باشند. در نتیجه شبکه فیزیکی بزیه به صورت رابطه (۲۸) قابل محاسبه می‌باشد [۲۳].

$$C(\xi,\eta)=\frac{۱}{W^b(\xi)}(W^bP^b)^TB(\xi,\eta) \qquad (۲۸)$$

شکل ۱ نگاشت از شبکه کنترلی نربز به شبکه کنترلی بزیه و در نهایت به شبکه فیزیکی بزیه را نشان می‌دهد.



شکل ۱- فرآیند استخراج بزیه. الف- شبکه کنترلی نربز، ب- شبکه کنترلی بزیه و پ- شبکه فیزیکی بزیه.

۶- رابطه‌سازی تحلیل هم‌هندسی

روش هم‌هندسی و اجزای محدود از نوع روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار یک سیستم هستند و به عنوان ابزار قدرتمند در حل مسائل مهندسی شناخته می‌شوند. این دو شیوه با وجود تفاوت‌های اصلی، شباهت‌های زیادی دارند. این روش‌ها دارای مولفه‌هایی با مفاهیم مشابه هستند به طوری که بر اساس گسسته‌سازی دامنه مسئله و تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی به سیستم معادلات جبری استوار می‌باشند. این روش‌ها از مفهوم جزء برای تقسیم دامنه مسئله به بخش‌های کوچک‌تر استفاده می‌کنند و در هر جزء توابع پایه برای تقریب میدان‌های حل استفاده می‌شود. در ادامه مراحل حل معادلات حاکم بر مسئله تنش صفحه‌ای در چارچوب روش هم‌هندسی بیان می‌گردد.

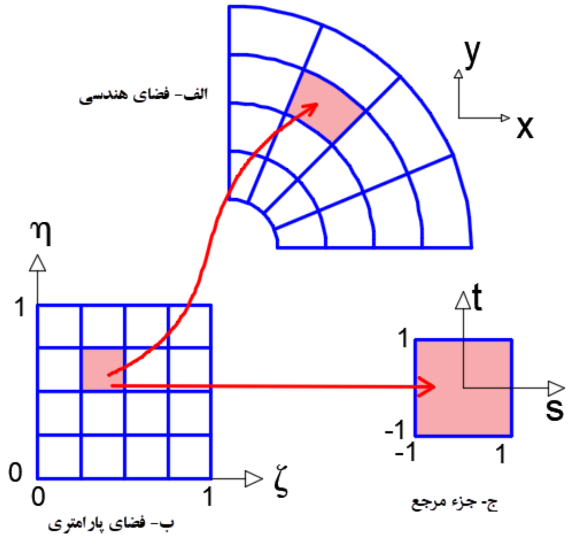
رابطه حاکم بر یک مسئله کشسان دو بعدی توسط رابطه‌های تعادل، سینماتیک و ساختاری بدست می‌آید. برای حل مسئله، شرایط مرزی نیرو و تغییرمکان در نظر گرفته می‌شود. شکل قوی[۱۷] یک مسئله کشسان خطی دوبعدی و شرایط مرزی مرتبط با دامنه Ω و مرز Γ با رابطه‌های (۲۹) تا (۳۱) بیان می‌گردند [۱].

$$\nabla\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{۲۹}$$

$$\boldsymbol{\sigma e_n}=\bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{on} \quad \Gamma_t \tag{۳۰}$$

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{on} \quad \Gamma_u \tag{۳۱}$$

در این رابطه‌ها، σ تانسور تنش، $\bar{t}$ نیروی سطحی و b نیروهای حجمی هستند. Γ_t بخشی از مرز است که بارهای سطحی بر روی آن اعمال می‌شوند و e_n بردار یکه عمود بر مرز بوده و به سمت خارج آن می‌باشد. همچنین Γ_u بخشی از



شکل ۲- نگاشت بین فضاها در تحلیل هم‌هندسی، الف- فضای هندسی، ب- فضای پارامتری و ج- جزء مرجع.

مرز که تغییرمکان مشخص دارند و $\bar{\boldsymbol{u}}=0$ و $\bar{\boldsymbol{u}}\neq 0$ به ترتیب نشانگر شرایط مرزی همگن و غیرهمگن می‌باشند.

بعد از محاسبه شکل ضعیف[۱۸] معادله، دامنه مسئله گسسته‌سازی می‌شود. در روش هم‌هندسی فضای تحلیل دارای سه زیر فضا شامل فضای فیزیکی[۱۹]، پارامتری[۲۰] و مرجع[۲۱] می‌باشد. فضای فیزیکی همان فضای واقعی است که مسئله در آن تعریف می‌شود. فضای پارامتری فضایی است که برای تعریف و کنترل هندسه در فضای فیزیکی به کار می‌رود. این فضا به عنوان یک واسطه بین تعریف ریاضی و نمایش فیزیکی عمل می‌کند. فضای پارامتری برای توابع دو بعدی عموماً به صورت مستطیلی و در بازه $[0,1]$ تعریف می‌گردد. فضای مرجع نیز مشابه اجزای محدود برای انتگرال‌گیری عددی به کار می‌رود. در این جا دامنه Ω با مرز Γ در فضای فیزیکی، دامنه $\bar{\Omega}$ در فضای پارامتری و دامنه $\hat{\Omega}$ در فضای مرجع در نظر گرفته می‌شود. هر نقطه در فضای پارامتری به کمک تبدیل $x:\bar{\Omega}\rightarrow\Omega$ به نقطه‌ای متناظر در فضای فیزیکی نگاشت می‌شود. شکل ۲ فضاهای مختلف و نگاشت بین آن‌ها را در تحلیل هم‌هندسی نشان می‌دهد. در روش هم‌هندسی نقاط دامنه درونیاب نیستند و ممکن است درون دامنه قرار نگیرند در حالی که روش اجزای محدود نقاط گرهی درونیاب بوده و جزئی از دامنه جزء هستند؛

بنابراین دو مفهوم شبکه کنترلی حاصل از نقاط کنترلی و شبکه فیزیکی حاصل از گسسته‌سازی هندسه واقعی مسئله، مطرح است. به دلیل غیردرونیاب بودن توابع پایه، شبکه کنترلی که از نقاط کنترلی می‌گذرد لزوماً بر هندسه واقعی منطبق نمی‌باشند و بیشتر مانند چهارچوبی هندسه را کنترل می‌کنند.

