مرتضی براتی<sup>۱</sup>، فرزاد شهابیان<sup>۱\*</sup> بهروز حسنی<sup>۲</sup> ۱- گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد ۲- گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده- روش تحلیل همهندسی با هدف کاهش فاصله بین تحلیل و طراحی به کمک رایانه معرفی شده است. این روش دارای مزایایی همچون مدلسازی دقیق هندسه، روشهای بهبودسازی مناسب، راحتی دستیابی به توابع مرتبه بالا و دقت بالاتر در محاسبات است. هدف این پژوهش، ارائه روشی کارآمد برای اعمال بارهای گسترده بر سطوح دارای انحنا در تحلیل همهندسی میباشد. یکی از چالشهای اصلی در این روش، نحوه اعمال شرایط مرزی بر روی هندسههای پیچیده است. در مدلهای دارای انحنا در تحلیل همهندسی می باشد. یکی از چالشهای اصلی در این روش، نحوه اعمال روی این نقاط میشود. در این پژوهش، از توابع نربز که توابعی غیر درونیاب و استاندارد در سامانههای طراحی رایانهای هستند، برای تقریب فضای حل و توصیف هندسه استفاده شده است. همچنین، به منظور استفاده از قابلیتهای ابزارهای طراحی به کمک رایانه، نحوه وارد کردن هندسههای ایجاد شده در نرمافزار راینو به تحلیل همهندسی با استفاده از فرآیند استخراج بزیه توضیح داده می شود. نتایج بدست آمده، صحت و کارآیی روش پیشنهادی را تأیید میکند.

واژههای کلیدی: روش همهندسی، توابع نربز، بار گسترده، سطوح دارای انحنا، استخراج بزیه.

#### An Efficient Method for Applying Distributed Loads on Curved Surfaces in Isogeometric Analysis

M. Barati<sup>1</sup>, F. Shahabian <sup>1\*</sup>, B. Hassani<sup>2</sup>

Department of Civil Engineering, Ferdowsi Unsiversity of Mashhad
 Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

**Abstract**: The isogeometric method was introduced to bridge the gap between computer-aided design (CAD) and analysis. This method offers advantages such as precise geometric modeling, suitable refinement methods, easy access to higher-order functions, and greater computational accuracy. The aim of this research is to provide an efficient method for applying distributed loads on curved surfaces in isogeometric analysis. One of the main challenges in this method is how to apply boundary conditions on complex geometries. In curved models, some control points may not lie on the geometry, leading to ambiguity in the distribution of loads on these points. This study uses NURBS functions, which are standard non-interpolatory functions in CAD systems, to approximate the solution space and describe the geometry. Additionally, to leverage the capabilities of CAD tools, the process of importing geometries created in Rhino into isogeometric analysis using Bézier extraction is explained. The results confirm the accuracy and efficiency of the proposed method.

Keywords: Isogeometric Method, NURBS, Distributed Loads, Curved Surfaces, Bézier Extraction.

\* : مسئول مكاتبات، پست الكترونيكي:shahabf@um.ac.ir

فهرست علائم

تابع پایه برنشتاین	B <sub>i</sub>
نيروى حجمي	b
ماتریس ضرایب بزیه	С
منحنى بزيه	C(t)
منحنی بی⊣سپلاین و نربز	$C(\xi)$
بردار تغييرمكان	$\{d\}$
ماتریس تنش-کرنش	D
بردار یکه عمود	e <sub>n</sub>
ضريب كشساني	Е
بردار نيرو	$\{F\}$
ماتريس ژاكوبين	J
ماتريس سختي	[K]
عملگر ديفرانسيلي	L
مرتبه تابع برنشتاين	n
توابع پایه نربز در هر راستا	N و M
مرتبه توابع پایه بی-اسپلاین و نربز	p و p
نقاط کنترل ب <i>ی</i> ⊣سپلاین و نربز	Р

۱- معرفی

امروزه بسیاری از مسائل در زمینههای مختلف علوم و مهندسی توسط معادلات جبري یا دیفرانسیلي بیان مي گردند. از آن جايي که تنها موارد معدودی از این معادلهها را می توان مستقیماً با روش های تحلیلی حل نمود، شیوه های عددی زیادی برای حل چنین معادلاتی وجود دارد. یکی از روشهای عددی که در سالهای اخیر برای حل مسائل مهندسی مورد استفاده قرارگرفته است، تحليل همهندسی' میباشد. انگیزه انجام نخستين فعالیتها در زمینه تحلیل همهندسی برطرف کردن فاصله موجود بین تحلیل اجزای محدود ۲ و مدلسازی با استفاده از رایانه جوده است [۱]. یکی از مزایای برجسته این روش، امکان مدلسازی دقیق هندسه سازه است که باعث حذف خطاهای ناشی از تقریب هندسی میشود. ایده اصلی تحلیل همهندسی بهره گیری از توابع پایه استفاده شده در توصیف دقیق هندسه برای تقریب میدان حل میباشد. تفاوت بنیادی بین تحلیل همهندسی و تحلیل اجزای محدود این است که در روش اجزاي محدود توابع پايه براي تقريب ميدان هاي تحليل نامعلوم

نقاط کنترل بزیه P <sup>l</sup>	
ق شدت بار	
تابع پايه نربز	
ی اسپلاین و نر S(٤,η)	
نيروى سطحي	
u تغييرمكان	
بردار عمود بر سطح V <sub>1</sub>	
v بردار مماس بر سطح	
وزن نقاط کنترل	
مرز فيزيكى I	
ې و η مختصه فضای پارامتری	
E و H بردار گرهی	
۵ ضریب پواسون	
تانسور تنش	
دامنه فضای فیزیکی	
 Ω دامنه فضای پارامتری	
Ω Ω	

انتخاب می شوند و سپس از آنها برای تقریب هندسه معلوم نیز استفاده می شود. تحلیل هم هندسی این شیوه را معکوس می کند به طوری که یک تابع پایه که قادر است به صورت دقیق هندسه معلوم را نمایش دهد، انتخاب می شود و آن را به عنوان پایه برای تقریب میدان حل استفاده می کند. با توجه به این که این روش به طور هم زمان از مزایای روش اجزای محدود و شیوههای تولید هندسه بهرهمند می باشد، لذا به عنوان یک جایگزین کارآمد و مطلوب برای روش اجزای محدود مطرح شده است. روش تحلیل هم هندسی در زمینههای مختلفی ازجمله در مسائل کشسان [۲, ۳]، الکترومغناطیس [۴]، تماس (۵]، سیالات [۶] و اندرکنش سیال – سازه [۷, ۸] به کار گرفته شده است.

یکی از اهداف اصلی تحلیل همهندسی، ترکیب مراحل طراحی و تحلیل میباشد به طوری که ایده طراحی هندسی و تحلیل عددی، همزمان در یک بسته نرمافزاری میسر گردد [۱, ۹]. با توجه به این که تحلیل همهندسی مانند بسیاری از ابزارهای طراحی به کمک رایانه از توابع نربز برای توصیف

هندسه استفاده میکند، مدلهای ساخته شده در این ابزارها را میتوان به صورت صریح در تحلیل همهندسی به کار برد.

اکثر نرمافزاهای تجاری مهندسی به کمک رایانه به روش اجزای محدود پیادهسازی شدهاند و روش همهندسی را پشتیبانی نمیکنند؛ بنابراین نیاز به یک بستر نرمافزاری در این زمینه الزامی میباشد. در همین راستا برخی از کدها و برنامههای منبعباز توسعه یافتهاند. هسو و همکاران [۱۰] یک نرمافزار تعاملی طراحی-تحلیل برای سازههای پوستهای بر اساس نرمافزار تجاری راینو توسعه دادند، اما در روش آنها مدلهای سهبعدی قابل تحلیل نمیباشند. لای و همکاران [۱۱ و ۱۲] یک روش برای ادغام تحلیل همهندسی با نرمافزارهای تجاری اجزای محدودی ارائه کردند. آنها با افزودن یک زیربرنامه به نرمافزار آباکوس ٔ امکان تحلیل مدلهای اولیه که توسط توابع تى-اسپلاين در نرمافزار راينو ايجاد شده را فراهم کردند. لی و همکاران [۱۳] یک نرمافزار تجاری برای تحلیل سازههای هیدرولیکی فراهم کردند. نرمافزار معرفی شده توسط ایشان امکان مدلسازی هندسی و تحلیل را برای سازههای هیدرولیکی در یک بسته نرمافزاری فراهم کرده است. با این حال، کدها یا برنامههای ارائه شده توسط پژوهشگران پاسخگوی خواسته های عملی مهندسان نمی باشند. از جمله مهم ترين دلايل أن عبارت است از:

الف- عدم امکان ادغام مدلسازی هندسی و تحلیل عددی در یک نرمافزار

ب- عدم وجود توانایی تحلیل خودکار برای سازههای سهبعدی

ج- عدم پیادهسازی رابط کاربر گرافیکی برای مدلسازی تبدیل مدلهای ساخته شده در ابزارهای. طراحی رایانهای برای استفاده در یک تحلیلگر روش همهندسی، از طریق عملگر استخراج بزیه<sup>۵</sup> فراهم میشود. در این پژوهش، رابطهسازی این فرآیند ارائه میگردد که با استفاده از آن امکان ساخت مدلهای هندسی با شکل آزاد برای تحلیل همهندسی به وجود میآید. شکلهای آزاد هندسی به دلیل زیبایی بصری که دارند بسیار

مورد توجه طراحان صنعتی و معماران قرار می گیرند [۱۴ و ۱۵]. به دلیل پیچیدگی های رابطهسازی و الگوسازی این گونه سازه ها، پژوهشگران و مهندسان به بررسی این موضوع پرداختهاند و مطالعه رفتار این سازه ها از جنبه عملی دارای اهمیت ویژه می باشد.

