Journal of Computational Methods in Engineering, 2025, 44(1), 1-19; DOI: 10.47176/jcme.44.1.1040

JOURNAL OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING

Journal of Computational Methods in Engineering

Journal homepage: https://jcme.iut.ac.ir/

ISSN: 2228-7698 EISSN: 2423-5741

Original Article

Nonlinear Vibrations of Functionally Graded Graphene Reinforced Composite Cylindrical Shells Using the Multiple Scale Method

Roham Afshari, Nima Mohandesi and Mostafa Talebitooti*

Department of Mechanical Engineering, Qom University of Technology, Qom, Iran

Abstract: In this research, the nonlinear dynamic behavior of a cylindrical shell reinforced with graphene platelets, examining both uniform and non-uniform distributions of the platelets, is explored. The classical shell theory, complemented by von Karman's nonlinear model for strain-displacement relationships, facilitates the derivation of the governing equations of motion. The mechanical properties of the reinforced shell are ascertained through the Halpin-Tsai micromechanical model and the rule of mixtures. For the transition from partial differential equations to nonlinear ordinary differential equations, the Galerkin method is employed. These resultant equations are subsequently addressed using a multiple scale method. Initial validation of the proposed approach is achieved by comparing the results with the existing literature, and by employing the Runge-Kutta numerical method. Following this validation, the study investigates the impact of various parameters associated with the functionally graded material, such as the number of layers, the distribution patterns of the graphene platelets (including uniform distribution, FG-X, FG-O, and FG-V), and the proportion of these platelets in the composition, all of which significantly influence the nonlinear dynamic behavior of the shell as represented by the response curves for the primary resonance frequency.

Keywords: Nonlinear Vibration, Functionally Graded Graphene Platelets, Multiple Scale Method, Primary Resonance, Hapin-Tsai Model.

Received: Oct. 26, 2024; Revised: Jan. 12, 2025; Accepted: Jan. 12, 2025; Published Online: June 23, 2025.

* Corresponding Author: talebi@qut.ac.ir

How to Cite: Afshari Roham, Mohandesi Nima and Talebitooti Mostafa, Nonlinear Vibrations of Functionally Graded Graphene Reinforced Composite Cylindrical Shells Using the Multiple Scale Method, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 44(1), 1-19; DOI: 10.47176/jcme.44.1.1040.

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۴، شماره ۱، ۱۴۰۴، ص. ۱۹-۱، DOI: 10.47176/jcme.44.1.1040

نشریه علمی ـ پژوهشی روش‌های عددی در مهندسی

نشریه روش‌های عددی در مهندسی

صفحه خانگی نشریه: https://jcme.iut.ac.ir/

شاپا: ۷۶۹۸-۲۲۲۸ شاپا الکترونیکی: ۵۷۴۱-۲۴۲۳

مقاله پژوهشی

ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده به صورت مدرج تابعی با ورقک‌های گرافنی به کمک روش مقیاس چندگانه

رهام افشاری، نیما مهندسی و مصطفی طالبی توتی*

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران

چکیده– در این پژوهش، رفتار دینامیک غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده با ورقک‌های گرافنی دارای توزیع یکنواخت و غیریکنواخت مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک و بهره‌گیری از مدل غیرخطی فون کارمن در روابط کرنش-جابه‌جایی، ابتدا معادلات حرکت حاکم استخراج شده و خواص مکانیکی پوسته‌ی تقویت‌شده نیز با استفاده از مدل میکرومکانیک هالپین-تسای و قانون اختلاط تعیین می‌شود. سپس معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم، به کمک روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل شده و در ادامه، این معادلات با روش اغتشاشی مقیاس چندگانه حل می‌گردد. به‌منظور صحت‌سنجی، نتایج به‌دست‌آمده با داده‌های موجود در مراجع و همچنین روش عددی رانگ-کوتا مقایسه می‌شود. در پایان، تأثیر پارامترهای مختلف ماده‌ی هدفمند نظیر تعداد لایه‌ها، الگوهای توزیع ورقک‌های گرافن شامل UD، FG-X، FG-O و FG-V و نیز درصد وزنی این ورقک‌ها بر رفتار دینامیک غیرخطی پوسته، در قالب منحنی پاسخ فرکانسی برای تشدید اولیه، بررسی می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات غیرخطی، ماده هدفمند FG-GPL، روش مقیاس چندگانه، روزناس اولیه، مدل هالپین-تسای.

دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۸/۰۵، بازنگری: ۱۴۰۳/۱۰/۲۳، پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۲۳، اولین انتشار: ۱۴۰۴/۰۴/۰۲

*: نویسنده مسئول، رایانامه: talebi@qut.ac.ir

فهرست علائم

a_{GPL}	طول ورقکهای گرافن	t_{GPL}	ضخامت ورقکهای گرافن
b_{GPL}	پهنای ورقکهای گرافن	U	انرژی پتانسیل
E	مدول یانگ	u_i	میدان جابه‌جایی
h	ضخامت استوانه	W	کار نیروی خارجی
K	انرژی جنبشی	W_{GPL}	جرم کسر ورقکها
L	طول استوانه	ε^0	کرنش
m	نیم موج طولی	k	انحنای سطح میانی
n	نیم موج عرضی	ν	نسبت پواسون
q	بار گسترده	ζ	ضریب میرایی
R	شعاع استوانه	ρ	چگالی
R_1 و R_2	شعاع‌های انحنای پوسته‌ی دو انحنایی	ω	فرکانس طبیعی

۱. مقدمه

به دلیل ویژگی‌های بالقوه‌ی مکانیکی، حرارتی و الکتریکیِ نانوذرات گرافن، این ذرات به‌عنوان تقویت‌کننده‌ی مواد کامپوزیتی به‌صورت تک‌لایه و چندلایه در صنایع مختلفی نظیر هوافضا، خودرو، پزشکی و عمران به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. خواص نانوذرات گرافن به روش ساخت، کسر حجمی و نحوه‌ی پراکندگی آن‌ها در زمینه کامپوزیتی وابسته است و به‌کارگیری این ذرات می‌تواند استحکام سازه‌هایی همچون پوسته‌ها و ورق‌ها را تا حد قابل‌توجهی افزایش دهد. ازاین‌رو، مطالعات متعددی به بررسی رفتار دینامیکی (خطی و غیرخطی) سازه‌های گوناگونِ تقویت‌شده با ذرات گرافن پرداخته‌اند. همچنین بخشی از پژوهش‌ها بر رفتار ارتعاشی سازه‌های کامپوزیتی مدرج تابعی (FG) تقویت‌شده با ورقک‌های گرافن متمرکز است؛ این مواد به‌واسطه‌ی خواص مکانیکی برتر و قابلیت‌های طراحی ویژه، به‌عنوان اجزای سازه‌ای پیشرفته در نظر گرفته می‌شوند [۱، ۲و ۳]. عارفی و همکاران [۴] یک پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده با نانوذرات گرافن را تحت بار حرارتی– مکانیکی بررسی کردند. در این پژوهش، خواص مکانیکی ماده‌ی هدفمند با استفاده از مدل هالپین–تسای و قانون اختلاط به دست آمد و معادلات حاکم نیز با درنظرگرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استخراج شد. نتایج نشان داد که در توزیع FG-O بیشترین مقادیر تنش و در توزیع FG-X کمترین مقادیر تنش رخ می‌دهد، و همچنین در توزیع UD جابه‌جایی شعاعی بیشترین مقدار را داراست. وان‌دو و لی[۵] معادلات حاکم بر ارتعاشات خطی و خمش یک پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده با ذرات گرافن را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج و سپس با روش تحلیل هم‌هندسی[۱] به حل دینامیکی و استاتیکی مسئله پرداختند. وانگ و همکاران [۶] کمانش یک پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده با ذرات گرافن را با استفاده از روش اجزای محدود بررسی کردند و تأثیر کسر