پس ازگسسته‌سازی، هندسه با استفاده از رابطه (۳۲) تقریب زده می‌شوند [۱].

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{cp}} R_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \tag{۳۲}$$

که در آن x_i و y_i مختصات و n_{cp} تعداد نقاط کنترلی می‌باشند. کمیت‌های میدان حل در نقاط کنترلی، متغیرهای کنترلی نامیده می‌شوند که در این مسئله تغییرمکان می‌باشد. متغیرهای کنترلی را می‌توان به صورت برداری نمایش داد.

$$d = (d_{1,1}^{x}, d_{1,1}^{y}, d_{2,1}^{x}, d_{2,1}^{y}, \ldots, d_{n,m}^{y})^T \tag{۳۳}$$

با استفاده از متغیرهای کنترلی و با ترکیبی خطی از توابع پایه نربز می‌توان کمیت‌های میدان حل در بقیه نقاط را بدست آورد.

$$\boldsymbol{U}(\xi,\eta) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{cp}} R_i(\xi,\eta)\, d \tag{۳۴}$$

ماتریس R نیز از توابع پایه نربز بدست می‌آید و به صورت زیر می‌تواند نوشته شود.

$$R=\begin{bmatrix} R_{1,1} & 0 & R_{2,1} & 0 & \ldots & R_{n,m} & 0 \\ 0 & R_{1,1} & 0 & R_{2,1} & \ldots & 0 & R_{n,m}\end{bmatrix} \qquad (35)$$

با مشخص بودن تغییرمکان‌ها، می‌توان کرنش‌ها را از رابطه (۳۶) محاسبه کرد.

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.\boldsymbol{d} \qquad (36)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{B}=LR \qquad (37)$$

در رابطه قبل، L عملگر دیفرانسیلی می‌باشد که در حالت دو بعدی با رابطه (۳۸) بیان می‌گردد.

$$L=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix} \qquad (38)$$

گام بعد، انتگرال‌گیری شکل ضعیف بر روی دامنه گسسته‌سازی شده و استخراج معادله جبری برای بدست آوردن مجهولات در نقاط گرهی است. با استفاده از کار مجازی و ساده‌سازی، رابطه زیر بدست می‌آید [۱].

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,d\Omega-\int_{\Omega}\boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{b}\,d\Omega-\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{R}^{T}\bar{t}\,d\Gamma=0 \qquad (39)$$

به منظور محاسبه ماتریس‌های سختی و نیرو باید مقدار انتگرال با استفاده از روش گوس تقریب زده شود. برای این کار فضای پارامتری به فضای مرجع نگاشت می‌شود. فرض می‌گردد بردارهای گرهی به صورت $\Xi=\left[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+p+1}\right]$ و $\mathcal{H}=\left[\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{m+q+1}\right]$ باشند. نگاشت از فضای پارامتری به فضای مرجع به صورت زیر است.

$$\xi=\frac{s}{2}\left(\xi_2-\xi_1\right)+\frac{1}{2}\left(\xi_2+\xi_1\right) \qquad (40)$$

$$\eta=\frac{t}{2}\left(\eta_2-\eta_1\right)+\frac{1}{2}\left(\eta_2+\eta_1\right) \qquad (41)$$

در این رابطه‌ها، s و t مختصات نقاط در فضای مرجع هستند. ماتریس ژاکوبین[۲۲] بین فضای مرجع و پارامتری به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$J_R=\begin{bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial s} & \frac{\partial\eta}{\partial s}\\ \frac{\partial\xi}{\partial t} & \frac{\partial\eta}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(\xi_2-\xi_1\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(\eta_2-\eta_1\right)\end{bmatrix} \qquad (42)$$

توابع شکل، عبارت‌های صریح نسبت به η و ξ می‌باشند در صورتی که برای محاسبه ماتریس B لازم است مشتق نسبت به x و y محاسبه گردد. از این رو، باید نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی انجام پذیرد. ماتریس ژاکوبین برای نگاشت ذکر شده عبارت است از [۱]:

$$J_S=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix} \qquad (43)$$

برای انتگرال‌گیری عددی روی هر جزء در ابتدا باید جزء فیزیکی با استفاده از یک نگاشت به فضای پارامتری و سپس با نگاشتی دیگر به فضای مرجع منتقل شود. رابطه ژاکوبین کل در تحلیل هم‌هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J=J_RJ_S=\begin{bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial s} & \frac{\partial\eta}{\partial s}\\ \frac{\partial\xi}{\partial t} & \frac{\partial\eta}{\partial t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix} \qquad (44)$$

در نتیجه ماتریس سختی را می‌توان به صورت رابطه (۴۵) بیان کرد.

$$K=\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,d\Omega=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\left|\boldsymbol{J}\right|ds\,dt=\sum_{i=1}^{n_{gp}}\boldsymbol{B}_i^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_i\left|\boldsymbol{J}_i\right|W_i \qquad (45)$$

که در آن n_{gp} تعداد نقاط گوس می‌باشد که بستگی به درجه تابع نربز دارد و W_i وزن‌های مرتبط با نقاط گوسی می‌باشند. ماتریس نیرو نیز به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$F=\int_{\Omega}\boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{b}\,d\Omega+\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{R}^{T}\bar{t}\,d\Gamma=F_{\Omega}+F_{\Gamma} \qquad (46)$$