با وجود تلاشهای صورت گرفته در زمینه تحلیل همهندسی در سالهای اخیر، هنوز برخی از جنبههای آن دارای ابهام است و نیاز به پژوهشهای بیشتر دارد. توابع نربز از مجموعهای از نقاط کنترلی<sup>۶</sup> که بر روی یک چندضلعی قرار می گیرند، تشکیل می گردد. با توجه به این که نقاط کنترلی ممکن است بر روی هندسه سازه، قرار نگیرند، از این رو نحوه توزیع بارها بین این نقاط در هندسههای تحلیلی دارای ابهام میباشد. در برخی منابع روشهایی برای اعمال بار در روش تحلیل همهندسی ارائه شده است [۱۶–۱۹]. در این راستا و در پژوهش حاضر روشی برای اعمال بار گسترده بر روی سطوح دارای انحنا در تحلیل همهندسی ارائه می گردد. برای این کار، ابتدا توابع بزیه، بی-اسپلاین و نربز به عنوان توابع پایه روش همهندسي معرفي ميشوند سپس نحوه مدلسازي هندسههاي پیچیده و نحوه تبدیل آن به عنوان اطلاعات ورودی برای تحلیل همهندسی شرح داده میشود. در ادامه چارچوب کلی تحلیل همهندسی مبتنی بر توابع نربز تشریح می گردد و سپس روش اعمال بار گسترده و رابطهسازی مربوط به آن ارائه می شود. در پایان با ارائه چند مثال عددی، دقت روش پیشنهادی مورد بررسي قرار مي گيرد.

### ۲– توابع بزیه و بی–اسپلاین

مبنای ریاضی منحنیهای بزیه، چندجملهایهای برنشتاین<sup>۷</sup> میباشند. یک منحنی بزیه از مرتبه p به صورت ترکیب خطی از r+۱ تابع پایه برنشتاین تعریف میشود. از مزایای اصلی توابع بزیه تعریف ساده و استفاده آسان از آنها میباشد. به لحاظ ریاضی یک منحنی بزیه به صورت زیر تعریف میشود [۲۰].

$$C(t) = \sum_{i=*} B_{n,i}(t) P_i^b \qquad \circ \le t \le v \tag{1}$$

که در آن (B<sub>n,i</sub>(t، أمين تابع پايه برنشتاين از مرتبه n است و از رابطه زير بدست ميآيد.

$$B_{n,i}(t) = {n \choose i} t^{i} (1-t)^{n-i} \quad (\circ)^{\circ} \equiv 1$$
 (7)

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \bullet! \equiv \mathsf{N}$$
 (Y)

در رابطه (۱)، <sup>P</sup><sub>i</sub><sup>b</sup> نقاط کنترلی منحنی بزیه میباشند. توابع بزیه با وجود کاربردهای گسترده، دارای برخی کاستیها از جمله نوسانات اضافی و عدم کنترل محلی<sup>^</sup> میباشند که باعث میشود در تولید برخی از شکلهای پیچیده و منحنیهای با تغییرات زیاد، محدودیتهایی داشته باشند [۲۱].

توابع بی-اسپلاین به منظور غلبه بر محدودیتهای توابع بزیه توسعه یافتند [۲۰ و ۲۲]. منحنیهای بی-اسپلاین همانند منحنیهای بزیه از ترکیب خطی نقاط کنترلی و توابع پایه که همان بی-اسپلاینها هستند، بر روی فضای پارامتری تعریف میشوند. فرض میگردد که  $[m_{3},...,\xi_{7}] = \Xi$  مجموعه مقادیر پارامتری متوالی غیرنزولی است که در آن مقادیر پارامتری متوالی غیرنزولی است که در آن  $\mathcal{L}(m_{3},...,m_{7}) = \Xi$  بردار مقادیر پارامتری متوالی فیرنزولی است که در آن مقادیر پارامتری متوالی و م گرهی<sup>ه</sup> نامیده میشود. همچنین، <sub>ا</sub>ع گره i أم که ۱+p+1 میباشد، و رجه بی-اسپلاین و N<sub>i,p</sub>(3) از درجه میشوند [۱].

$$N_{i,*}(\xi) = \begin{cases} v & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+v} \\ \bullet & \text{otherwise} \end{cases}$$
(\*)

همچنین برای توابع با درجه ۱≤p به صورت رابطه (۵) بیان میشوند.

$$\mathbf{N}_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} \mathbf{N}_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \mathbf{N}_{i+1,p-1}(\xi) \quad (\Delta)$$

توابع بی-اسپلاین دارای ویژگیهای مهمی از قبیل غیر منفی بودن<sup>۱</sup>، پوشش محلی، بخشی از واحد بودن<sup>۱۱</sup> و استقلال خطی میباشند.

### ۳– فرآیند وارد کردن گره<sup>۱۲</sup>

وارد کردن گره شامل اضافه کردن گرههای جدید بین گرههای موجود میباشد. در نتیجه جزء موجود به اجزای کوچکتر تقسیم میشود و تعداد اجزا در شبکه افزایش مییابد. این فرآیند درجه توابع پایه را تغییر نمیدهد بلکه تعداد نقاط کنترل را افزایش میدهد. با وارد کردن گره، هیچ تغییری در شکل هندسی و پارامتری داده نمیشود، اما تعداد نقاط کنترل و توابع پایه افزایش مییابد. برای حفظ این ویژگی، لازم است نقاط کنترل به روشی خاص انتخاب شوند.

اگر  $\{\xi_{1},\xi_{7},...,\xi_{n+p+1}\} = \Xi$  بردار گرهی داده شده باشد، وارد کردن گره به بردار گرهی، به طوری که  $(\xi_{k},\xi_{k+1}) = \xi \in [\xi_{k},\xi_{k+1}]$  و k > p باشد، باعث به وجود آمدن یک تابع پایه جدید و متناظر با آن یک نقطه کنترل جدید می شود. قابل توجه است که همه توابع پایه قدیمی باید مجدد تعریف شوند )مطابق رابطههای (۴) و(۵)). نقطه کنترل جدید مطابق رابطه زیر بدست می آید [۳۳].

$$\overline{P}_{i} = \begin{cases} P_{i} & i = i \\ \alpha_{i}P_{i} + (i - \alpha_{i})P_{i-i} & i < i < m \\ P_{n} & i = m \end{cases}$$
(9)

که ضریب 
$$\alpha_i$$
 مطابق رابطه زیر محاسبه می گردد.  
 $i < k - n$ 

$$\alpha_{i} = \begin{cases} \frac{1}{\overline{\xi} - \xi_{i}} & i \le k - p \\ \frac{1}{\overline{\xi}_{i+p} - \xi_{i}} & k - p + 1 < i < k \\ \circ & i \ge k + 1 \end{cases}$$
(V)

**۴– توابع نربز** تابع نربز یک مدل ریاضی است که معمولاً در گرافیک رایانهای کاربرد دارد و به منظور ایجاد و نمایش منحنیها و سطوح

استفاده می شود. به کمک نربزها می توان دسته وسیعی از مدلهای هندسی را که پیش از این امکان ساخت آنها به وسیله بسیاری از چند جملهای های حاضر در طراحی مهندسی وجود نداشته است، نمایش داد [۱]. یک منحنی نربز با مرتبه، مجموعه نقاط کنترلی، وزن مربوط به هر یک از نقاط و بردار گرهی مشخص می شود. منحنی ها و سطوح نربز حالت تعمیمیافته بی-اسپلاین ها می باشند که تفاوت اصلی آن با بی اسپلاین ها در نسبت دادن وزن به نقاط کنترلی است. توابع پایه نربز از رابطه زیر بدست می آیند [۱].

$$R_{i}^{p}\left(\xi\right) = \frac{N_{i,p}\left(\xi\right)w_{i}}{W\left(\xi\right)} = \frac{N_{i,p}\left(\xi\right)w_{i}}{\sum_{i=1}^{n}N_{i,p}\left(\xi\right)w_{i}} \tag{A}$$

در این رابطه w<sub>i</sub> وزن نقاط کنترلی میباشد. با استفاده از توابع پایه بدست آمده از رابطه (۸) و نقاط کنترلی p<sub>i</sub>، منحنی نربز با رابطه (۹) محاسبه میشود.