حجمی ماده‌ی هدفمند، تعداد لایه‌ها و توزیع گرافن بر رفتار کمانش پوسته را مورد مطالعه قرار دادند. کیانی و همکاران [۷] رفتار ارتعاشی پوسته‌ی استوانه‌ای هدفمند تقویت‌شده با ذرات گرافن را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش، خواص مکانیکی ماده به کمک مدل هالپین–تسای و قانون اختلاط تعیین شد و سپس با به‌کارگیری روش بسط فوریه و حل مسئله‌ی مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی پوسته به دست آمد. نگوین و همکاران [۸] ارتعاشات یک پوسته‌ی قیفی‌شکل تقویت‌شده با ذرات گرافن را با استفاده از تئوری کلاسیک دانل[۲] و روش گالرکین بررسی کردند. همچنین، بابایی و همکاران [۹] ارتعاشات پوسته‌ی متصل مخروط–استوانه–مخروطِ کامپوزیتی تقویت‌شده را با استفاده از مدل هالپین–تسای و قانون اختلاط تحلیل کرده و سپس با روش ریلی–ریتز[۳]، مقادیر فرکانس طبیعی و پاسخ زمانی تحت بار ضربه را محاسبه کردند. از سوی دیگر، جوانی و همکاران [۱۰] رفتار دینامیک خطی یک ورقِ تاشده‌ی تقویت‌شده با ذرات گرافن را، با درنظرگرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم‌یافته، مورد مطالعه قرار دادند. میرزایی و عباسی [۱۱] رفتار دینامیکی یک پنل استوانه‌ای تقویت‌شده با ذرات گرافن را، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و رابطه‌ی کرنش–جابه‌جایی دانل، استخراج کرده و سپس با به‌کارگیری روش ریتز و چندجمله‌ای‌های چبیشف[۴]، معادلات را گسسته نمودند. در پژوهش دیگری، ژو و همکاران [۱۲] پاسخ ارتعاش آزاد پنل استوانه‌ای چندلایه‌ی کامپوزیتیِ تقویت‌شده با نانوورقک‌های گرافن توزیع شده به صورت مدرج تابعی را، با تکیه بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، اصل همیلتون[۵] و روش اجزای محدود مورد مطالعه قرار دادند. قاسمی و همکاران[۱۳] نیز ارتعاشات آزاد یک پوسته‌ی مخروطی کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوذرات کربنی و گرافنی را، با تکیه بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روش تفاضل مربعات، مورد بررسی قرار دادند.

میرزایی و ربیعی [۱۴] در پژوهشی دیگر، به تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری یک پنل مخروطی کامپوزیتی تقویت‌شده با ذرات گرافنی پرداختند و اثر تخلخل‌های یکنواخت و غیریکنواخت را نیز مدنظر قرار دادند. هانگ و همکاران [۱۵] یک ورق دایروی سوراخ‌دارِ تقویت‌شده با ذرات گرافن را، که لایه‌ی میانی آن از گرافن و لایه‌های رویی و زیرین آن فلزی هستند، با تئوری کیرشهف[۶] و روش لاگرانژ[۷] تحلیل کرده و تأثیر خواص مکانیکی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. همچنین، جمال‌آبادی و همکاران [۱۶] ارتعاشات آزاد غیرخطی یک پنل مخروطی کامپوزیتیِ تقویت‌شده با ذرات گرافن را بررسی کرده و تأثیر قرارگیری پنل بر بستر الاستیک را نیز مدنظر قرار دادند. در این زمینه، خیاط و همکاران [۱۷] رفتار دینامیک غیرخطی یک پوسته‌ی استوانه‌ای متخلخلِ پرشده با سیال و تقویت‌شده با ذرات گرافن را با استفاده از روش‌های نیومارک[۸] و نیوتن–رافسون[۹] تحلیل کردند همچنین جوانی و همکاران [۱۸] ارتعاشات آزاد غیرخطی یک ورق دایرویِ تقویت‌شده با گرافن را بر بستر الاستیک مورد مطالعه قرار دادند. شن و همکاران [۱۹] رفتار دینامیکی غیرخطی یک ورق کامپوزیتی تقویت‌شده با گرافن را در محیط حرارتی و روی یک بستر الاستیک بررسی کردند و معادلات حاکم را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و فرضیات غیرخطی فون کارمن[۱۰] استخراج نمودند. یان نیو و همکاران [۲۰] ارتعاشات غیرخطی پنل‌های استوانه‌ایِ تقویت‌شده با گرافن را، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و فرضیات فون کارمن بررسی کردند و با روش نویر، مقادیر فرکانس طبیعی را محاسبه نمودند. کاظمی و همکاران [۲۱] نیز رفتار دینامیک غیرخطی یک پوسته‌ی گرافنی همراه با ترموالاستیسیته را بررسی کرده و تأثیر کسر حجمی ورقک‌های گرافن بر پاسخ پوسته را نشان دادند. صبوری و قدیری [۲۲] پایداری و ارتعاشات غیرخطی یک پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده با ذرات گرافنی را در حالت تحریک پارامتریک بررسی کردند و با استفاده از روش مقیاس چندگانه،

دامنه‌های ناپایداری و پاسخ پوسته را تعیین نمودند. چو [۲۳] نیز ارتعاشات آزاد غیرخطی یک پوسته‌ی مخروطی گرافنی را بر بستر الاستیک بررسی کرد و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، معادلات حاکم را گسسته نمود.

در مجموع، با مرور پژوهش‌های انجام‌شده می‌توان دریافت که بررسی رفتار دینامیک غیرخطی پوسته‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با ورقک‌های گرافن کمتر مورد توجه قرار گرفته است و تأثیر توزیع غیریکنواخت این ورقک‌ها بر ارتعاش غیرخطی پوسته همچنان موضوعی مغفول مانده است. بر این اساس، در پژوهش حاضر، برای اولین بار رفتار دینامیک غیرخطی یک پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده با ذرات گرافن به‌صورت غیریکنواخت مورد بررسی قرار خواهد گرفت. ابتدا، معادلات حاکم با درنظرگرفتن تئوری کلاسیک دانل، فرضیات غیرخطی فون‌کارمن و اعمال اصل همیلتون استخراج خواهد شد. سپس، خواص مکانیکی ماده‌ی هدفمند با استفاده از مدل هالپین—تسای و قانون اختلاط تعیین می‌شود و با حذف اینرسی‌های درون‌صفحه‌ای و اعمال معادله‌ی تابع تنش آیری[۱۱]، معادلات ساده‌سازی خواهد شد. به قصد حل، معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم، با روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و به کمک روش مقیاس چندگانه، پاسخ غیرخطی پوسته تحلیل می‌شود. این روش کمک می‌کند تا بتوان به پاسخ بسته‌ای برای ارتباط بین دامنه نوسان، فرکانس و بزرگی نیروی تحریک دست یافت. در ادامه، اعتبارسنجی فرکانس طبیعی پوسته‌ی هدفمند تقویت‌شده انجام خواهد شد و سرانجام، رفتار دینامیک غیرخطی سازه تحت تأثیر الگوهای گوناگون پراکندگی ورقک‌های گرافنی، مقادیر مختلف کسر حجمی و تعداد لایه‌های گرافن بررسی می‌گردد.

۲. استخراج معادلات حاکم

نمای کلی یک پوسته‌ی استوانه‌ای به شعاع R، ضخامت h و طول L همراه با دستگاه مختصات استوانه‌ای (x,θ,z) در سطح میانی در شکل (۱–الف) ارائه شده است. u، v و w به ترتیب جابه‌جایی پوسته در جهات x، θ و z است. پوسته مذکور تحت یک بار خارجی گسترده q در راستای z قرار گرفته است.

مقادیر کرنش برای حالت کلی پوسته‌ی دو انحنایی مطابق شکل (۲)، به صورت رابطه (۱) بیان خواهد شد که در آن ζ بیانگر راستای عرضی، R_1 و R_2 شعاع‌های انحنای پوسته‌ی دو انحنایی است [۲۴].

$$\varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{u_i}{A_i}\right) + \frac{1}{A_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{A_k}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k} y + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{u_i}{A_i}\right) + \frac{1}{A_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{A_k}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k}\right]^2 + \frac{1}{2{A_i}^2}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} - \frac{u_i}{A_k}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k}\right)^2$$

$$\gamma_{ij} = \frac{A_i}{A_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{u_i}{A_i}\right) + \frac{A_j}{A_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{u_j}{A_j}\right) + \sum_{k\neq i,k\neq j}^{3}\frac{1}{A_iA_j}\left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} - \frac{u_i}{A_k}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} - \frac{u_j}{A_k}\frac{\partial A_j}{\partial \xi_k}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} - \frac{u_j}{A_i}\frac{\partial A_j}{\partial \xi_i}\right)\left[\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{u_i}{A_i}\right) + \frac{1}{A_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{A_k}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_k}\right] + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} - \frac{u_i}{A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_j}\right)\left[\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{u_j}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{A_k}\frac{\partial A_j}{\partial \xi_k}\right] \quad (۱)$$

در رابطه (۱)، u_i بیانگر میدان جابجایی و A_i پارامتری لامه پوسته دو انحنایی هستند که مطابق رابطه (۲) و (۳) بیان خواهند شد.