بردار نیرو از دو بخش تشکیل می‌شود. بخش اول مربوط به بارهای حجمی می‌باشد که به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد.

$$F_{\Omega} = \int_{\Omega} \boldsymbol{R}^{T} \boldsymbol{R}\boldsymbol{b} d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{R}^{T} \boldsymbol{R}\boldsymbol{b} |\boldsymbol{J}| dsdt = \sum_{i=1}^{n_{gp}} \boldsymbol{R}_{i}^{T} \boldsymbol{R_i}\boldsymbol{b} |\boldsymbol{J_i}| W_i \qquad (۴۷)$$

بخش دوم مربوط به بارهای سطحی است که در بخش بعدی به تفضیل در مورد نحوه محاسبه آن توضیح داده می‌شود. بـرای مسـائل تنـش صفحه‌ای، ماتریس رابط تنش-کرنش طبق رابطه (۴۸) محاسبه می‌گردد.

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^{2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (۴۸)$$

در این رابطه، E ضریب کشسانی و υ نسبت پواسون می‌باشد. در نهایت می‌توان رابطه را به شکل ماتریسی نوشت که عبارت است از:

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{d}\} = \{\boldsymbol{F}\} \qquad (۴۹)$$

که در آن $[\boldsymbol{K}]$ ماتریس سختی، $\{\boldsymbol{F}\}$ بردار نیروها و $\{\boldsymbol{d}\}$ بردار تغییرمکان‌ها می‌باشد. همانند روش اجزای محدود، می‌توان دستگاه معادلات فوق را با اعمال شرایط مرزی حل نمود و مقدار تغییرمکان را در نقاط کنترلی محاسبه نمود.

۷- روش اعمال بار گسترده

با توجه به این که در هندسه‌های دارای‌انحنا نقاط کنترلی بر روی سطح قرار نمی‌گیرند، بنابراین توزیع بارها بین این نقاط دارای ابهام می‌باشد. در این بخش به ارائه روشی برای اعمال بار گسترده در سطوح دارای انحنا پرداخته می‌شود.

به منظور بدست آوردن بار سطحی در هر نقطه کنترلی از بخش اول رابطه (۴۶) استفاده می‌گردد. این انتگرال بر روی مرزی که تحت بارگذاری است، محاسبه می‌شود و توابع پایه در این رابطه به صورت یک متغیره تعریف می‌گردند. با ثابت قرار دادن یکی از مختصه‌های پارامتری متناسب با مرز مورد نظر، توابع شکل با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شوند. مقدار پارامتر ثابت در هر مرز با توجه به شکل ۳ مشخص می‌گردد. با استفاده از این توابع می‌توان نقاط کنترلی مرز را به صورت یک منحنی نربز تعریف کرد. همچنین با هدف امکان اعمال بار با شدت متغیر و ساده بودن رابطه‌سازی، تابع بار اعمالی به وسیله توابع یک متغیره مرز تقریب زده می‌شود. بنابراین رابطه (۴۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$F_{\Gamma} = \int_{\Gamma} R^{T} R\, \bar{t} d\Gamma = \int_{-1}^{1} R^{T} R\, \bar{t}\, |J_1||J_2| dr = \sum_{i=1}^{n_{gp}} R_i^{T} R_i\, \bar{t}\, |J_{1i}||J_{2i}| W_i \qquad (۵۰)$$

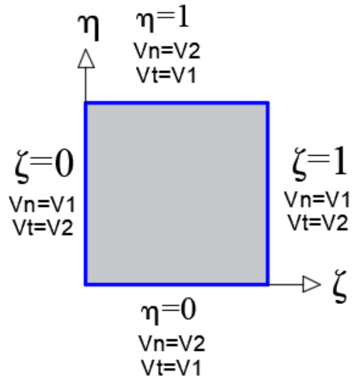
در رابطه بالا انتگرال به وسیله روش عددی گوس تقریب زده می‌شود بنابراین مقدار توابع پایه در هر نقطه گوسی باید محاسبه شود. در ادامه نحوه محاسبه متغیرهای رابطه (۵۰) بیان می‌گردد. قابل توجه است که در تحلیل هم‌هندسی فضای هندسی بر روی فضای پارامتری نگاشت می‌شود و هر مرز فضای هندسی با مرزی در فضای پارامتری متناظر می‌باشد. بر روی هر یک از مرزهای هندسی دو بردار محلی تعریف می‌شود که مطابق رابطه (۵۱) بدست می‌آیند [۲۶].

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial X/\partial\xi & \partial Y/\partial\xi \\ \partial X/\partial\eta & \partial Y/\partial\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix} \qquad (۵۱)$$

بردارهای بدست آمده از رابطه (۵۱) به صورت مماس و قائم بر مرز می‌باشند. شکل ۳ بردار قائم و مماس بر روی هر مرز در فضای پارامتری را نشان می‌دهد که به ترتیب با V_n و V_t نشان داده شده‌اند.

در رابطه (۵۱) مختصات هندسی هر نقطه مطابق رابطه (۳۷) محاسبه می‌گردد. رابـطه (۵۱) دارای دو مقدار بـرای ژاکوبین می‌باشد، بخش اول (J_1) مربوط به نگاشـت بین فضای فیزیکی و پارامتری و بخش دوم (J_2) مربوط به نگاشت فضای پارامتری و جزء مرجع است. مقدار J_1 برابر با بردار مماس بر سطح می‌باشد.

$$J_1 = V_t \qquad (۵۲)$$



شکل ۳- مختصه ثابت پارامتری و بردارهای قائم و مماس بر روی هر مرز در فضای پارامتری.