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{n} R_{i}^{p}(\xi) P_{i}$$
(9)

توابع پایه دو متغیره نربز نیز از رابطه (۱۰) حاصل می گردد.

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}$$
(1.)

که در آن (N<sub>i,p</sub>(ξ و (M<sub>j,q</sub>(η به ترتیب توابع پایه در راستای کې و η و از مرتبه p و میباشند. همچنین یک سطح نربز به صورت رابطه (۱۱) تعریف می شود [۱].

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j}$$
(11)

## ۵- ساخت مدل هندسی پیچیده در تحلیل همهندسی

امروزه در اکثر نرمافزارهای طراحی به کمک رایانه از ابزار نربز برای طراحی هندسههای پیچیده استفاده می شود که نسبت به سایر ابزارها دارای انعطاف پذیری و دقت بالاتری می باشد. در فرآیند ساخت مدلهای هندسی، نرمافزار راینو<sup>۱۳</sup> یکی از ابزارهای قدرتمند و پرکاربرد است که از توابع اسپلاین و نربز

برای ایجاد هندسه استفاده میکند. در تحلیل همهندسی، هدف اصلی ادغام مراحل طراحی و تحلیل میباشد، به طوری که مدلهای هندسی ساخته شده در نرمافزارهای طراحی بتوانند مستقیم و بدون تغییرات اساسی وارد فرآیند تحلیل شوند. نرمافزار راینو با توانایی ایجاد مدلهای دقیق و پیچیده با استفاده از نربز، ابزاری مناسب برای این هدف میباشد.

برای دستیابی به این هدف، ابتدا مدل هندسی در نرمافزار راینو ایجاد می شود، سپس این مدل به شکل مناسب برای تحلیل هم هندسی تبدیل و وارد فرآیند تحلیل می شود. این روش به کاربران اجازه می دهد تا از دقت و توانمندی های راینو در طراحی مدل های پیچیده بهرهمند شوند و به طور مستقیم از این مدل ها در تحلیل های خود استفاده کنند، بدون این که نیاز به بازسازی مجدد مدل در محیط تحلیل باشد. این یکپارچگی بین مراحل طراحی و تحلیل، منجر به کاهش زمان و هزینه های محاسباتی می شود و امکان انجام تحلیل های دقیق تر و کارآمدتر را فراهم می کند.

یکی از چالشهای پژوهش حاضر، تبدیل مدلهای گرافیکی ساخته شده در نرمافزار راینو به اطلاعات هندسی قابل استفاده برای تحلیل گر<sup>۱۴</sup> همهندسی میباشد. قابل توجه است که در این پژوهش از نرمافزار متلب به عنوان تحلیلگر روش همهندسی استفاده شده است. نرمافزار راینو با استفاده از افزونه<sup>۱۵</sup> تی-اسپلاین یک خروجی متنی از مدل ساخته شده ارائه می کند که حاوی اطلاعات هندسی آن است. این اطلاعات شامل نقاط کنترل، وزنها و ضرایب بزیه می باشد. همان طور که اشاره شد توابع بی-اسپلاین و نربز تعمیم توابع بزیه هستند و می توان آن ها را به صورت ترکیب خطی از توابع بزیه در هر دهانه تعريف كرد. ضرايب اين تركيب خطى، ضرايب بزيه میباشند؛ بنابراین با داشتن این ضرایب میتوان تابع نربز را به راحتی ایجاد کرد. فرآیند تبدیل یک تابع نربز به تابع بزیه را استخراج بزیه مینامند. این روش به ویژه در تحلیل همهندسی اهمیت ویژهای دارد زیرا با استفاده از آن می توان مدلهای پیچیده هندسی را به شکلی سادهتر و کارآمدتر برای تحلیلهای

عددی تبدیل کرد [۲۳ و ۲۴]. با توجه به آنچه اشاره شد مراحل تبدیل مدل هندسی به دادههای لازم برای تحلیل همهندسی به صورت زیر می باشد.

الف– ابتدا مدل هندسی مورد نظر با استفاده از ابزارهای نربز در راینو ایجاد میشود.

ب- مدل نربز باید به قطعات بزیه تبدیل شود. این عمل توسط افزونه تی-اسپلاین در نرم افزار راینو صورت می پذیرد.

ج- پس از تبدیل مدل به فرم بزیه، مدل می تواند به ابزارهای تحلیل عددی صادر شود.

د- در انتها طی یک فرآیند معکوس ضرایب بزیه تبدیل به توابع نربز میشوند. در ادامه فرآیند استخراج بزیه توضیح داده میشود.

۵–۱– استخراج بزیه

این بخش به چگونگی ساخت توابع نربز با استفاده از توابع بزیه و عملگر استخراج بزیه می پردازد. بی – اسپلاین ها و نربزها، بیش از یک جزء را پوشش می دهند در حالی که توابع پایه اجزای محدود تنها یک جزء را پوشش دهند. با محلی کردن توابع نربز امکان پوشش دهی تنها یک جزء فراهم می شود. این عمل به وسیله محاسبه توابع نربز به شکل توابع دیگر که فقط روی یک ناحیه جزء تعریف می شوند قابل حل است.

به وسیله انتخاب چند جملهای های پایه برنشتاین که سازنده توابع بزیه هستند، خواسته مورد نظر برآورده می گردد. این عمل با روش استخراج بزیه صورت می پذیرد که امکان استفاده از ابزارهای استاندارد اجزای محدود را در چارچوب تحلیل همهندسی تسهیل می کند. فرآیند استخراج بزیه اطمینان می دهد که مزایای تحلیل هم هندسی، مانند نمایش دقیق هندسه و پیوستگی بالاتر، حفظ می شوند در حالی که کارآیی محاسباتی و سازگاری با ابزارهای اجزای محدود را بهبود می بخشد [۲۵]. همان طور که اشاره شد توابع پایه نربز از مرتبه p درون هر جزء دارای پیوستگی <sup>4-P</sup> هستند. برای تجزیه مجموعهای از توابع پایه نربز به اجزای بزیه که به آن تجزیه بزیه<sup>18</sup> گفته

می شود مقدار گره تا زمانی که k به p برسد، تکرار می شوند. پس از این عمل پیوستگی تابع به °C می رسد. لازم به ذکر است که تجزیه بزیه مرتبه پیوستگی توابع پایه نربز را کاهش می دهد، اما پیوستگی هندسی حفظ می شود. فر آیند اضافه کردن گره مطابق آنچه در بخش بهبودسازی اضافه کردن گره اشاره شد انجام می پذیرد.

عملگر استخراج یا همان ضرایب بزیه برای j أمین گره وارد شده به صورت زیر بدست می آید [۲۳].

$$C^{j} = \begin{bmatrix} \alpha_{1} & 1 - \alpha_{\gamma} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \alpha_{\gamma} & 1 - \alpha_{\gamma} & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & & & \ddots & \\ \circ & \dots & & & \alpha_{(n+j-1)} & 1 - \alpha_{(n+j)} \end{bmatrix}$$
 (17)

برای محاسبه ماتریس C، تنها بردار گرهی مورد نیاز است و این محاسبات به نقاط کنترل و توابع پایه وابسته نیست؛ بنابراین این عملگر برای بی-اسپلاینها و نربزها یکسان است. نقطه کنترل جدید مرتبط با گره اضافه شده با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود.  $\overline{\mathbf{P}}^{j+1} = (\mathbf{C}^{j})^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{P}}^{j}$ 

 $\overline{\mathbf{P}}^{j+1} = (\mathbf{C}^j)^T \overline{\mathbf{P}}^j$  (۱۳) با توجه به وارد کردن مجموعهای از گرهها، عملگر استخراج

 $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{C}^{\mathrm{m}})^{\mathrm{T}} (\mathbf{C}^{\mathrm{m}-1})^{\mathrm{T}} \dots (\mathbf{C}^{\prime})^{\mathrm{T}}$ (14)

رابطه بین نقاط کنترل بزیه جدید و نقاط کنترل نربز اولیه به صورت زیر بدست میآید.