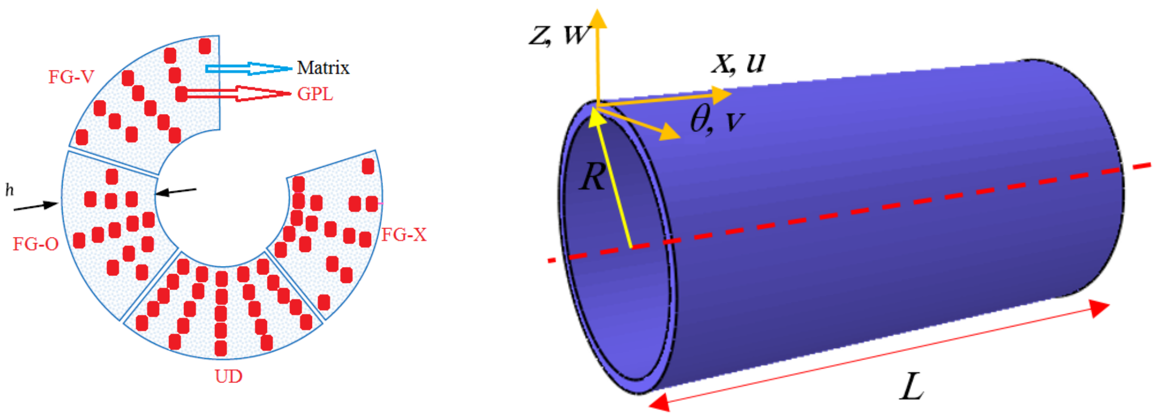
$$\begin{aligned} u_1 &= u(x,\theta,t) + z\varphi_1(x,\theta,t) \\ u_2 &= v(x,\theta,t) + z\varphi_2(x,\theta,t) \\ u_3 &= w(x,\theta,t) \end{aligned} \quad (۲)$$

$$A_1 = a_1\left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right), A_2 = a_2\left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right), A_3 = a_3 = 1 \quad (۳)$$

در این پژوهش، با در نظرگرفتن تئوری کلاسیک پوسته‌ها به مطالعه رفتار دینامیک غیرخطی پوسته استوانه‌ای پرداخته می‌شود. بنابراین مقادیر پارامتر لامه و شعاع انحنای R_i برای سطح میانی پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شوند.

$$R_1 = \infty, R_2 = R, a_1 = 1, a_2 = R \quad (۴)$$

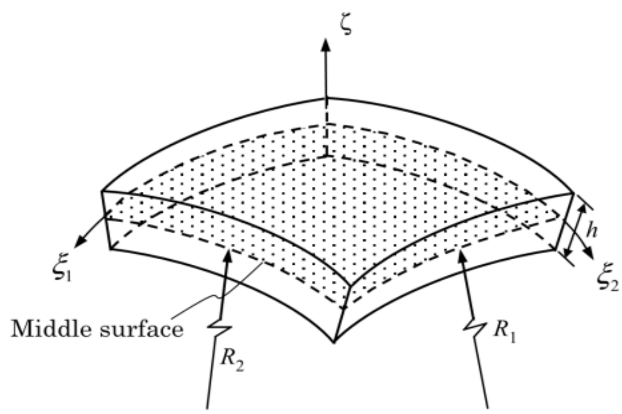
با جای‌گذاری روابط (۲) تا (۴) در رابطه‌ی (۱) و با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک و فرضیات غیرخطی فون‌کارمن، می‌توان مقادیر کرنش یک پوسته‌ی استوانه‌ای را مطابق روابط (۵) بازنویسی کرد. شایان ذکر است که روابط کلی



ب

الف

شکل ۱. الف) نمای کلی یک پوسته‌ی استوانه‌ای با مختصات استوانه‌ای (x,θ,z)، ب) انواع مختلف توزیع ورقک‌های گرافن



شکل ۲. نمای کلی از پوسته دو انحنایی و پارامترهای هندسی آن [۲۴]

کرنش–جابجایی در پوسته‌های استوانه‌ای نازک، به‌عنوان نمونه در مرجع [۲۷]، نیز ارائه شده است.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{z}{R}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{z}{R}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \\
\varepsilon_3 &= 0 \\
\varepsilon_4 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} + z\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) \\
\varepsilon_5 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_1 \\
\varepsilon_6 &= \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \varphi_2
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

با توجه به اینکه در تئوری کلاسیک پوسته، مقادیر ε_5 , ε_6 صفر خواهند بود بنابراین رابطه (۶) [۲۷] به دست خواهد آمد.

$$
\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \varphi_2 = -\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} \qquad (۶)
$$

همچنین می‌توان روابط کرنش را به صورت رابطه (۷) بازنویسی کرد که در آن اندیس ε^0 و κ به ترتیب بیانگر کرنش

و انحنای سطح میانی هستند و مطابق رابطه (۸) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{0} + z\kappa_{xx}\\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^{0} + z\kappa_{\theta\theta}\\ \gamma_{x\theta} &= \varepsilon_{x\theta}^{0} + z\kappa_{x\theta}\end{aligned} \tag{۷}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{0} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\ \varepsilon_{\theta\theta}^{0} &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\\ \varepsilon_{x\theta}^{0} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta}\\ \kappa_{xx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \kappa_{\theta\theta} &= -\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\\ \kappa_{x\theta} &= -\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta\,\partial x}\end{aligned} \tag{۸}$$

رابطه ساختاری بین تنش و کرنش برای لایه eام ماده هدفمند به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \tau_{x\theta}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{x\theta}\end{Bmatrix} \tag{۹}$$

که مقادیر مولفه‌های ماتریس ساختاری طبق رابطه (۱۰) بیان می‌شوند.

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\quad,\quad Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\quad,\quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}\quad,\quad Q_{66} = G_{12} \tag{۱۰}$$

مقادیر نسبت پواسون ν^e و چگالی ρ^e در لایه eام به صورت رابطه (۱۱) [7] تعریف شده است.

$$\rho^e = \rho_m V_m^e + \rho_{GPL} V_{GPL}^e\quad,\quad \nu^e = \nu_m V_m^e + \nu_{GPL} V_{GPL}^e \tag{۱۱}$$

لازم به ذکر است که پایین‌نویس m معرف زمینه و پایین‌نویس GPL نشان دهنده ورقک‌های گرافنی است. همچنین بالانویس e بیانگر شماره لایه است. V_{GPL} و V_m به ترتیب نشان‌دهنده کسر حجمی گرافن و زمینه است و رابطه آن‌ها مطابق رابطه (۱۲) خواهد بود.

$$V_m^e + V_{GPL}^e = 1 \tag{۱۲}$$

همچنین کسر حجمی ورقک‌های گرافن در هر لایه به صورت رابطه (۱۳) محاسبه می‌گردد که W_{GPL}^e معرف کسر جرمی ورقک‌ها در هر لایه است.

$$V_{GPL}^{*} = \frac{W_{GPL}^e}{W_{GPL}^e + (1 - W_{GPL}^e)\left(\rho_{GPL}/\rho_m\right)} \tag{۱۳}$$

روش محاسبه کسر جرمی به صورت زیر خواهد بود که بسته به نوع توزیع این ورقک‌ها در زمینه، فرمول محاسبه آن تغییر خواهد کرد. انواع توزیع ورقک‌ها به صورت زیر هستند که در شکل (۱–ب) نشان داده شده است.

- UD : کسر جرمی GPLsها در تمام لایه‌ها برابر است.
- O : صفحه میانی پوسته غنی از GPLsها است.
- X : سطوح داخلی و خارجی پوسته غنی از GPLsها است.
- V : سطح داخلی پوسته غنی از GPLsها است و سطح خارجی پوسته فقط شامل زمینه است.