مقدار J_2 نیز از رابطه (۵۳) محاسبه می‌گردد که ξ_1 و ξ_2 مختصات نقاط گوشه جزء در فضای پارامتری می‌باشند.

$$J_2 = \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(\xi_2 - \xi_1\right) \quad (۵۳)$$

همچنین $\bar{\mathbf{t}}$ بیان‌کننده حالت توزیع بار روی مرز می‌باشد که برای حالت فشار عمود بر سطح و بار قائم به ترتیب با رابطه‌های (۵۴) و (۵۵) بدست می‌آید [۲۶].

$$\bar{\mathbf{t}} = q\,\mathbf{e_n} = q\begin{Bmatrix} l_n \\ m_n \end{Bmatrix} \quad (۵۴)$$

$$\bar{\mathbf{t}} = q\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (۵۵)$$

در رابطه (۵۴) مقدار $\mathbf{e}_n$ بردار یکه عمود بر مرز بوده و به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$e_n = \frac{V_n}{|V_n|} \quad (۵۶)$$

۸- مثال‌های عددی

در این بخش به منظور بررسی روش پیشنهادی سه مثال عددی با بارگذاری متفاوت ارائه می‌گردد. در این مثال‌ها ضریب کشسانی $E = 3\times10^{7}\,kN/m^2$، ضریب پواسون $\upsilon = 0/25$ و شدت بار وارده مقدار $\bar{q} = 3\times10^{4}\ kN/m^2$ در نظر گرفته شده است. مقادیر ابعادی نیز به صورت $a = 0/1\,m$، $b = 0/3\,m$، $c = 0/4\,m$، $d = 0/5\,m$، $e = 0/6\,m$ و $f = 2\,m$ می‌باشند.

۸-۱- مسئله یک چهارم حلقه تحت فشار داخلی q

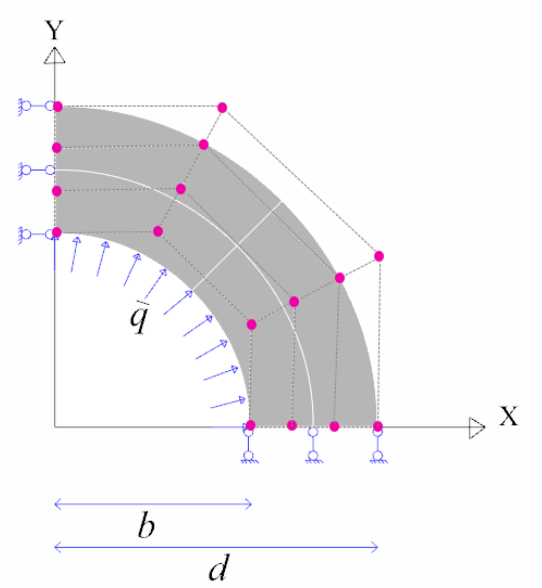
به منظور صحت‌سنجی روش ارائه شده، مسئله یک چهارم حلقه تحت فشار داخلی مرود بررسی قرار می‌گیرد. هندسه مسئله با استفاده از توابع نربز مرتبه سه مدل گردیده است. بردارهای گرهی اولیه مسئله به صورت $\Xi = \mathcal{H} == [0,0,0,0,1,1,1,1]$ می‌باشد. هندسه مسئله، شرایط تکیه‌گاهی و نحوه بارگذاری در شکل ۴ نشان داده شده است. مسئله در دو لبه دارای شرایط تکیه‌گاهی غلتکی می‌باشد. پاسخ دقیق تغییرمکان شعاعی مسئله به صورت رابطه (۵۷) می‌باشد [۲۷].

$$u_r(r) = \frac{a^2 q r}{E\left(b^2 - a^2\right)}\left\{1-\upsilon+\frac{b^2}{r^2}\left(1+\upsilon\right)\right\}; \quad u_\phi = 0 \quad (۵۷)$$

نتایج روش پیشنهادی در تعدادی از نقاط دامنه با جواب دقیق در جدول ۱ مقایسه گردیده است که به پاسخ دقیق بسیار نزدیک می‌باشند. شکل ۵ نحوه توزیع مولفه‌های مختلف تنش در دامنه برای بارگذاری تحت فشار یکنواخت داخلی را نشان می‌دهد.

۸-۲- مسئله سطح متقارن تحت بار قائم یکنواخت q

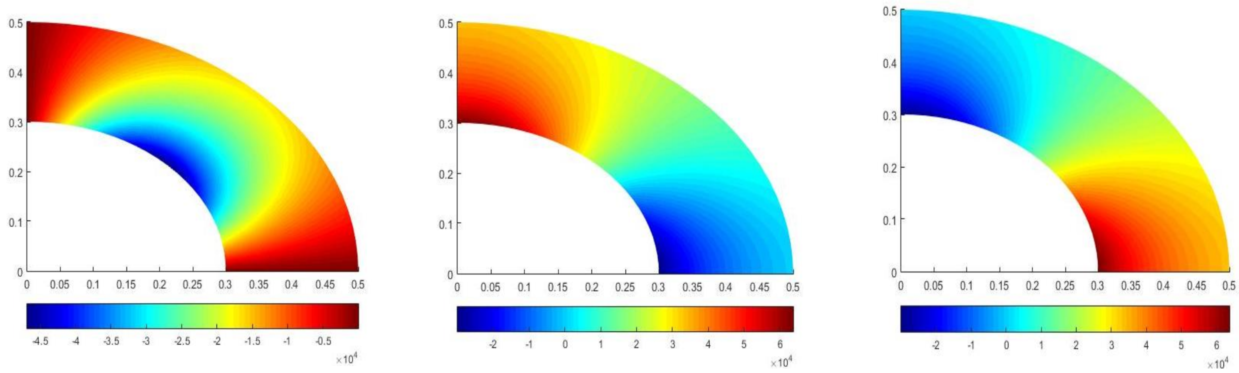
در این مثال و مثال بعد، به منظور بهره بردن از قابلیت مدل‌سازی نرم‌افزار راینو، مدل اولیه در این نرم‌افزار ایجاد شده و پس ازبهبودسازی، اطلاعات هندسی شامل مختصات نقاط



شکل ۴- مسئله یک چهارم حلقه تحت فشار داخلی.