 $P^{b} = C^{T}P$  (۱۵) با بادآوری این که وارد کردن گره باعث هیچ تغییر هندسی و

(۱۶) 
$$C(\xi) = (P^b)^T B(\xi) = (C^T P)^T B(\xi) = P^T CB(\xi)$$

$$= \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \tag{12}$$

که در آن  $B(\xi)$  مجموعه توابع پایه برنشتاین پس از استخراج بزیه است. رابطه بین توابع پایه بی – سپلاین و چند جمله ای های برنشتاین به صورت زیر بیان می گردد [۲۴]. N( $\xi$ ) = CB( $\xi$ )

توجه شود که برای هندسه دوبعدی، ابعاد ماتریس P برابر با ۲×n است در حالی که <sup>d</sup>P دارای ابعاد ۲×(n+n) میباشد؛ بنابراین ابعاد C برابر با n×(n+m) خواهد بود. در این جا n، تعداد توابع پایه یا نقاط کنترل قبل از تجزیه بزیه و m تعداد گرههای وارد شده است. برای بدست آوردن توابع پایه نربز، تابع وزن باید به صورت رابطه (۱۷) بازنویسی شود.

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i = w^T N(\xi) = w^T CB(\xi)$$
(1V)  
=  $(C^T w)^T B(\xi) = (w^b)^T B(\xi) = W^b(\xi)$ 

که w<sup>b</sup> = C<sup>T</sup>w، وزنهای مرتبط با توابع پایه بزیه به صورت برداری میباشند. با جایگزینی رابطه (۱۶) در رابطه (۸) توابع پایه نربز با استفاده از عملگر استخراج بزیه بدست میآیند.

$$R(\xi) = \frac{1}{W^{b}(\xi)} WCB(\xi)$$
(1A)

در این رابطه W ماتریس قطری وزنهای نربز به صورت زیر تعریف میشود.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1} & & & \\ & \mathbf{W}_{T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{W}_{n} \end{bmatrix}$$
(14)

بنابراین یک منحنی نربز به صورت جزءهای بزیه با پیوستگی °C مطابق رابطه (۲۰) بازنویسی میشود .

$$C(\xi) = P^{T}R(\xi) = \frac{i}{W^{b}(\xi)}P^{T}WCB(\xi)$$
$$= \frac{i}{W^{b}(\xi)}(C^{T}WP)^{T}B(\xi) \qquad (7 \circ i)$$
$$= \frac{i}{W^{b}(\xi)}(W^{b}P^{b})^{T}B(\xi)$$

رابطه بین نقاط کنترل بزیه و نقاط کنترل نربز از معادلات Error! Reference source not found. و (۲۰) قابل نتیجه گیری است [۲۵].

$$\mathbf{P}^{\mathbf{b}} = (\mathbf{W}^{\mathbf{b}})^{-1} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{P}$$
(71)

با یادآوری رابطه (۸)، توابع پایه نربز پس از استخراج بزیه برای جزء e میتوانند به صورت زیر تعریف شوند.

$$R^{e}\left(\xi\right) = \frac{W^{e}N^{e}\left(\xi\right)}{W^{b}\left(\xi\right)} = \frac{W^{e}C^{e}B^{e}\left(\xi\right)}{W^{e}\left(\xi\right)}$$
(77)

که در آن <sup>we</sup> ماتریس قطری وزنهای نربز محلی است. مشتقات اول توابع شکل جزء به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\frac{\partial \mathbf{R}^{e}(\xi)}{\partial \xi} = \mathbf{W}^{e} \mathbf{C}^{e} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{W}^{b}(\xi)} \frac{\partial \mathbf{B}^{e}(\xi)}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial \mathbf{W}^{b}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\mathbf{B}^{e}(\xi)}{(\mathbf{W}^{b}(\xi))^{2}} \end{bmatrix}$$
(Y7)

همچنین مشتق تابع وزن به صورت رابطه (۲۴) بیان می گردد.

$$\frac{\partial W^{b}\left(\xi\right)}{\partial\xi} = \sum_{i=1}^{(p+1)^{d_{p}}} B_{i,p}\left(\xi\right) w_{i}^{b}$$
(YF)

رابطه بین نقاط کنترل بزیه محلی و نربز محلی مانند رابطه حالت کلی آن میباشد (رابطه (۲۱)).

$$\mathbf{P}^{b,e} = (\mathbf{W}^{b,e})^{-1} (\mathbf{C}^e)^T \mathbf{W}^e \mathbf{P}^e \tag{7\Delta}$$

در این رابطه W<sup>b,e</sup> وزنهای بزیه محلی هستند و به صورت زیر بیان میگردد.

$$W^{b,e} = \begin{bmatrix} w_{\gamma}^{b,e} & & \\ & w_{\gamma}^{b,e} & \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{n}^{b,e} \end{bmatrix}, \quad w^{b,e} = (C^{e})^{T} w^{e} \quad (\Upsilon \mathcal{P})$$

عملگر استخراج دو متغیره محلی از عملگر استخراج تک متغیره تانسوری طبق رابطه زیر بدست میآید.

$$C^{e} = C^{j}_{\eta} \otimes C^{i}_{\xi} = \begin{bmatrix} C^{j}_{\eta, \eta} C^{i}_{\xi} & C^{j}_{\eta, \eta} C^{i}_{\xi} & \dots \\ C^{j}_{\eta, \eta} C^{i}_{\xi} & C^{j}_{\eta, \eta} C^{i}_{\xi} \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$
(YV)

که  $C^i_\xi$  و  $C^j_\eta$  به ترتیب i اُمین و j اُمین عملگر استخراج جزء تک متغیره در راستای کم و n میباشند. در نتیجه شبکه فیزیکی بزیه به صورت رابطه (۲۸) قابل محاسبه میباشد [۲۳].

$$C(\xi,\eta) = \frac{V}{W^{b}(\xi)} (W^{b}P^{b})^{T}B(\xi,\eta)$$
(YA)

شکل ۱ نگاشت از شبکه کنترلی نربز به شبکه کنترلی بزیه و در نهایت به شبکه فیزیکی بزیه را نشان میدهد.



شکل ۱– فرآیند استخراج بزیه. الف– شبکه کنترلی نربز، ب– شبکه کنترلی بزیه و پ– شبکه فیزیکی بزیه.

#### ۶- رابطهسازی تحلیل همهندسی

روش همهندسی و اجزای محدود از نوع روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار یک سیستم هستند و به عنوان ابزار قدرتمند در حل مسائل مهندسی شناخته می شوند. این دو شیوه با وجود تفاوتهای اصلی، شباهتهای زیادی دارند. این روش ها دارای مولفه هایی با مفاهیم مشابه هستند به طوری که بر اساس گسسته سازی دامنه مسئله و تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی به سیستم معادلات جبری استوار می باشند. این روش ها از مفهوم جزء برای تقسیم دامنه مسئله به بخش های کوچک تر استفاده می کنند و در هر جزء توابع پایه برای تقریب میدان های حل استفاده می شود. در ادامه مراحل حل معادلات حاکم بر مسئله تنش صفحه ای در چارچوب روش هم هندسی بیان می گردد.

رابطه حاکم بر یک مسئله کشسان دو بعدی توسط رابطههای تعادل، سینماتیک و ساختاری بدست می آید. برای حل مسئله، شرایط مرزی نیرو و تغییرمکان در نظر گرفته می شود. شکل قوی<sup>۱۷</sup> یک مسئله کشسان خطی دوبعدی و شرایط مرزی مرتبط با دامنه  $\Omega$  و مرز  $\Gamma$  با رابطههای (۲۹) تا (۳۱) بیان می گردند [۱].

 $\nabla \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \circ \quad \text{in} \qquad \Omega \tag{79}$ 

$$\sigma e_n = \overline{t} \quad \text{on} \quad \Gamma_t \tag{(7°)}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\overline{u}} \quad \text{on} \quad \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{u}}$$
 (T1)

در این رابطهها،  $\sigma$  تانسور تنش،  $\overline{t}$  نیروی سطحی b و نیروهای حجمی هستند.  $\Gamma_t$  بخشی از مرز است که بارهای سطحی بر روی آن اعمال می شوند و  $e_n$  بردار یکه عمود بر مرز بوده و به سمت خارج آن می باشد. همچنین  $\Gamma_u$  بخشی از



شکل ۲- نگاشت بین فضاها در تحلیل همهندسی، الف- فضای هندسی، ب- فضای پارامتری و ج- جزء مرجع.