بنابراین کسر جرمی برای توزیع‌های مختلف مطابق رابطه (۱۴) خواهد بود. شایان ذکر است که در رابطه بیان شده، e بیانگر لایه مد نظر است و V_{GPL}^{*} کسر حجمی ورقک‌های گرافن را در کل مقطع پوسته نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned}&UD_{type}:\quad V_{GPL}^e = V_{GPL}^{*};\\ &FG-X_{type}:\quad V_{GPL}^e = 2V_{GPL}^{*}\frac{|2e - N_L - 1|}{N_L}\\ &FG-O_{type}:\quad V_{GPL}^e = 2V_{GPL}^{*}\left(1 - \frac{|2e - N_L - 1|}{N_L}\right)\\ &FG-V_{type}:\quad V_{GPL}^e = V_{GPL}^{*}\left(1 - \frac{2e-1}{N_L}\right)\end{aligned} \tag{۱۴}$$

همچنین مدول یانگ E^e در هر لایه به صورت زیر بیان خواهد شد.

$$E^e = E_m\left(\frac{3}{8}\frac{1+\xi_L\eta_L V_{GPL}^e}{1+\eta_L V_{GPL}^e} + \frac{5}{8}\frac{1+\xi_T\eta_T V_{GPL}^e}{1+\eta_T V_{GPL}^e}\right);\quad e = 1,2,3,\dots,N_L \tag{۱۵}$$

که ثوابت رابطه (۱۵) در رابطه (۱۶) تعریف شده است. بر همین اساس a_{GPL}، b_{GPL} و t_{GPL} به ترتیب بیانگر طول، پهنا و ضخامت ورقک‌های گرافن خواهد بود.

$$\xi_L = 2\left(\frac{a_{GPL}}{t_{GPL}}\right),\quad \xi_T = 2\left(\frac{b_{GPL}}{t_{GPL}}\right),\quad \eta_L = \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m}\right)-\xi_L},\quad \eta_T = \frac{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_{GPL}}{E_m}\right)-\xi_T} \tag{۱۶}$$

برای استخراج معادلات حاکم از اصل همیلتون از رابطه (۱۷) استفاده خواهد شد که در آن K بیانگر انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل و W کار نیروی خارجی است.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W)\, dt = 0 \tag{۱۷}$$

بنابراین انرژی جنبشی پوسته‌ی استوانه‌ای مطابق رابطه (۱۸) خواهد بود.

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} K\, dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2}\rho(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)dV\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2}\rho(2\dot{u}\delta\dot{u} + 2\dot{v}\delta\dot{v} + 2\dot{w}\delta\dot{w})dV\, dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\int_0^{2\pi} I(\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w)dA\, dt\end{aligned} \tag{۱۸}$$

شایان ذکر است که I (انرژی پتانسیل پوسته‌ی استوانه‌ای و کار نیروی ناپایستار خارجی) در روابط (۱۹) تا (۲۱) تعریف شده است.

$$I = \sum_{k=1}^{N_L}\int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} dz \tag{۱۹}$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} U\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{x\theta}\gamma_{x\theta})dV\, dt \tag{۲۰}$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} W\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\int_0^{2\pi} q(x,\theta,t)\delta w\ dA\, dt \tag{۲۱}$$

در نتیجه معادلات حاکم پوسته استوانه‌ای تحت یک بار گسترده q(t) به صورت روابط (۲۲) تا (۲۴) تعریف می‌شوند [۲۵].

$$\frac{\partial}{\partial x}(N_{xx}) + \frac{\partial}{R\,\partial\theta}(N_{x\theta}) = I\ddot{u} + c_d I\dot{u} \tag{۲۲}$$

$$\frac{\partial}{R\,\partial\theta}(N_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial x}(N_{x\theta}) = I\ddot{v} + c_d I\dot{v} \tag{۲۳}$$

$$\begin{aligned}N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{\theta\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial\theta^2} \\ + \frac{2}{R}\left(N_{x\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta} + \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x\,\partial\theta}\right) \\ + \frac{N_{\theta\theta}}{R} + q(t) = I\ddot{w} + I\rho_t\dot{w}\end{aligned} \tag{۲۴}$$

که در آن منتجه‌های نیرویی و ممانی مطابق روابط (۲۵) و (۲۶) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix}N_{xx}\\N_{\theta\theta}\\N_{x\theta}\end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^{N_L}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{\theta\theta}\\\tau_{x\theta}\end{pmatrix}dz \\ &= \sum_{k=1}^{N_L}\int_{h_{k-1}}^{h_k}[Q]_k\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}^0\\\varepsilon_{\theta\theta}^0\\\varepsilon_{x\theta}^0\end{pmatrix}dz \\ &+ \sum_{k=1}^{N_L}\int_{h_{k-1}}^{h_k}[Q]_k\begin{pmatrix}\kappa_{xx}\\\kappa_{\theta\theta}\\\kappa_{x\theta}\end{pmatrix}zdz\end{aligned} \tag{۲۵}$$

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix}M_{xx}\\M_{\theta\theta}\\M_{x\theta}\end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^{N_L}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{\theta\theta}\\\tau_{x\theta}\end{pmatrix}zdz \\ &= \sum_{k=1}^{N_L}\int_{h_{k-1}}^{h_k}[Q]_k\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}^0\\\varepsilon_{\theta\theta}^0\\\varepsilon_{x\theta}^0\end{pmatrix}zdz \\ &+ \sum_{k=1}^{N_L}\int_{h_{k-1}}^{h_k}[Q]_k\begin{pmatrix}\kappa_{xx}\\\kappa_{\theta\theta}\\\kappa_{x\theta}\end{pmatrix}z^2dz\end{aligned} \tag{۲۶}$$

که می‌توان منتجه‌های نیرویی و ممانی را به صورت رابطه (۲۷) بازنویسی کرد.

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \end{pmatrix} \quad (۲۷)$$

در این میان، مؤلفه‌های ثابت موجود در رابطه‌ی (۲۷)، طبق رابطه‌ی (۲۸) تعریف می‌شوند.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_L} Q_{ij}^{(k)}(h_k - h_{k-1})\,; \quad B_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_L} Q_{ij}^{(k)}\left(h_k^{\,2} - h_{k-1}^{\,2}\right); \quad D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N_L} Q_{ij}^{(k)}\left(h_k^{\,3} - h_{k-1}^{\,3}\right) \quad (۲۸)$$

باتوجه به آنکه حرکت راستای شعاعی حرکت غالب سیستم است بنابراین با دقت قابل قبولی می‌توان فرض کرد که $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ خواهد بود. با جایگذاری این فرضیه در معادلات (۲۲) و (۲۳) می‌توان تابع تنش آیری را مطابق رابطه (۲۹) تعریف نمود.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F(x,\theta)}{\partial \theta^2}\,; \ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F(x,\theta)}{\partial x^2}\,; \ \sigma_{x\theta} = -\frac{\partial^2 F(x,\theta)}{\partial x\,\partial\theta} \quad (۲۹)$$

حال با استفاده از جبر ماتریسی معادله (۳۰) را می‌توان از رابطه (۲۷) بدست آورد. به طوریکه $C^* =$ و $D^* = D - BA^{-1}B$ BA^{-1} ، $B^* = -A^{-1}B$ ، $A^* = A^{-1}$ برقرار است.

$$\{\varepsilon\} = A^*\{N\} + B^*\{\kappa\} \ , \ \{M\} = C^*\{N\} + D^*\{\kappa\} \quad (۳۰)$$

بنابراین با بازنویسی رابطه (۳۰) کرنش‌های سطح میانی به صورت رابطه (۳۱) خواهند بود:

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{A_{22}N_{xx} - A_{12}N_{\theta\theta} - A_{22}(B_{11}\kappa_{xx} + B_{12}\kappa_{\theta\theta}) + A_{12}(B_{12}\kappa_{xx} + B_{22}\kappa_{\theta\theta})}{A_{11}^2 - A_{12}^2} \quad (۳۱)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{A_{12}N_{xx} - A_{11}N_{\theta\theta} - A_{12}(B_{11}\kappa_{xx} + B_{12}\kappa_{\theta\theta}) + A_{11}(B_{12}\kappa_{xx} + B_{22}\kappa_{\theta\theta})}{A_{11}^2 - A_{12}^2}$$

$$\varepsilon_{x\theta}^0 = \frac{N_{x\theta} - B_{66}\kappa_{x\theta}}{A_{66}}$$

همچنین رابطه بین تنش و منتجه‌های نیرویی به صورت رابطه (۳۲) برقرار است.

$$\sigma_x h = N_{xx}\,; \ \sigma_\theta h = N_{\theta\theta}\,; \ \tau_{x\theta} h = N_{x\theta} \quad (۳۲)$$

پس می‌توان منتجه‌های N_{xx} ، $N_{\theta\theta}$ ، $N_{x\theta}$ را با کمک رابطه (۳۲) بر حسب توابع تنش آیری که در معادله (۲۹) معرفی شده است، مطابق رابطه (۳۳) بدست آورد.

$$N_{xx} = h\frac{\partial^2 F(x,\theta)}{\partial\theta^2}\,; \ N_{\theta\theta} = h\frac{\partial^2 F(x,\theta)}{\partial x^2}\,; \ N_{x\theta} = -h\frac{\partial^2 F(x,\theta)}{\partial x\,\partial\theta} \quad (۳۳)$$

همچنین با توجه به رابطه (۲۷) و (۳۰)، منتجه‌های ممانی به صورت رابطه (۳۴) تعریف خواهند شد.

$$\begin{aligned} M_{xx} &= B_{11}\varepsilon_{xx}^0 + B_{12}\varepsilon_{\theta\theta}^0 + D_{11}\kappa_{xx} + D_{12}\kappa_{\theta\theta} \\ M_{\theta\theta} &= B_{12}\varepsilon_{xx}^0 + B_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^0 + D_{12}\kappa_{xx} + D_{22}\kappa_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} &= B_{66}\varepsilon_{x\theta}^0 + D_{66}\kappa_{x\theta} \end{aligned} \quad (۳۴)$$

با توجه به فرض ساده‌سازی و استفاده از توابع تنش آیری، لازم است تا یک معادله سازگاری نوشته شود. بنابراین با دوبار مشتق‌گیری نسبت به x و θ از کرنش‌های $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{\theta\theta}^0$ و $\varepsilon_{x\theta}^0$ (معادله (۸))، می‌توان معادله غیرخطی تعادلی سازگاری سینماتیکی را به صورت زیر بدست آورد[۲۸].