جدول ۱- مقایسه نتایج روش ارائه شده با نتایج دقیق مسئله یک چهارم حلقه تحت فشار داخلی.

خطا نسبی (٪)	مقدار دقیق (mm)	روش ارائه شده (mm)	شعاع نقطه کنترلی (mm)
۰/۰۷۰	۰/۷۱۳۰	۰/۷۱۲۵	۳۰۰
۰/۰۹۶	۰/۶۲۰۰	۰/۶۱۹۴	۳۸۳
۰/۱۸۰	۰/۵۹۸۰	۰/۵۹۶۹	۴۱۶
۰/۱۶۰	۰/۵۶۸۰	۰/۵۶۷۱	۴۸۳
۰/۱۰۰	۰/۵۶۳۰	۰/۵۶۲۴	۵۰۰



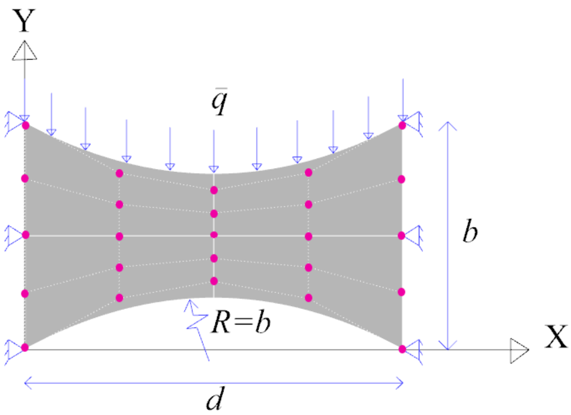
الف–تنش قائم σ_x ب– تنش قائم σ_y ج– تنش برشی τ_{xy}

شکل ۵- توزیع تنش در مسئله یک چهارم حلقه تحت فشار یکنواخت داخلی.

کنترلی، وزن‌ها و توابع پایه جهت تحلیل عددی به نرم افزار متلب وارد می‌شوند. مختصات نقاط کنترلی و وزن‌های اولیه در جدول ۲ بیان گردیده است. هندسه مسئله، بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی در شکل ۶ نشان داده شده است.

جدول ۲- مختصات نقاط کنترل و وزن‌های مسئله سطح متقارن تحت بار قائم یکنواخت.

نقطه کنترلی	X	Y	w	نقطه کنترلی	X	Y	w
۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۱	۱۴	۰/۴۱۷	۰/۱۵۰	۱
۲	۰/۰۸۳	۰/۰۴۵	۱	۱۵	۰/۵۰۰	۰/۱۵۰	۱
۳	۰/۲۵۰	۰/۰۹۰	۱	۱۶	۰/۰۰۰	۰/۲۵۰	۱
۴	۰/۴۱۷	۰/۰۴۵	۱	۱۷	۰/۰۸۳	۰/۲۲۰	۱
۵	۰/۵۰۰	۰/۰۰۰	۱	۱۸	۰/۲۵۰	۰/۱۹۰	۱
۶	۰/۰۰۰	۰/۰۴۵	۱	۱۹	۰/۴۱۷	۰/۲۲۰	۱
۷	۰/۰۸۳	۰/۰۸۰	۱	۲۰	۰/۵۰۰	۰/۲۵۰	۱
۸	۰/۲۵۰	۰/۱۱۰	۱	۲۱	۰/۰۰۰	۰/۳۰۰	۱
۹	۰/۴۱۷	۰/۰۸۰	۱	۲۲	۰/۰۸۳	۰/۲۵۵	۱
۱۰	۰/۵۰۰	۰/۰۵۰	۱	۲۳	۰/۲۵۰	۰/۲۱۰	۱
۱۱	۰/۰۰	۰/۱۵۰	۱	۲۴	۰/۴۱۷	۰/۲۵۵	۱
۱۲	۰/۰۸۳	۰/۱۵۰	۱	۲۵	۰/۵۰۰	۰/۳۰۰	۱
۱۳	۰/۲۵۰	۰/۱۵۰	۱				



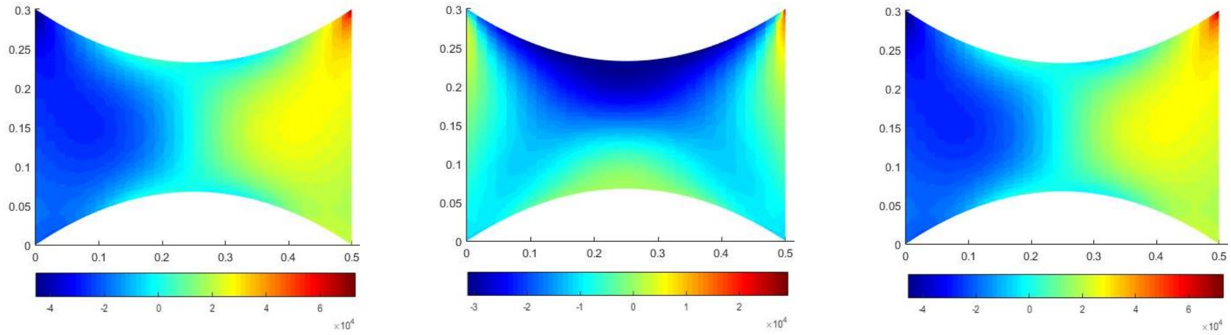
شکل ۶- مسئله سطح متقارن تحت بار قائم یکنواخت.