بنابراین دو مفهوم شبکه کنترلی حاصل از نقاط کنترلی و شبکه فیزیکی حاصل از گسستهسازی هندسه واقعی مسئله، مطرح است. به دلیل غیردرونیاب بودن توابع پایه، شبکه کنترلی که از نقاط کنترلی میگذرد لزوماً بر هندسه واقعی منطبق نمی باشند و بیشتر مانند چهارچوبی هندسه را کنترل میکنند.

پس ازگسستهسازی، هندسه با استفاده از رابطه (۳۲) تقریب زده می شوند [۱].

$$\begin{cases} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{cases} = \sum_{i=1}^{n_{cp}} \mathbf{R}_{i} \left( \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \right) \begin{cases} \mathbf{x}_{i} \\ \mathbf{y}_{i} \end{cases}$$
 (**YY**)

که در آن X<sub>i</sub> و Y<sub>i</sub> مختصات و n<sub>cp</sub> تعداد نقاط کنترلی میباشند. کمیتهای میدان حل در نقاط کنترلی، متغیرهای کنترلی نامیده می شوند که در این مسئله تغییرمکان میباشد. متغیرهای کنترلی را می توان به صورت برداری نمایش داد.

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}}^{\mathrm{x}}, \mathbf{d}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}}^{\mathrm{y}}, \mathbf{d}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}}^{\mathrm{x}}, \mathbf{d}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}}^{\mathrm{y}}, \dots, \mathbf{d}_{n,m}^{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}}$$

با استفاده از متغیرهای کنترلی و با ترکیبی خطی از توابع پایه نربز می توان کمیتهای میدان حل در بقیه نقاط را بدست آورد.

$$\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\right) = \begin{cases} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{cases} = \sum_{i=1}^{n_{cp}} \boldsymbol{R}_{i}\left(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\right) \boldsymbol{d}$$
(٣4)

ماتریس R نیز از توابع پایه نربز بدست می آید و به صورت زیر می تواند نوشته شود.

مرز که تغییرمکان مشخص دارند و ۰= <del>u</del> و ۰≠ <del>u</del> به ترتیب نشانگر شرایط مرزی همگن و غیرهمگن میباشند. بعد از محاسبه شکل ضعیف<sup>۱۸</sup> معادله، دامنه مسئله گسستهسازی میشود. در روش همهندسی فضای تحلیل دارای سه زیر فضا شامل فضای فیزیکی<sup>۱۹</sup>، پارامتری<sup>۲۰</sup> و مرجع<sup>۲۱</sup> میباشد. فضای فیزیکی همان فضای واقعی است که مسئله در آن تعریف میشود. فضای پارامتری فضایی است که برای تعریف و کنترل هندسه در فضای فیزیکی به کار میرود. این فضا به عنوان یک واسطه بين تعريف رياضي و نمايش فيزيكي عمل ميكند. فضای پارامتری برای توابع دو بعدی عموماً به صورت مستطیلی و در بازه [۰٫۱] تعریف می گردد. فضای مرجع نیز مشابه اجزای محدود برای انتگرالگیری عددی به کار میرود. در این جا دامنه  $\Omega$  با مرز  $\Gamma$  در فضای فیزیکی، دامنه  $\overline{\Omega}$  در فضای پارامتری و دامنه  $\widehat{\Omega}$  در فضای مرجع در نظر گرفته میشود. هر نقطه در فضای یارامتری به کمک تبدیل  $\Omega \to \overline{\Omega}$ : x به نقطهای متناظر در فضای فیزیکی نگاشت می شود. شکل ۲ فضاهای مختلف و نگاشت بین آنها را در تحلیل همهندسی نشان میدهد. در روش همهندسی نقاط دامنه درونیاب نیستند و ممکن است درون دامنه قرار نگیرند در حالی که روش اجزای محدود نقاط گرهی درونیاب بوده و جزئی از دامنه جزء هستند؛

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1} & \circ & \mathbf{R}_{7,1} & \circ & \dots & \mathbf{R}_{n,m} & \circ \\ \circ & \mathbf{R}_{1,1} & \circ & \mathbf{R}_{7,1} & \dots & \circ & \mathbf{R}_{n,m} \end{bmatrix}$$
(Ya

با مشخص بودن تغييرمكانها، مي توان كرنش ها را از رابطه (۳۶) محاسبه کرد.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{d} \tag{(3.5)}$$

 $(\mathbf{TV})$ 

 $\boldsymbol{B} = LR$ در رابطه قبل، L عملگر دیفرانسیلی می باشد که در حالت دو بعدی با رابطه (۳۸) بیان می گردد.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{\cdot} \\ \mathbf{\cdot} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}$$
(%A)

گام بعد، انتگرالگیری شکل ضعیف بر روی دامنه گسستهسازی شده و استخراج معادله جبری برای بدست آوردن مجهولات در نقاط گرهی است. با استفاده از کار مجازی و سادهسازی، رابطه زير بدست مي آيد [۱].

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \,\boldsymbol{b} \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{\mathrm{t}}} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \,\overline{\mathrm{td}}\Gamma = \circ \qquad (\mathbf{T}\mathbf{A})$$

به منظور محاسبه ماتریـسهای سختی و نیرو باید مقـدار انتگرال با استفاده از روش گوس تقریب زده شود. برای این کار فضای پارامتری به فضای مرجع نگاشت میشود. فرض می گردد بردارهای گرهی به صورت [E = [ξ<sub>1</sub>,ξ<sub>7</sub>,...,ξ<sub>n+p+1</sub>] و باشند. نگاشت از فضای پارامتری به  $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \eta_1, \eta_2, ..., \eta_{m+q+1} \end{bmatrix}$ فضای مرجع به صورت زیر است.

$$\xi = \frac{s}{\gamma} \Big( \xi_{\gamma} - \xi_{\gamma} \Big) + \frac{\gamma}{\gamma} \Big( \xi_{\gamma} + \xi_{\gamma} \Big)$$
(\* • )

$$\eta = \frac{t}{\gamma} \left( \eta_{\gamma} - \eta_{\gamma} \right) + \frac{\gamma}{\gamma} \left( \eta_{\gamma} + \eta_{\gamma} \right)$$
(\*1)

در این رابطهها، s و t مختصات نقاط در فضای مرجع هستند. ماتریس ژاکوبین<sup>۲۲</sup>بین فضای مرجع و پارامتری به صورت زیر بيان مي گردد.

$$\mathbf{J}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} (\xi_{\gamma} - \xi_{\gamma}) & \circ \\ & \circ & \\ & \circ & \frac{1}{\gamma} (\eta_{\gamma} - \eta_{\gamma}) \end{bmatrix}$$
(47)

توابع شکل، عبارتهای صریح نسبت به  $\eta$  و کم میباشند در صورتی که برای محاسبه ماتریس B لازم است مشتق نسبت به x و y محاسبه گردد. از این رو، باید نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی انجام پذیرد. ماتریس ژاکوبین برای نگاشت ذکر شده عبارت است از [۱]:

$$\mathbf{J}_{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$
(FT)

برای انتگرالگیری عددی روی هر جزء در ابتدا باید جزء فیزیکی با استفاده از یک نگاشت به فضای پارامتری و سپس با نگاشتی دیگر به فضای مرجع منتقل شود. رابطه ژاکوبین کل در تحليل همهندسي به صورت زير تعريف ميشود.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{R}} \mathbf{J}_{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{t}} & \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$
(**ff**)
$$(\mathbf{f}^{\mathbf{f}})$$

$$(\mathbf{f$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}\Omega = \int_{-1-1}^{1} \int_{-1-1}^{1} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \,|\boldsymbol{J}| \,\mathrm{dsdt} =$$

$$\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{gp}}} \boldsymbol{B}_{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_{i} \,|\boldsymbol{J}_{i}| \,\mathrm{W}_{i}$$
(40)

i=\ که در آن n<sub>gp</sub> تعداد نقاط گوس میباشد که بستگی به درجه تابع نربز دارد و W<sub>i</sub> وزنهای مرتبط با نقاط گوسی میباشند. ماتریس نیرو نیز به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{\mathrm{t}}} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \overline{\mathrm{td}}\Gamma = \mathbf{F}_{\Omega} + \mathbf{F}_{\Gamma}$$
(49)