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^0}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}^0}{\partial x^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varepsilon_{x\theta}^0}{\partial x\,\partial\theta} = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۳۵)$$

بنابراین، با استفاده از معادلات (۲۴) و (۳۵)، رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این راستا، مقادیر کرنش‌های سطح میانی از رابطه‌ی (۳۱)، و منتجه‌های نیرو و ممان، به‌ترتیب از روابط (۳۳) و (۳۴) تعیین می‌شوند.

۳. گسسته سازی معادلات حاکم

در این پژوهش شرایط مرزی به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب، توابع پاسخ w و F به صورت زیر تعریف خواهند شد، در این معادلات، m و n به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی نیم‌موج طولی و شماره‌ی نیم‌موج محیطی پوسته‌ی استوانه‌ای هستند.

$$w(x,\theta,t) = W_{mn}(t)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin(n\theta) \tag{۳۶}$$

$$F(x,\theta,t) = F_1\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + F_2\cos(2n\theta) + F_3\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin(n\theta) \tag{۳۷}$$

به همین منظور ابتدا لازم است تا روابط (۳۶) و (۳۷) در رابطه (۳۵) جایگذاری شود و سپس به کمک روش گلرکین[۱۲] ضرایب F_1، F_2 و F_3 برحسب W(t) بدست آورده شود. سپس با جایگذاری روابط در معادله (۲۴) و اعمال روش گلرکین، معادله حاکم مطابق رابطه (۳۸) گسسته خواهد شد.

$$\rho_t\ddot{W}_{mn} + c_d\rho_t\dot{W}_{mn} + K_1W_{mn} + K_2W_{mn}^3 - P\cos(\omega t) = 0 \tag{۳۸}$$

همچنین می‌توان معادله (۳۸) را به صورت رابطه (۳۹) نیز بازنوسی کرد که در آن $\mu = 2\zeta\omega$ و ζ بیانگر نسبت میرایی و ω فرکانس طبیعی است.

$$\ddot{W}_{mn} + \mu\dot{W}_{mn} + \omega^2W_{mn} + K_{NL}W_{mn}^3 - \overline{P}\cos(\omega t) = 0 \tag{۳۹}$$

۴. روش حل

برای بدست آوردن پاسخ معادله دیفرانسیل غیرخطی (۳۹) از روش مقیاس چندگانه استفاده خواهد شد. از این رو با درنظر گرفتن پارامتر ε برای میرایی، نیروی خارجی و ترم غیرخطی، آنگاه رابطه (۳۹) به فرم رابطه (۴۰) تبدیل خواهد شد.

$$\ddot{W}_{mn} + \omega^2W_{mn} = -\varepsilon\mu\dot{W}_{mn} - \varepsilon K_{NL}W_{mn}^3 + \varepsilon\overline{P}\cos(\omega t) \tag{۴۰}$$

مقیاس زمانی و جابجایی نیز به ترتیب در روابط (۴۱) و (۴۲) ذکر شده است.

$$T_0 = t\,,T_1 = \varepsilon t \tag{۴۱}$$

$$W(T_0,T_1) = W_1(T_0,T_1) + \varepsilon^2W_2(T_0,T_1) \tag{۴۲}$$

با توجه به رابطه (۴۱)، مشتقات زمانی اول و دوم به ترتیب مطابق رابطه (۴۳) و (۴۴) بازنویسی خواهند شد.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} = D_0 + \varepsilon D_1 \tag{۴۳}$$

$$W\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}\right) = \frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_0\,\partial T_1} + \frac{\partial^2}{\partial {T_1}^2} = {D_0}^2 + 2\varepsilon D_0D_1 + {D_1}^2 \tag{۴۴}$$

با جایگذاری روابط (۴۱) الی (۴۴) در رابطه (۴۰) و سپس جداسازی معادلات دیفرانسیل با توجه به ضرایب ε_0 و ε_1، روابط زیر حاصل خواهد شد.

$$\varepsilon^0 \rightarrow {D_0}^2W_1 + \omega^2W_1 = 0 \tag{۴۵}$$

$$\varepsilon^1 \rightarrow {D_0}^2W_2 + \omega^2W_2 = -2D_0D_1W_1 - \mu D_0W_1 - K_{NL}{W_1}^3 + \overline{P}\cos(\Omega T_0) \tag{۴۶}$$

پاسخ معادله دیفرانسیل رابطه (۴۵) مطابق رابطه (۴۷) خواهد بود که در آن منظور از ترم cc، ترم مزدوج مختلط روابط قبلی آن است.

$$W_1(T_0,T_1) = A(T_1)e^{I\omega T_0} + cc \tag{۴۷}$$

که در آن دامنه $A(T_1)$ به صورت رابطه (۴۸) تعریف می‌شود.

$$A(T_1) = \frac{1}{2}\alpha(T_1)e^{i\beta(T_1)} \tag{۴۸}$$

همچنین فرکانس نیروی خارجی با در نظر گرفتن پارامتر تنظیم‌کننده σ به صورت $\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$ بیان می‌شود. حال با جایگذاری آن در ترم هارمونیک نیروی خارجی، $\cos(\Omega T_0)$، می‌توان معادله (۴۹) را نوشت.

$$\cos(\Omega T_0) = \frac{1}{2}e^{I\omega T_0}e^{I\sigma T_1} + cc \tag{۴۹}$$

با جای‌گذاری روابط (۴۷) و (۴۹) در معادله‌ی (۴۶)، و به‌منظور اجتناب از جواب‌های واگرا، ترم‌های سکولار آن طبق رابطه‌ی (۵۰) برابر با صفر در نظر گرفته می‌شوند. با جایگذاری رابطه (۴۸) در (۵۰) و سپس جداسازی بخش موهومی و حقیقی آن روابط به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

جدول ۱- صحت سنجی فرکانس طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای همسانگرد در مودهای محیطی مختلف

n	[26]	Present	Error (%)
۶	۵۵۵/۸	۵۶۲/۹	۱/۲۷۶
۷	۴۸۶	۴۹۱/۳	۱/۰۸۱
۸	۴۹۰/۳	۴۹۵/۲	۰/۹۹۹
۹	۵۴۸/۸	۵۵۱/۵	۱/۰۴۰
۱۰	۶۳۴/۸	۶۴۲/۰	۱/۱۳۳

جدول ۲- خواص مکانیکی زمینه و ورقک‌های گرافن ماده هدفمند

ماده	E (GPa)	ρ (kg/m³)	ν
زمینه	۲/۵۸	۱۲۰۰	۰/۳۴
ورقک‌های گرافنی	۱۰۱۰	۱۰۶۲/۵	۰/۱۸۶

$$-2I\omega\frac{dA}{dT_1} - 3K_{NL}\bar{A}A^2 - I\mu\omega A + \frac{\bar{P}}{2}e^{I\sigma T_1} = 0 \quad (۵۰)$$

$$\omega\frac{d\alpha}{dT_1} = -\frac{1}{2}\mu\omega\alpha + \frac{\bar{P}}{2}\sin\left(\sigma T_1 - \beta(T_1)\right) \quad (۵۱)$$

$$\omega\alpha\frac{d\beta}{dT_1} = -\frac{3}{8}K_{NL}\alpha^3 + \frac{\bar{P}}{2}\cos\left(\sigma T_1 - \beta(T_1)\right) \quad (۵۲)$$

با فرض برقراری رابطه $\gamma = \sigma T_1 - \beta(T_1)$ و جایگذاری آن در روابط (۵۱) و (۵۲) و در نظر گرفتن $\frac{d\alpha}{dT_1} = \frac{d\gamma}{dT_1} = 0$ می‌توان نوشت:

$$\sin(\gamma) = \frac{\alpha\omega\mu}{\bar{P}} \quad (۵۳)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{\bar{P}}\left(-\sigma\alpha\omega + \frac{3}{8}K_{NL}\alpha^3\right) \quad (۵۴)$$

با به‌توان دو رساندن دو طرف روابط (۵۳) و (۵۴) و سپس جمع‌کردن آن‌ها، رابطه‌ی ساده‌شده‌ی (۵۵) به دست می‌آید. که در آن پارامتر تنظیم کننده σ متناسب با دامنه حرکت α خواهد بود.

$$\bar{P}^2 = (\alpha\omega\mu)^2 + \left(-\sigma\alpha\omega + \frac{3}{8}K_{NL}\alpha^3\right)^2 \quad (۵۵)$$

۵. صحت سنجی و نتایج

در این بخش از پژوهش، رفتار دینامیک پوسته‌ی استوانه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا لازم است از صحت مدل ریاضی و روش حل ارائه‌شده اطمینان حاصل شود. از این رو در جدول (۱)، صحه‌سنجی فرکانس طبیعی یک پوسته‌ی استوانه‌ای متشکل از ماده همسانگرد با خواص مکانیکی E = 71.2e9 (N/m²)، ρ = 2796 (kg/m³) و ν = 0.31 و ابعاد L = 0.2 (m)، R = 0.1 (m) و h = 0.247 (mm) ارائه شده است. همانطور که از نتایج قابل مشاهده است، نتایج فرکانس طبیعی تطابق بسیار خوبی با مرجع [۲۶] دارد.