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود بار قائم یکنواخت در لبه بالایی وارد گردیده است. همچنین در دو لبه دارای تکیه‌گاه مفصلی می‌باشد. با توجه به این که جواب دقیق این مسئله در دسترس نیست، نتایج با تحلیل اجزای محدود توسط نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. در جدول ۲ تغییرمکان قائم در تعدادی از نقاط دامنه با مقدار بدست آمده از نرم‌افزار مقایسه گردیده است و با توجه به مقدار خطای کم، نشان از دقت بالای نتایج دارد. حداکثر تغییرمکان روش پیشنهادی ۰/۵۹۳۴ میلی‌متر و مقدار بدست آمده از نرم‌افزار آباکوس ۰/۵۹۴ میلی‌متر می‌باشد.

همچنین شکل ۷ توزیع مولفه‌های تنش در دامنه را نشان می‌دهد.

جدول ۳- مقایسه نتایج روش ارائه شده با نتایج دقیق طبق بارگذاری قائم غیریکنواخت مرز خارجی.

مختصات نقاط (mm)	روش ارائه شده (mm)	مقدار بدست آمده از نرم‌افزار (mm)	خطا نسبی (٪)
(۱۱۷،۲۵۱)	-۰/۳۷۲	-۰/۳۷۷	۱/۳۲
(۲۱۰،۲۳۴)	-۰/۵۷۱	-۰/۵۸۰	۱/۵۵
(۳۰۴،۲۳۵)	-۰/۵۵۰	-۰/۵۵۹	۱/۶۱
(۴۱۴،۲۶۱)	-۰/۲۸۵	-۰/۲۸۹	۱/۴۰
(۲۵۰،۱۵۰)	-۰/۵۳۹	-۰/۵۴۲	۰/۵۵

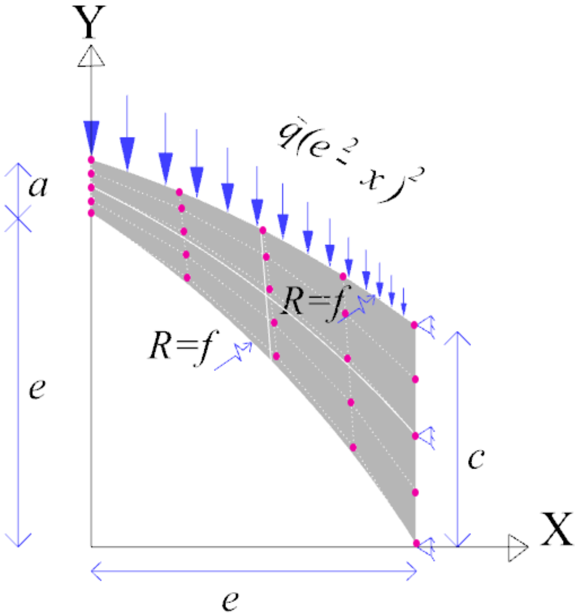


ج- تنش برشی τ_{xy} ب- تنش قائم σ_y الف-تنش قائم σ_x

شکل ۷- توزیع تنش در مسئله سطح متقارن تحت بار قائم یکنواخت.

جدول ۴- مختصات نقاط کنترل و وزن‌های مسئله سطح برش خورده تحت بار قائم غیریکنواخت.

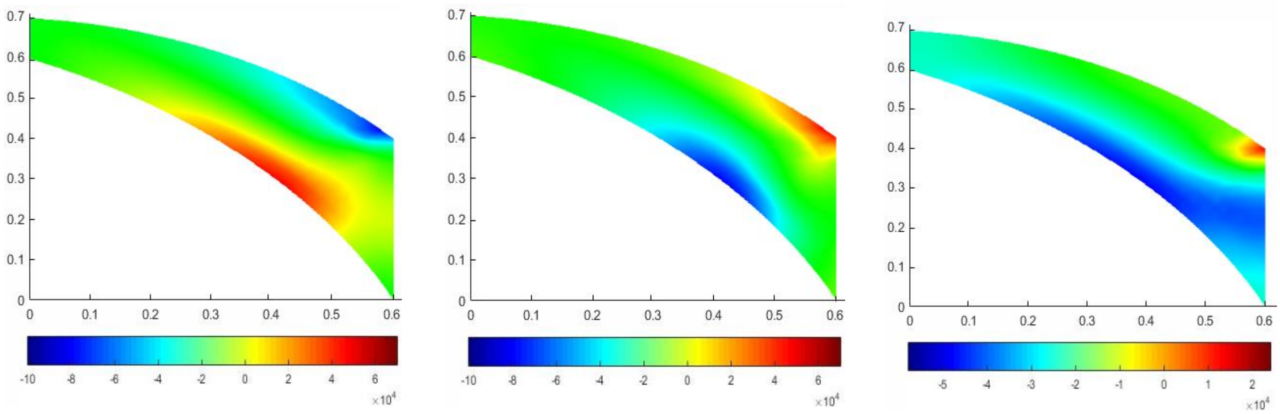
نقطه کنترلی	X	Y	w	نقطه کنترلی	X	Y	w
۱	۰/۶۰۰	۰/۰۰۰	۱	۱۴	۰/۳۰۹	۰/۵۳۳	۱
۲	۰/۵۴۰	۰/۱۳۲	۱	۱۵	۰/۲۰۰	۰/۶۰۰	۱
۳	۰/۳۷۲	۰/۳۷۳	۱	۱۶	۰/۶۸۳	۰/۰۰۰	۱
۴	۰/۱۳۲	۰/۵۴۱	۱	۱۷	۰/۶۶۷	۰/۱۱۷	۱
۵	۰/۰۰۰	۰/۶۰۰	۱	۱۸	۰/۵۸۵	۰/۳۴۴	۱
۶	۰/۶۱۶	۰/۰۰۰	۱	۱۹	۰/۴۲۷	۰/۵۲۷	۱
۷	۰/۵۶۵	۰/۱۲۹	۱	۲۰	۰/۳۳۴	۰/۶۰۰	۱
۸	۰/۴۲۵	۰/۳۶۷	۱	۲۱	۰/۷۰۰	۰/۰۰۰	۱
۹	۰/۱۹۱	۰/۵۳۸	۱	۲۲	۰/۶۹۱	۰/۱۱۴	۱
۱۰	۰/۰۶۷	۰/۶۰۰	۱	۲۳	۰/۶۲۷	۰/۳۳۹	۱
۱۱	۰/۶۵۰	۰/۰۰۰	۱	۲۴	۰/۴۸۶	۰/۵۲۴	۱
۱۲	۰/۶۱۶	۰/۱۲۳	۱	۲۵	۰/۴۰۰	۰/۶۰۰	۱
۱۳	۰/۵۰۰	۰/۳۵۶	۱				