قرار دادن یکی از مختصههای پارامتری متناسب با مرز مورد نظر، توابع شکل با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه می شوند. مقدار پارامتر ثابت در هر مرز با توجه به شکل ۳ مشخص می گردد. با استفاده از این توابع می توان نقاط کنترلی مرز را به صورت یک منحنی نربز تعریف کرد. همچنین با هدف امکان اعمال بار با شدت متغیر و ساده بودن رابطه سازی، تابع بار اعمالی به وسیله توابع یک متغیره مرز تقریب زده می شود. بنابراین رابطه (۴۶) به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\begin{split} F_{\Gamma} &= \int_{\Gamma} R^{T} R \ \overline{t} d\Gamma = \int_{-1}^{1} R^{T} R \ \overline{t} \left| J_{1} \right| \left| J_{2} \right| dr \\ &= \sum_{i=1}^{n_{gp}} R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{1i} \right| \left| J_{2i} \right| W_{i} \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{1i} \right| \left| J_{2i} \right| W_{i} \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{1i} \right| \left| J_{2i} \right| W_{i} \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{1i} \right| \left| J_{2i} \right| W_{i} \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{1i} \right| \left| J_{2i} \right| W_{i} \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{1i} \right| \left| J_{2i} \right| W_{i} \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \left| J_{2i} \right| W_{i} \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \left| J_{2i} \right| \left| J_{2i} \right| \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \left| J_{2i} \right| \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| J_{2i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| R_{i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| R_{i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| R_{i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i}^{T} R_{i} \ \overline{t} \left| R_{i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i} \ \overline{t} \left| R_{i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i} \ \overline{t} \left| R_{i} \right| \\ &= c \ (lide here) R_{i} \ \overline{t} \left| R_{i} \right| \\ &= c \ (li$$

فضای هندسی با مرزی در فضای پارامتری متناظر میباشد. بر روی هر یک از مرزهای هندسی دو بردار محلی تعریف میشود که مطابق رابطه (۵۱) بدست میآیند [۲۶].

$$\begin{cases} V_{i} \\ V_{v} \end{cases} = \begin{bmatrix} \partial X / \partial \xi & \partial Y / \partial \xi \\ \partial X / \partial \eta & \partial Y / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{cases} i \\ j \end{cases}$$
 (d)

بردارهای بدست آمده از رابطه (۵۱) به صورت مماس و قائم بر مرز می باشند. شکل ۳ بردار قائم و مماس بر روی هر مرز در فضای پارامتری را نشان می دهد که به ترتیب با V<sub>n</sub> و V<sub>t</sub> نشان داده شدهاند.

در رابطه (۵۱) مختصات هندسی هر نقطه مطابق رابطه (۳۷) محاسبه می گردد. رابطه (۵۱) دارای دو مقدار برای ژاکوبین میباشد، بخش اول ( $J_1$ ) مربوط به نگاشت بین فضای فیزیکی و پارامتری و بخش دوم ( $J_r$ ) مربوط به نگاشت فضای پارامتری و جزء مرجع است. مقدار  $J_1$  برابر با بردار مماس بر سطح میباشد. (۵۲) بردار نیرو از دو بخش تشکیل می شود. بخش اول مربوط به بارهای حجمی می باشد که به صورت رابطه زیر بیان می گردد.  $F_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{R}^{T} \mathbf{R} \mathbf{b} d\Omega = \int_{-1-1}^{1} \mathbf{R}^{T} \mathbf{R} \mathbf{b} |\mathbf{J}| dsdt$  (۴۷)  $= \sum_{i=1}^{n_{\text{BP}}} \mathbf{R}_{i}^{T} \mathbf{R}_{i} \mathbf{b} |\mathbf{J}_{i}| W_{i}$ بخش دوم مربوط به بارهای سطحی است که در بخش بعدی به

بعش توم مربوع به بارمای سطایی است که تر باعش بایای به تفضیل در مورد نحوه محاسبه آن توضیح داده می شود. بارای مسائل تناش صفحهای، ماتریس رابط تنش-کرنش طبق رابطه (۴۸) محاسبه می گردد.

$$\boldsymbol{D} = \frac{\mathrm{E}}{1 - \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{v} & \circ \\ \boldsymbol{v} & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \frac{1 - \boldsymbol{v}}{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$
(4A)

در این رابطه، E ضریب کشسانی و v نسبت پواسون میباشد. در نهایت میتوان رابطه را به شکل ماتریسی نوشت که عبارت است از:

$$[K]{d} = {F}$$
(44)

که در آن **[K]** ماتریس سختی، **{F** بردار نیروها و **{b** بردار تغییرمکانها میباشد. همانند روش اجزای محدود، میتوان دستگاه معادلات فوق را با اعمال شرایط مرزی حل نمود و مقدار تغییرمکان را در نقاط کنترلی محاسبه نمود.

#### ۷– روش اعمال بار گسترده

با توجه به این که در هندسههای دارایانحنا نقاط کنترلی بر روی سطح قرار نمیگیرند، بنابراین توزیع بارها بین این نقاط دارای ابهام میباشد. در این بخش به ارائه روشی برای اعمال بار گسترده در سطوح دارای انحنا پرداخته میشود.

به منظور بدست آوردن بار سطحی در هر نقطه کنترلی از بخش اول رابطه (۴۶) استفاده میگردد. این انتگرال بر روی مرزی که تحت بارگذاری است، محاسبه میشود و توابع پایه در این رابطه به صورت یک متغیره تعریف میگردند. با ثابت



شکل ۳- مختصه ثابت پارامتری و بردارهای قائم و مماس بر روی هر مرز در فضای پارامتری.

$$\mathbf{J}_{\gamma} = \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\gamma}{\gamma} \left( \xi_{\gamma} - \xi_{\gamma} \right) \tag{\DeltaT}$$

همچنین  $\overline{\mathbf{t}}$  بیانکننده حالت توزیع بار روی مرز میباشد که برای حالت فشار عمود بر سطح و بار قائم به ترتیب با رابطههای (۵۴) و (۵۵) بدست میآید [۲۶].

$$\overline{\mathbf{t}} = q \ \mathbf{e_n} = q \begin{cases} l_n \\ m_n \end{cases}$$
(۵۴)

$$\overline{\mathbf{t}} = \mathbf{q} \begin{cases} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{cases}$$
 (۵۵)

در رابطه (۵۴) مقدار e<sub>n</sub> بردار یکه عمود بر مرز بوده و به صورت زیر محاسبه میگردد.

$$e_n = \frac{V_n}{|V_n|} \tag{$\Delta P$}$$

#### ۸– مثالهای عددی

در این بخش به منظور بررسی روش پیشنهادی سه مثال عددی با بارگذاری متفاوت ارائه میگردد. در این مثالها ضریب کشسانی  $K = r \cdot v \cdot c = 0$ ، ضریب پواسون ۲۵/۰= و شدت بار وارده مقدار  $k N/m^{5} \cdot c = r = r$  در نظر گرفته شده است. مقادیر ابعادی نیز به صورت q = 0، m, a = 0/7 m با است. مقادیر ابعادی نیز به صورت r = r = r میباشند. r = 0/7 m

**A**-**I**- **مسئله یک چهارم حلقه تحت فشار داخلی \mathbf{p} به منظور صحتسنجی روش ارائه شده، مسئله یک چهارم حلقه تحت فشار داخلی مرود بررسی قرار می گیرد. هندسه مسئله با استفاده از توابع نربز مرتبه سه مدل گردیده است. بردارهای گرهی اولیه مسئله به صورت بردارهای گرهی اولیه مسئله با مسئله، شرایط تکیهگاهی و نحوه بارگذاری در شکل ۴ نشان داده شده است. مسئله در دو لبه دارای شرایط تکیهگاهی غلتکی می باشد. پاسخ دقیق تغییرمکان شعاعی مسئله به صورت رابطه (۵۷) می باشد** 

$$u_{r}(r) = \frac{a^{\gamma}qr}{E(b^{\gamma} - a^{\gamma})} \left\{ 1 - \upsilon + \frac{b^{\gamma}}{r^{\gamma}} (1 + \upsilon) \right\}; \quad u_{\phi} = \circ \qquad (\Delta V)$$

نتایج روش پیشنهادی در تعدادی از نقاط دامنه با جواب دقیق در جدول ۱ مقایسه گردیده است که به پاسخ دقیق بسیار نزدیک میباشند. شکل ۵ نحوه توزیع مولفههای مختلف تنش در دامنه برای بارگذاری تحت فشار یکنواخت داخلی را نشان میدهد.