در ادامه به بررسی ماده هدفمند با فرض $a_{GPL} = 2e-6$، $b_{GPL} = 1.5e-6$ و $t_{GPL} = 1.5e-9$ و خواص مکانیکی ذکر شده در جدول (۲) برای زمینه و ورقک‌های گرافن پرداخته شده است.

حال برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای به ابعاد L/R = 2 و h/R = 0.05، مقادیر فرکانس طبیعی در جدول (۳) ارائه و با مرجع [۷] مقایسه شده است. مقادیر فرکانس طبیعی با فرض آن که $W_{GPL} = 0.01$ محاسبه و به کمک رابطه (۵۶) بی بعد می‌شود.

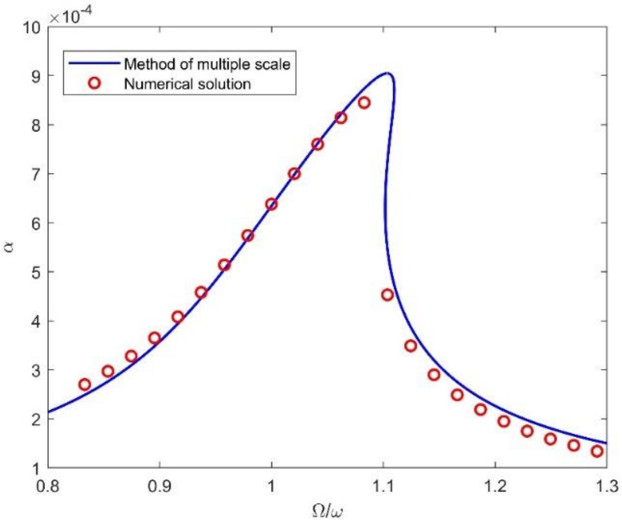
$$\omega_{ND} = \omega R\sqrt{\rho_m/E_m} \quad (۵۶)$$

همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد، مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ماده‌ی هدفمند، تطابق بسیار خوبی با مرجع [۷] دارد.

جدول ۳- صحت‌سنجی فرکانس طبیعی بی بعد پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده با گرافن برای الگو و تعداد لایه‌های مختلف ماده هدفمند با فرض $W_{GPL} = 0.01$

(m,n)		(۱,۳)			(۱,۴)			(۱,۵)		
الگو	N_L	[7]	حاضر	درصد خطا	[7]	حاضر	درصد خطا	[7]	حاضر	درصد خطا
UD	۲	۰/۵۲۵۱	۰/۵۳۲۸	۱/۴۷	۰/۵۹۶۸	۰/۵۸۸۵	۱/۳۹	۰/۸۳۵۰	۰/۸۱۹۴	۱/۸۷
	۴	۰/۵۲۵۱	۰/۵۳۲۸	۱/۴۷	۰/۵۹۶۸	۰/۵۸۸۵	۱/۳۹	۰/۸۳۵۰	۰/۸۱۹۴	۱/۸۷
	۶	۰/۵۲۵۱	۰/۵۳۲۸	۱/۴۷	۰/۵۹۶۸	۰/۵۸۸۵	۱/۳۹	۰/۸۳۵۰	۰/۸۱۹۴	۱/۸۷
	۸	۰/۵۲۵۱	۰/۵۳۲۸	۱/۴۷	۰/۵۹۶۸	۰/۵۸۸۵	۱/۳۹	۰/۸۳۵۰	۰/۸۱۹۴	۱/۸۷
FG-X	۲	۰/۵۲۵۱	۰/۵۳۲۸	۱/۴۷	۰/۵۹۶۸	۰/۵۸۸۵	۱/۳۹	۰/۸۳۵۰	۰/۸۱۹۴	۱/۸۶
	۴	۰/۵۵۱۰	۰/۵۵۷۹	۱/۲۵	۰/۶۶۰۸	۰/۶۵۰۹	۱/۴۹	۰/۹۴۰۰	۰/۹۲۳۰	۱/۸۰
	۶	۰/۵۵۵۷	۰/۵۶۲۵	۱/۲۲	۰/۶۷۱۹	۰/۶۶۱۹	۱/۴۸	۰/۹۵۸۰	۰/۹۴۰۹	۱/۷۸
	۸	۰/۵۵۷۳	۰/۵۶۴۰	۱/۲۰	۰/۶۷۵۷	۰/۶۶۵۷	۱/۴۷	۰/۹۶۴۲	۰/۹۴۷۱	۱/۷۷
FG-O	۲	۰/۵۲۵۱	۰/۵۳۲۸	۱/۴۶	۰/۵۹۶۸	۰/۵۸۸۵	۱/۳۹	۰/۸۳۵۱	۰/۸۱۹۴	۱/۸۸
	۴	۰/۴۹۷۸	۰/۵۰۶۶	۱/۷۶	۰/۵۲۴۶	۰/۵۱۸۷	۱/۱۲	۰/۷۲۴۳	۰/۷۰۱۰	۳/.۲۱
	۶	۰/۴۹۲۸	۰/۵۰۱۶	۱/۷۸	۰/۵۱۰۰	۰/۵۰۴۷	۱/۰۳	۰/۷۲۳۴	۰/۶۷۶۸	۶/۴۴
	۸	۰/۴۹۰۷	۰/۴۹۹۸	۱/۸۵	۰/۵۰۴۸	۰/۴۹۹۷	۱/۰۱	۰/۷۲۳۲	۰/۶۶۸۱	۷/۶۱
FG-V	۲	۰/۵۱۲۴	۰/۵۲۹۱	۳/۲۵	۰/۵۶۶۱	۰/۵۶۵۶	۰/۰۸	۰/۷۸۴۰	۰/۷۷۶۷	۰/۹۳
	۴	۰/۵۰۶۰	۰/۵۲۴۷	۳/۶۹	۰/۵۴۹۶	۰/۵۵۰۸	۰/۲۱	۰/۷۵۶۵	۰/۷۵۰۹	۰/۷۴
	۶	۰/۵۰۴۶	۰/۵۲۳۷	۳/۷۸	۰/۵۴۶۲	۰/۵۴۷۶	۰/۲۵	۰/۷۵۰۶	۰/۷۴۵۴	۰/۶۹
	۸	۰/۵۰۴۱	۰/۵۲۳۳	۳/۸۰	۰/۵۴۴۹	۰/۵۴۶۵	۰/۲۹	۰/۷۴۸۵	۰/۷۴۳۴	۰/۶۸