شکل ۸- مسئله سطح برش خورده تحت بار قائم غیریکنواخت.

جدول ۵- مقایسه نتایج روش ارائه شده با نتایج دقیق طبق بارگذاری قائم غیریکنواخت مرز خارجی.

خطا نسبی (٪)	مقدار بدست آمده از نرم‌افزار (mm)	روش ارائه شده (mm)	مختصات نقاط(mm)
۱/۲۶	-۹/۵۲	-۹/۴۰	(۰،۷۰۰)
۱/۳۰	-۶/۹۳	-۶/۸۴	(۱۱۶،۶۸۰)
۱/۵۵	-۵/۱۵	-۵/۰۷	(۱۹۹،۶۶۰)
۳/۴۰	-۳/۲۳	-۳/۱۲	(۳۰۰،۶۲۱)
۴/۶۵	-۰/۴۳	-۰/۴۱	(۴۹۹،۴۹۷)



الف- تنش قائم σ_x ب- تنش قائم σ_y ج- تنش برشی τ_{xy}

شکل ۹-توزیع تنش در مسئله سطح برش خورده تحت بار قائم غیریکنواخت.

۸-۳- مسئله سطح برش خورده[23] تحت بار قائم غیریکنواخت

در آخرین مثال به منظور بررسی تاثیر حالت بار بر نتایج، مسئله سطح برش خورده تحت بار قائم غیریکنواخت تحلیل می‌شود. هندسه مسئله با استفاده از توابع نربز مرتبه سه در نرم افزار راینو مدل گردیده است. مختصات نقاط کنترلی و وزن‌های اولیه در جدول ۴ آورده شده است. شکل هندسی مسئله، نحوه اعمال بار و شرایط تکیه‌گاهی در شکل ۸ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود بار غیریکنواخت که تابعی از مختصه طولی می‌باشد به لبه بالایی وارد گردیده است. همچنین لبه سمت راست داری شرایط تکیه‌گاهی مفصلی می‌باشد. مقدار تغییرمکان قائم برای تعدادی از نقاط دامنه در جدول ۵ آمده است و با نتایج نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. نحوه توزیع مولفه‌های تنش در شکل ۹ نشان داده شده است. حداکثر جابه‌جایی قائم روش پیشنهادی، ۹/۴۰ میلی‌متر و مقدار بدست آمده از نرم‌افزار آباکوس مقدار ۹/۵۲ میلی‌متر می‌باشد.

شکل ۹ توزیع مولفه‌های مختلف تنش تحت بارگذاری قائم غیریکنواخت را نشان می‌دهد.

۹- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، روشی کاراً به منظور اعمال بار گسترده بر سطوح دارای انحنا در تحلیل هم‌هندسی ارائه گردید. در این روش با ثابت در نظر گرفتن مختصه پارامتری در مرز بارگذاری شده، توابع پایه نربز برای هر نقطه انتگرالی بدست می‌آید. با محاسبه بردارهای مماسی و قائم در هر نقطه از مرز و با استفاده از رابطه‌های ارائه شده برای حالات بارگذاری می‌توان سهم نیرو در هر نقطه کنترلی را بدست آورد. همچنین در این پژوهش نحوه استفاده از مدل‌های ساخته شده در نرم افزار راینو در تحلیل هم‌هندسی تشریح شد. این موضوع توانایی تحلیل هندسه‌های پیچیده که امکان مدل‌سازی آن‌ها به راحتی میسر نیست را فراهم می‌کند. به منظور صحت سنجی روش پیشنهادی سه مثال عددی تحت بارگذاری‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. حداکثر میزان خطای نسبی تغییرمکان قائم بدست آمده در قیاس با پاسخ دقیق ۰/۱۸ درصد است. همچنین، شکل توزیع مولفه‌های مختلف تنش با نتایج نرم‌افزار دارای انطباق کامل می‌باشد. نتایج عددی بدست آمده دقت بالا و کارآیی روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

واژه‌نامه

1. Isogeometric
2. Finite element method
3. Computer-Aided Design (CAD)
4. Abaqus
5. Bézier extraction
6. control points
7. Bernstein
8. local control
9. knot vector
10. non-negative
11. partition of unity
12. knot insertion
13. Rhinoceros
14. solver
15. plugin
16. Bézier decomposition
17. strong form
18. weak form
19. physical
20. parametric
21. parent
22. jacobian
23. trimmed surface

مراجع

1. Hughes, T. J., Cottrell, J. A., and Bazilevs, Y., “Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry And Mesh Refinement”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.
2. Dimitri, R., De Lorenzis, L., Scott, M. A., Wriggers, P., Taylor, R. L., and Zavarise, G., “Isogeometric Large Deformation Frictionless Contact Using T-Splines”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 269, pp. 394-414, 2014.