۸-۲- مسئله سطح متقارن تحت بار قائم یکنواخت q در این مثال و مثال بعد، به منظور بهره بردن از قابلیت مدلسازی نرمافزار راینو، مدل اولیه در این نرمافزار ایجاد شده و پس ازبهبودسازی، اطلاعات هندسی شامل مختصات نقاط



جدول ۱– مقايسه نتايج روش ارائه شده با نتايج دقيق مسئله يک چهارم حلقه تحت فشار داخلی.

شعاع نقطه کنترلی (mm)	روش ارائه شده (mm)	مقدار دقیق (mm)	خطا نسبی (٪)
٣٠٠	۰/۷۱۲۵	۰/۷۱۳۰	• / • V •
۳۸۳	•/۶۱٩۴	۰ <i>/۶</i> ۲۰۰	۰/۰ <b>۹</b> ۶
418	৽/۵٩۶٩	۰/۵۹۸۰	۰/۱۸۰
۴۸۳	۰/۵۶۷۱	۰/۵۶۸ <i>۰</i>	۰/ <i>۱۶</i> ۰
۵۰۰	۰/۵۶۲۴	۰/۵۶۳ <i>۰</i>	•/\••



شكل ۵- توزيع تنش در مسئله يک چهارم حلقه تحت فشار يكنواخت داخلي.

کنترلی، وزنها و توابع پایه جهت تحلیل عددی به نرم افزار متلب وارد میشوند. مختصات نقاط کنترلی و وزنهای اولیه در

جدول ۲ بیان گردیده است. هندسه مسئله، بارگذاری و شرایط تکیهگاهی در شکل ۶ نشان داده شده است.

- 1		C		- •				
نقطه كنترلى	Х	Y	w	نقطه كنترلى	х	Y	w	-
١	o / o o o	• / • • •	١	14	•/41V	۰/۱۵۰	١	-
٢	۰/۰۸۳	۰/۰۴۵	١	۱۵	•/\$••	۰/۱۵۰	١	
٣	۰/۲۵۰	• / • <b>٩</b> •	١	18	o / o o o	۰/۲۵۰	١	
۴	۰/۴۱V	۰/۰۴۵	١	١٧	۰/۰۸۳	•/YY •	١	
۵	•/ <b>\</b> 0 • •	• / • • •	١	١٨	۰/۲۵۰	۰/۱۹۰	١	
۶	• / • • •	0/04Q	١	١٩	0/41V	•/YY •	١	
٧	۰/۰۸۳	∘∕∘∧∘	١	۲۰	•/ <b>\</b> 0 • •	۰/۲۵۰	١	
٨	۰/۲۵۰	۰/۱۱۰	١	۲ ۱	• / • • •	۰/٣° ۰	١	
٩	۰/۴۱V	∘∕∘∧∘	١	22	۰/۰۸۳	۰/۲۵۵	١	
١٠	•/ <b>\</b> 0 • •	•/• <b>\</b> •	١	۲۳	۰/۲۵۰	•/Y1 •	١	
11	• / • •	۰/۱۵۰	١	74	0/41V	۰/۲۵۵	١	
١٢	۰/۰۸۳	۰/۱۵۰	١	۲۵	•/\$~ •	۰/٣° ۰	١	
١٣	۰/۲۵۰	۰/۱۵۰	١					

جدول ۲– مختصات نقاط کنترل و وزنهای مسئله سطح متقارن تحت بار قائم یکنواخت.



شکل ۶– مسئله سطح متقارن تحت بار قائم یکنواخت.

مقایسه گردیده است و با توجه به مقدار خطای کم، نشان از دقت بالای نتایج دارد. حداکثر تغییرمکان روش پیشنهادی ۵۹۳۴- میلیمتر و مقدار بدست آمده از نرمافزار آباکوس ۵۹۴۴- میلیمتر میباشد.

همچنین شکل ۷ توزیع مولفههای تنش در دامنه را نشان میدهد. همان طور که در شکل مشاهده می شود بار قائم یکنواخت در لبه بالایی وارد گردیده است. همچنین در دو لبه دارای تکیه گاه مفصلی می باشد. با توجه به این که که جواب دقیق این مسئله در دسترس نیست، نتایج با تحلیل اجزای محدود توسط نرمافزار آباکوس مقایسه شده است. در جدول ۲ تغییر مکان قائم در تعدادی از نقاط دامنه با مقدار بدست آمده از نرمافزار

0.5 55			•
مختصات نقاط (mm)	روش ارائه شده (mm)	مقدار بدست آمده از نرمافزار (mm)	خطا نسبي (٪)
 (117,701)	-•/YVY	- • /¥VV	۲۳۲
(710,734)	$-\circ/\Delta V$ )	$-\circ/\Delta\Lambda\circ$	1/00
(54,740)	- • /۵۵ •	-°/∆∆٩	1/81
(414,791)	-•/YAQ	-•/YA9	١/٤٠
(100.100)	-•/ <b>۵۳</b> ۹	-•/ <b>۵</b> ۴۲	•/۵۵

جدول ٣- مقايسه نتايج روش ارائه شده با نتايج دقيق طبق بارگذاري قائم غيريكنواخت مرز خارجي.



شکل ۷- توزیع تنش در مسئله سطح متقارن تحت بار قائم یکنواخت.

جدول ۴– مختصات نقاط کنترل و وزن های مسئله سطح برش خورده تحت بار قائم غیریکنواخت.

	1		•				
نقطه كنترلى	Х	Y	w	نقطه كنترلى	х	Y	w
١	• <i>/</i> <del>9</del> • •	• / • • •	١	14	۰/۳۰۹	۰/۵۳۳	١
۲	۰/۵۴۰	۰/۱۳۲	١	10	۰/۲۰۰	۰ <i>/۶</i> ۰۰	١
٣	۰/٣٧٢	۰/٣٧٣	١	18	°/۶۸۳	• / • • •	١
۴	۰/۱۳۲	۰/۵۴۱	١	11	0/89V	۰/۱۱۷	١
۵	• / • • •	• <i>/9</i> • •	١	١٨	<ul> <li>\۵\۵</li> </ul>	۰/٣ <i>۴</i> ۴	١
6	۰/۶ <i>\۶</i>	• / • • •	١	١٩	۰/۴۲V	۰/۵۲V	١
V	۰/۵۶۵	৽৾৾৾।۲٩	١	۲۰	۰/۳۳ <i>۴</i>	• <i>/9</i> ••	١
٨	۰/۴۲۵	۰/۳۶V	١	۲۱	°/V°°	• / • • •	١
٩	۰/۱۹۱	۰/۵۳۸	١	۲۲	۰/۶۹۱	۰/۱۱۴	١
١٠	•/• <del>%</del> V	۰ <i>/۶</i> ۰۰	١	۲۳	۰/۶۲V	۰/۳۳۹	١
11	۰ <i>/۶</i> ۵۰	• / • • •	١	74	۰/۴۸۶	•/674	١
١٢	۰/۶ <i>\</i> ۶	۰/۱۲۳	١	47	•/ <b>4</b> • •	۰ <i>/۶</i> ۰۰	١
١٣	•/ <b>\</b> 0 • •	۰/۳۵۶	١				



جدول ۵– مقایسه نتایج روش ارائه شده با نتایج دقیق طبق بارگذاری قائم غیریکنواخت مرز خارجی.

مختصات نقاط(mm)	روش ارائه شده (mm)	مقدار بدست آمده از نرمافزار (mm)	خطا نسبي (٪)
$(\circ \lor \lor)$	-٩/ <b>٢</b> •	-٩/۵٢	١/٢۶
(118.81.0)	$-arphi/\Lambda$ ۴	-۶/ <b>۹</b> ٣	١/٣٠
(199.88.)	$-\Delta/\circ V$	$-\Delta/\Delta$	1/00
(٣٠٠.۶٢١)	-٣/١٢	-٣/٢٣	٣/۴ ۰
(444,441)	-•/ <b>۴</b> ۱	_•/ <b>۴۳</b>	4/80



شکل ۹-توزیع تنش در مسئله سطح برش خورده تحت بار قائم غیریکنواخت.

# ۸-۳- مسئله سطح برش خورده<sup>۳۳</sup> تحت بار قائم غیریکنواخت

در آخرین مثال به منظور بررسی تاثیر حالت بار بر نتایج، مسئله سطح برش خورده تحت بار قائم غیریکنواخت تحلیل می شود. هندسه مسئله با استفاده از توابع نربز مرتبه سه در نرم افزار راینو مدل گردیده است. مختصات نقاط کنترلی و وزنهای اولیه در جدول ۴ آورده شده است. شکل هندسی مسئله، نحوه اعمال بار و شرایط تکیهگاهی در شکل ۸ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود بار غیریکنواخت که تابعی از مختصه طولی می باشد به لبه بالایی وارد گردیده است. همچنین لبه سمت راست داری شرایط تکیهگاهی مفصلی می باشد. مقدار تغییرمکان قائم برای تعدادی از نقاط دامنه در جدول ۵ آمده است و با نتایج نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. نحوه توزیع مولفه های تنش در شکل ۹ نشان داده شده است. حداکثر جابه جایی قائم روش پیشنهادی، ۹/۴ میلی متر و مقدار بدست آمده از نرمافزار آباکوس مقدار ۲۵/۹ میلی متر می باشد.