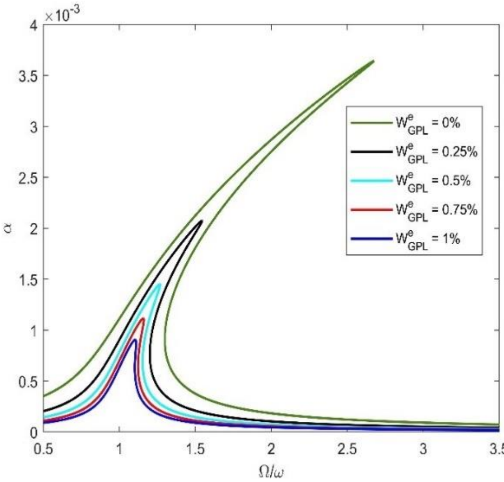
پارامتر N_L بیانگر تعداد لایه‌های نمونه است. ازآنجا که در مواد هدفمند، هر لایه می‌تواند خواص متفاوتی داشته باشد، بررسی ویژگی‌های هر لایه ضروری به نظر می‌رسد. در الگوی UD، توزیع کسر حجمی ورقک‌های گرافن به‌صورت یکنواخت است و بنابراین افزایش تعداد لایه‌ها تأثیری در خواص نمونه ایجاد نمی‌کند و فرکانس طبیعی نیز ثابت می‌ماند. اما در الگوی FG-X، با افزایش تعداد لایه‌ها، مقدار فرکانس طبیعی افزایش یافته و بدین ترتیب سفتی سازه بیشتر می‌شود؛ این مسئله نشان می‌دهد ماده با افزایش تعداد لایه تقویت شده است. در سوی دیگر، در الگوی FG-O، روندی معکوس مشاهده می‌شود؛ با افزایش تعداد لایه‌ها، فرکانس طبیعی و سفتی سازه کاهش می‌یابد و می‌توان نتیجه گرفت که نحوه‌ی توزیع گرافن در لایه‌های میانی این الگو، سبب افت سفتی کلی سازه شده است. الگوی FG-V نیز رفتاری مشابه الگوی FG-O دارد، با این تفاوت که شیب کاهش فرکانس و سفتی کمتر است. به‌طور نمونه، در الگوی FG-O با افزایش تعداد لایه‌ها از دو به هشت، فرکانس حدود ۶.۵ درصد کاهش می‌یابد، در حالی‌که در الگوی FG-V این میزان کاهش تنها ۱.۵ درصد است. بنابراین می‌توان بیان کرد در نمونه‌ی UD (توزیع یکنواخت)، سفتی و فرکانس طبیعی سازه بالاتر می‌مانَد، اما در الگوی FG-O که



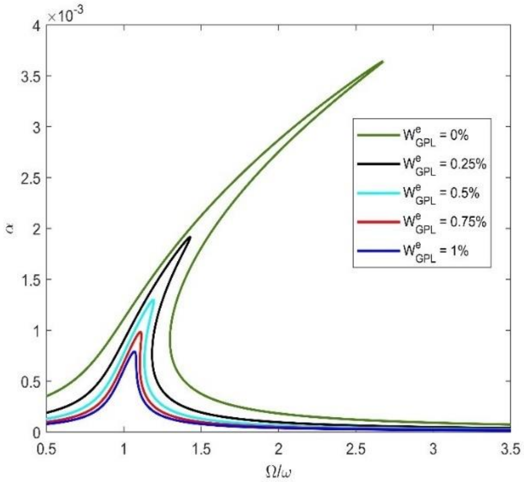
شکل ۳. مقایسه منحنی تغییرات دامنه‌ی نوسان ارتعاش اجباری برحسب تغییرات نسبت فرکانسی به روش عددی رانگ-کوتا و مقیاس چندگانه

صفحه‌ی میانی پوسته از گرافن غنی شده است، فرکانس طبیعی و سفتی نمونه با شیب قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. اکنون که از صحت معادلات حاکم و مدل ریاضی ارائه‌شده اطمینان حاصل شده است، ضروری است روش مقیاس چندگانه‌ی پیشنهادی نیز برای بررسی تأثیر پارامترهای مرتبط با گرافن مورد ارزیابی قرار گیرد. در شکل‌های (۶-۳)، محور قائم نشان‌دهنده دامنه ارتعاش، α، برحسب متر و محور افقی نسبت فرکانس نیروی تحریک، Ω، به فرکانس طبیعی سیستم، ω، را نشان می‌دهد. از این رو، منحنی پاسخ فرکانسی (تغییرات دامنه‌ی نوسان برحسب تغییرات نسبت فرکانسی) برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای با شماره موج (۶و۱) به ابعاد $L/R = 5$ و $R/h = 1000$، با فرض ماده هدفمند $W_{GPL} = 0.01$ با الگوی UD و در نظر گرفتن ۴ لایه بدست آورده شده و با نتایج حاصل شده از روش عددی رانگ کوتا[۱۳] مرتبه چهارم مقایسه شده است. همانطور که از شکل (۳) قابل مشاهده است، تطابق بسیار خوبی بین روش مقایس چندگانه و روش عددی وجود دارد.

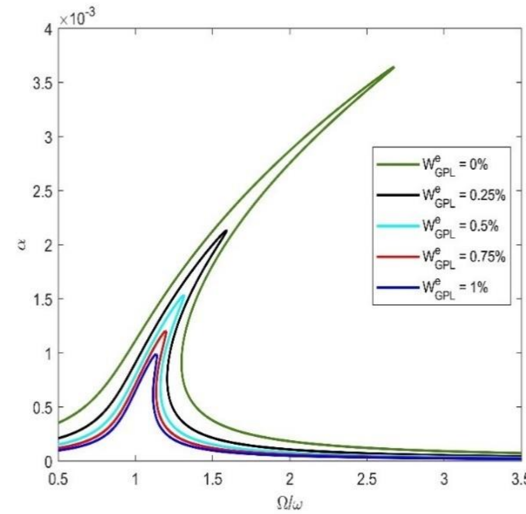
در شکل (۳)، منحنی پاسخ فرکانسی نشان می‌دهد که برخلاف سیستم‌های خطی که در آن‌ها تشدید زمانی رخ می‌دهد که فرکانس تحریک برابر با فرکانس طبیعی باشد، در این سیستم غیرخطی، تشدید (بیشترین دامنه ارتعاش) زمانی اتفاق می‌افتد که فرکانس تحریک بیشتر از فرکانس طبیعی است. این رفتار ناشی از سخت‌شوندگی سیستم است، بدین معنا که با افزایش دامنه‌ی ارتعاش، سختی مؤثر سازه افزایش می‌یابد. این ویژگی معمولاً در نتیجه‌ی وجود غیرخطی‌های هندسی یا خواص ذاتی مواد (مانند گرافن) ظاهر می‌شود و منجر به افزایش فرکانس طبیعی سیستم در دامنه‌های بالاتر می‌گردد. چنین سیستم‌هایی در سازه‌های پیشرفته‌ی مهندسی و ساختارهای پیچیده نقش کلیدی ایفا می‌کنند و مدیریت رفتار آن‌ها در طراحی‌های صنعتی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در ادامه، تاثیر پارامترهای مختلف ماده‌ی هدفمند بر رفتار دینامیکی غیرخطی پوسته، با تمرکز بر پارامتر W_{GPL} بررسی می‌شود. بر همین اساس، منحنی پاسخ فرکانسی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای با شماره موج (۶و۱)، نسبت‌های ابعادی



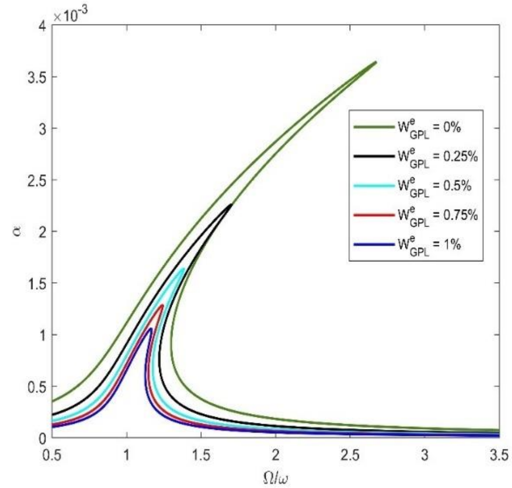
الگوی UD



الگوی FG-X



الگوی FG-V



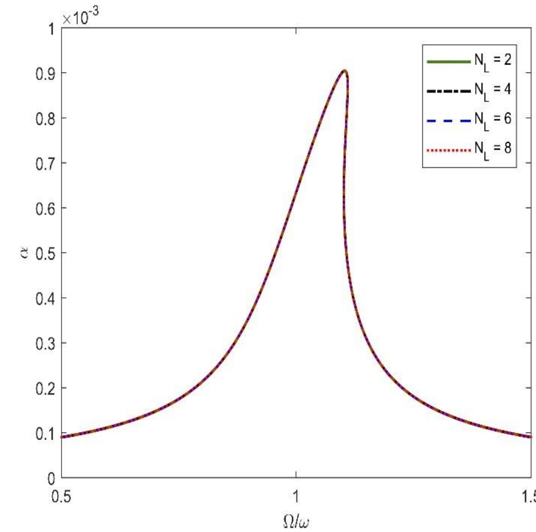
الگوی FG-O

شکل ۴. تاثیر پارامتر W_{GPL} بر روی منحنی تغییرات دامنه‌ی نوسان برحسب تغییرات نسب فرکانسی

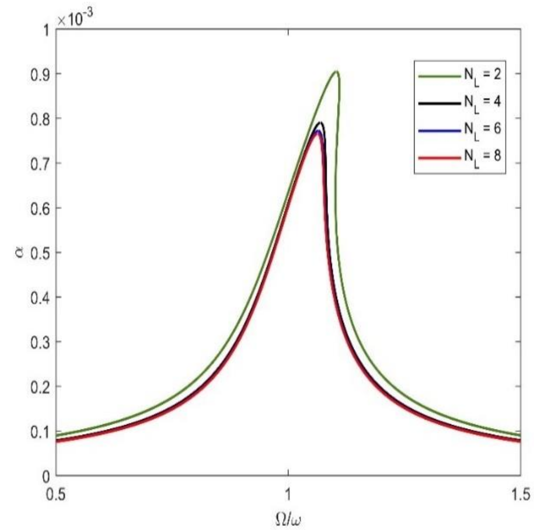
$L/R = 5$ و $R/h = 1000$، و چهار لایه مطالعه شده است. نتایج مربوط به الگوهای مختلف در شکل (۴) ارائه شده‌اند .