3. Scott, M. A., Simpson, R. N., Evans, J. A., Lipton, S., Bordas, S. P., Hughes, T. J., and Sederberg, T. W., “Isogeometric Boundary Element Analysis Using Unstructured T-Splines”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 254, pp. 197-221, 2013.
4. Buffa, A., Sangalli, G., and Vázquez, R., “Isogeometric Analysis for Electromagnetic Problems”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 46, pp. 3305-3308, 2010.
5. Lu, J., “Isogeometric Contact Analysis: Geometric Basis and Formulation for Frictionless Contact”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, pp. 726-741, 2011.
6. Gomez, H., Hughes, T. J., Nogueira, X., and Calo, V. M., “Isogeometric Analysis of the Isothermal Navier–Stokes–Korteweg Equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 1828-1840, 2010.
7. Bazilevs, Y., Calo, V. M., Hughes, T. J., and Zhang, Y., “Isogeometric Fluid-Structure Interaction: Theory, Algorithms, and Computations”, *Computational Mechanics*, Vol. 43, pp. 3-27, 2008.
8. Bazilevs, Y., Calo, V. M., Zhang, Y., and Hughes, T. J., “Isogeometric Fluid–Structure Interaction Analysis with Applications to Arterial Blood Flow”, *Computational Mechanics*, Vol. 38, pp. 310-322, 2006.
9. Hirschler, T., Bouclier, R., Duval, A., Elguedj, T., and Morlier, J., “The Embedded Isogeometric Kirchhoff–Love Shell: From Design to Shape Optimization of Non-Conforming Stiffened Multipatch Structures”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 349, pp. 774-797, 2019.
10. Hsu, M. C., Wang, C., Herrema, A. J., Schillinger, D., Ghoshal, A., and Bazilevs, Y., “An Interactive Geometry Modeling and Parametric Design Platform for Isogeometric Analysis”, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 70, pp. 1481-1500, 2015.
11. Lai, Y., Zhang, Y. J., Liu, L., Wei, X., Fang, E., and Lua, J., “Integrating CAD with Abaqus: a Practical Isogeometric Analysis Software Platform for Industrial Applications”, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 74, pp. 1648-1660, 2017.
12. Lai, Y., Liu, L., Zhang, Y. J., Chen, J., Fang, E., and Lua, J., “Rhino ۳D to Abaqus: A T-Spline Based Isogeometric Analysis Software Framework”, *Advances in Computational Fluid-Structure Interaction and Flow Simulation: New Methods and Challenging Computations*, pp. 271-281, 2016.
13. Li, M., Chen, Y., Zhang, M., Yang, L., Lian, H., Bordas, S. P., and Kong, R., “Platform for Isogeometric Analysis of Complex Hydraulic Structures”, *Automation in Construction*, Vol. 152, 2023.
14. Meng, X., Zhang, L. Y., Zhao, Z. L., and Xie, Y. M., “A Direct Approach to Achieving Efficient Free-Form Shells with Embedded Geometrical Patterns”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 185, 2023.
15. Yang, F., Yu, T., Liu, Z., and Bui, T.Q., “Isogeometric Double-Objective Shape Optimization of Free-Form Surface Structures with Kirchhoff–Love Shell Theory”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 223, 2023.
16. Seo, Y. D., Kim, H. J., and Youn, S. K., “Isogeometric Topology Optimization Using Trimmed Spline Surfaces”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 3270-3296, 2010.
17. Bauer, A. M., Breitenberger, M., Philipp, B., Wüchner, R., and Bletzinger, K. U., “Embedded Structural Entities in NURBS-Based Isogeometric Analysis”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 325, pp. 198-218, 2017.
18. Breitenberger, M., Bletzinger, K. U., and Wüchner, R., “Isogeometric Layout Optimization of Shell Structures Using Trimmed NURBS Surfaces”, *Proceedings of World Congress on Structural and Multidisciplinary* Optimization, Orlando, pp. 19-24, 2013.
19. Schmidt, R., Wüchner, R., and Bletzinger, K. U., “Isogeometric Analysis of Trimmed NURBS Geometries”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 241, pp. 93-111, 2012.
20. Salomon, D., *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer Science & Business Media. 2007.
21. Sohel, F. A., Karmakar, G. C., Dooley, L. S., and Arkinstall, J. R., “Quasi-Bezier Curves Integrating Localised Information”, *Pattern Recognition*, Vol. 41, pp. 531-554, 2008.
22. Farin, G. E., *Curves and Surfaces For CAGD: A Practical Guide*, Elsevier, 2002.
23. Borden, M. J., Scott, M. A., Evans, J. A., and Hughes, T. J., “Isogeometric Finite Element Data Structures Based on Bézier Extraction of NURBS”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 87 , pp. 15-47, 2011.
24. Scott, M. A., Borden, M. J., Verhoosel, C. V., Sederberg, T. W., and Hughes, T. J., “Isogeometric Finite Element Data Structures Based on Bézier Extraction of T-Splines”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 88, pp. 126-156, 2011.
25. Vo-Minh, T., Nguyen-Son, L., Nguyen-Van, G., and Thai-Phuong, T., “Upper Bound Limit Analysis of Circular Tunnel in Cohesive-Frictional Soils Using Isogeometric Analysis Based on Bézier Extraction”,

Tunnelling and Underground Space Technology, Vol. 114, 2021.

26. Krishnamoorthy, C. S., *Finite Element Analysis: Theory and Programming*, Tata McGraw-Hill, 1994.

27. Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, Vol. 3, McGraw-Hill, New York, 1985.