شکل ۹ توزیع مولفههای مختلف تنش تحت بارگذاری قائم غیریکنواخت را نشان میدهد.

واژەنامە

- 1. Isogeometric
- 2. Finite element method
- 3. Computer-Aided Design (CAD)
- 4. Abaqus
- 5. Bézier extraction
- 6. control points
- 7. Bernstein
- 8. local control

- 9. knot vector
- 10. non-negative
- 11. partition of unity
- 12. knot insertion
- 13. Rhinoceros
- 14. solver

۹- نتيجه گيرې

در پژوهش حاضر، روشی کارآ به منظور اعمال بار گسترده بر

سطوح دارای انحنا در تحلیل همهندسی ارائه گردید. در این

روش با ثابت در نظر گرفتن مختصه پارامتری در مرز بارگذاری

شده، توابع پایه نربز برای هر نقطه انتگرالی بدست می آید. با

محاسبه بردارهای مماسی و قائم در هر نقطه از مرز و با استفاده

از رابطههای ارائه شده برای حالات بارگذاری می توان سهم

نيرو در هر نقطه کنترلي را بدست آورد. همچنين در اين

یژوهش نحوه استفاده از مدلهای ساخته شده در نرم افزار راینو

در تحليل همهندسي تشريح شد. اين موضوع توانايي تحليل

هندسههای پیچیده که امکان مدلسازی آنها به راحتی میسر

نیست را فراهم میکند. به منظور صحت سنجی روش

پیشنهادی سه مثال عددی تحت بارگذاریهای مختلف مورد

بررسی قرار گرفت. حداکثر میزان خطای نسبی تغییرمکان قائم

بدست آمده در قیاس با پاسخ دقیق ۱۸/۰ درصد است.

همچنین، شکل توزیع مولفههای مختلف تنش با نتایج نرمافزار

دارای انطباق کامل می باشد. نتایج عددی بدست آمده دقت بالا

و کارآیی روش پیشنهادی را نشان میدهند.

- 15. plugin
- 16. Bézier decomposition
- 17. strong form
- 18. weak form
- 19. physical
- 20. parametric
- 21. parent
- 22. jacobian
- 23. trimmed surface

1. Hughes, T. J., Cottrell, J. A., and Bazilevs, Y., "Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry And Mesh Refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.  Dimitri, R., De Lorenzis, L., Scott, M. A., Wriggers, P., Taylor, R. L., and Zavarise, G., "Isogeometric Large Deformation Frictionless Contact Using T-Splines", *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, Vol. 269, pp. 394-414, 2014.

مراجع

- Scott, M. A., Simpson, R. N., Evans, J. A., Lipton, S., Bordas, S. P., Hughes, T. J., and Sederberg, T. W., "Isogeometric Boundary Element Analysis Using Unstructured T-Splines", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 254, pp. 197-221, 2013.
- Buffa, A., Sangalli, G., and Vázquez, R., "Isogeometric Analysis for Electromagnetic Problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 46, pp. 3305-3308, 2010.
- 5. Lu, J., "Isogeometric Contact Analysis: Geometric Basis and Formulation for Frictionless Contact", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 200, pp. 726-741, 2011.
- Gomez, H., Hughes, T. J., Nogueira, X., and Calo, V. M., "Isogeometric Analysis of the Isothermal Navier–Stokes–Korteweg Equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 1828-1840, 2010.
- Bazilevs, Y., Calo, V. M., Hughes, T. J., and Zhang, Y., "Isogeometric Fluid-Structure Interaction: Theory, Algorithms, and Computations", *Computational Mechanics*, Vol. 43, pp. 3-27, 2008.
- Bazilevs, Y., Calo, V. M., Zhang, Y., and Hughes, T. J., "Isogeometric Fluid–Structure Interaction Analysis with Applications to Arterial Blood Flow", *Computational Mechanics*, Vol. 38, pp. 310-322, 2006.
- 9. Hirschler, T., Bouclier, R., Duval, A., Elguedj, T., and Morlier, J., "The Embedded Isogeometric Kirchhoff–Love Shell: From Design to Shape Optimization of Non-Conforming Stiffened Multipatch Structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 349, pp. 774-797, 2019.
- Hsu, M. C., Wang, C., Herrema, A. J., Schillinger, D., Ghoshal, A., and Bazilevs, Y., "An Interactive Geometry Modeling and Parametric Design Platform for Isogeometric Analysis", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 70, pp. 1481-1500, 2015.
- 11. Lai, Y., Zhang, Y. J., Liu, L., Wei, X., Fang, E., and Lua, J., "Integrating CAD with Abaqus: a Practical Isogeometric Analysis Software Platform for Industrial Applications", *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 74, pp. 1648-1660, 2017.
- Lai, Y., Liu, L., Zhang, Y. J., Chen, J., Fang, E., and Lua, J., "Rhino "D to Abaqus: A T-Spline Based Isogeometric Analysis Software Framework", *Advances in Computational Fluid-Structure Interaction and Flow Simulation: New Methods and Challenging Computations*, pp. 271-281, 2016.
- Li, M., Chen, Y., Zhang, M., Yang, L., Lian, H., Bordas, S. P., and Kong, R., "Platform for Isogeometric Analysis of Complex Hydraulic

Structures", Automation in Construction, Vol. 152, 2023.

- Meng, X., Zhang, L. Y., Zhao, Z. L., and Xie, Y. M., "A Direct Approach to Achieving Efficient Free-Form Shells with Embedded Geometrical Patterns", *Thin-Walled Structures*, Vol. 185, 2023.
- 15. Yang, F., Yu, T., Liu, Z., and Bui, T.Q., "Isogeometric Double-Objective Shape Optimization of Free-Form Surface Structures with Kirchhoff– Love Shell Theory", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 223, 2023.
- 16. Seo, Y. D., Kim, H. J., and Youn, S. K., "Isogeometric Topology Optimization Using Trimmed Spline Surfaces", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 3270-3296, 2010.
- Bauer, A. M., Breitenberger, M., Philipp, B., Wüchner, R., and Bletzinger, K. U., "Embedded Structural Entities in NURBS-Based Isogeometric Analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, Vol. 325, pp. 198-218, 2017.
- Breitenberger, M., Bletzinger, K. U., and Wüchner, R., "Isogeometric Layout Optimization of Shell Structures Using Trimmed NURBS Surfaces", *Proceedings of World Congress on Structural and Multidisciplinary* Optimization, Orlando, pp. 19-24, 2013.
- Schmidt, R., Wüchner, R., and Bletzinger, K. U., "Isogeometric Analysis of Trimmed NURBS Geometries", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 241, pp. 93-111, 2012.
- 20. Salomon, D., *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer Science & Business Media. 2007.
- Sohel, F. A., Karmakar, G. C., Dooley, L. S., and Arkinstall, J. R., "Quasi-Bezier Curves Integrating Localised Information", *Pattern Recognition*, Vol. 41, pp. 531-554, 2008.
- 22. Farin, G. E., *Curves and Surfaces For CAGD: A Practical Guide*, Elsevier, 2002.
- 23. Borden, M. J., Scott, M. A., Evans, J. A., and Hughes, T. J., "Isogeometric Finite Element Data Structures Based on Bézier Extraction of NURBS", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 87, pp. 15-47, 2011.
- Scott, M. A., Borden, M. J., Verhoosel, C. V., Sederberg, T. W., and Hughes, T. J., "Isogeometric Finite Element Data Structures Based on Bézier Extraction of T-Splines", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 88, pp. 126-156, 2011.
- 25. Vo-Minh, T., Nguyen-Son, L., Nguyen-Van, G., and Thai-Phuong, T., "Upper Bound Limit Analysis of Circular Tunnel in Cohesive-Frictional Soils Using Isogeometric Analysis Based on Bézier Extraction",

*Tunnelling and Underground Space Technology*, 27. Vol. 114, 2021.

- 26. Krishnamoorthy, C. S., *Finite Element Analysis: Theory and Programming*, Tata McGraw-Hill, 1994.
- Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, Vol. 3, McGraw-Hill, New York, 1985.