در شکل (۴) اثر کسر حجمی ورقک‌های گرافن (W_{GPL}) بر فرکانس نمونه‌های مختلف بررسی شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش کسر حجمی گرافن، سفتی سازه بیشتر می‌شود و در نتیجه فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد؛ این روند حاکی از آن است که افزودن ذرات تقویت‌کننده‌ی گرافن سازه را مستحکم‌تر می‌سازد. همچنین انتظار می‌رود که با افزایش سفتی، رفتار سیستم به حالت خطی نزدیک‌تر شود و دامنه‌ی ارتعاش در ناحیه‌ی تشدید کاهش پیدا کند. نتایج ارائه‌شده در شکل (۴) کاملاً مؤید این موضوع است.

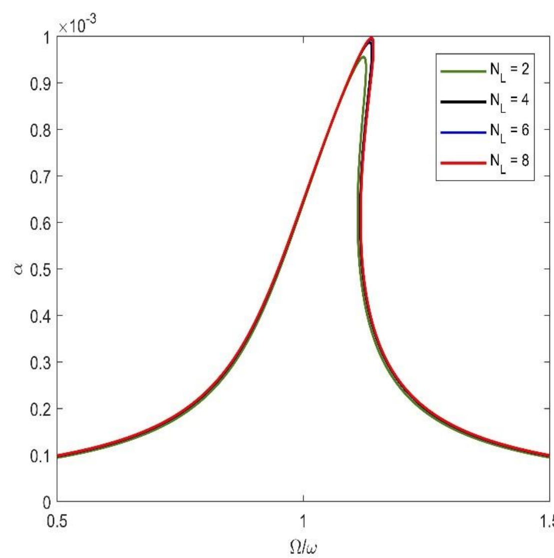
در شکل (۵)، تأثیر تعداد لایه‌ها بر فرکانس و سفتی سیستم بررسی شده است. در الگوی UD، چون توزیع کسر حجمی به‌صورت یکنواخت است، با افزایش تعداد لایه‌ها تغییری در سختی مشاهده نمی‌شود و فرکانس طبیعی ثابت باقی می‌ماند. اما در الگوی FG-X، با زیاد شدن تعداد لایه‌ها، فرکانس



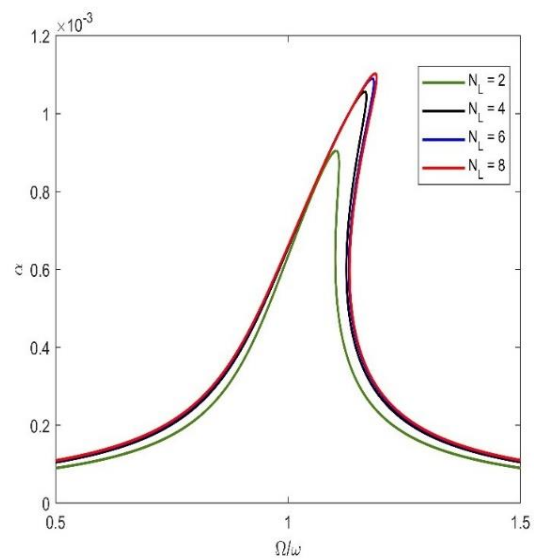
الگوی UD



الگوی FG-X



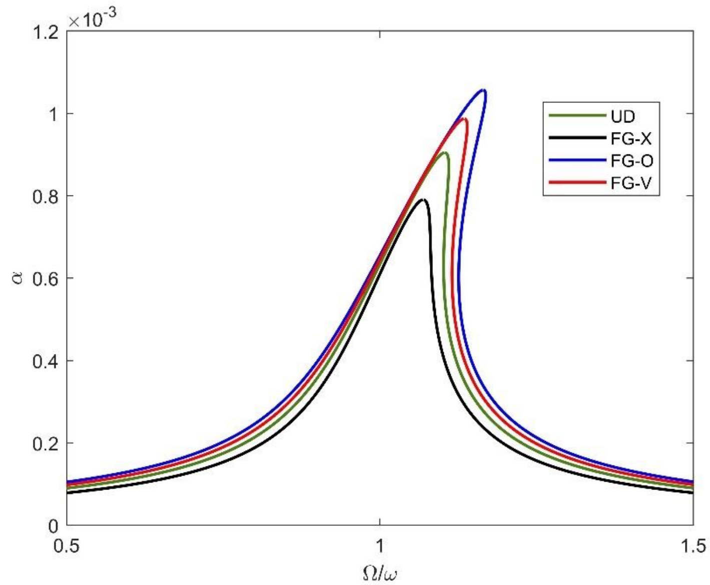
الگوی FG-V



الگوی FG-O

شکل ۵. تاثیر تغییر تعداد لایه‌ها بر روی منحنی تغییرات دامنه‌ی نوسان برحسب تغییرات نسبت فرکانسی

طبیعی افزایش یافته و در سیستم غیرخطی، طبق رابطه‌ی معکوس بین فرکانس و سختی مؤثر، با کاهش سختی مواجه می‌شود. از سوی دیگر، منحنی الگوی FG-X برای نمونه‌ی دو لایه فرکانس کمتری دارد و به دلیل کسر حجمی پایین‌تر، به ناحیه‌ی تشدید نزدیک‌تر بوده و رفتار غیرخطی‌تری از خود نشان می‌دهد. اما با افزایش تعداد لایه‌ها، سازه تدریجاً تقویت شده، فرکانس بیشتر شده و بیشینه‌ی دامنه کاهش پیدا می‌کند و سیستم به سوی رفتار خطی متمایل می‌شود. در الگوهای FG-O و FG-V، نتایج جدول



شکل ۶. مقایسه منحنی تغییرات دامنه‌ی نوسان برحسب تغییرات نسبت فرکانسی برای الگوهای مختلف

(۳) نشان می‌دهد که این دو الگو به یکدیگر شباهت دارند، اگرچه تغییرات در FG-V اندک‌تر است. در شکل (۵)، با افزایش تعداد لایه‌ها در الگوی FG-O، سیستم از حالت مستحکم‌شده خارج می‌شود و به‌اصطلاح نرم‌تر می‌گردد؛ درنتیجه، منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست جابه‌جا شده و سخت‌شوندگی سیستم افزایش می‌یابد. در الگوی FG-V نیز روند مشابهی ملاحظه می‌شود؛ با این تفاوت که شیب تغییرات فرکانس و دامنه کمتر بوده و سیستم، با وجود نرم‌تر شدن، رفتار نسبتاً پایدارتری دارد.

در شکل (۶)، چهار الگوی FG-O ، FG-X، FG-V و UD با یکدیگر مقایسه شده‌اند. مطابق انتظار، در الگوی FG-X ، سختی سیستم به دلیل توزیع مناسب‌تر گرافن افزایش می‌یابد. این افزایش سختی باعث می‌شود فرکانس طبیعی بالاتر رود، بیشینه‌ی دامنه کاهش یابد، و سیستم به رفتار خطی متمایل شود. در الگوی UD با توزیع یکنواخت، تغییر قابل‌توجهی در سختی و فرکانس طبیعی مشاهده نمی‌شود، که این وضعیت را به‌عنوان یک حالت معیار یا مبنا قابل قبول می‌سازد. در مقابل، دو الگوی FG-Oو FG-V کاهش سختی و فرکانس طبیعی را در حالت خطی نشان می‌دهند. این روند نشان می‌دهد که توزیع گرافن در این دو الگو به گونه‌ای است که تأثیر کمتری بر افزایش سختی سازه دارد. در نتیجه، رفتار سخت‌شوندگی سیستم تقویت شده و تمایل به رفتار غیرخطی در دامنه‌های بالاتر قابل‌توجه‌تر می‌شود. این تحلیل با فرض WGPL = 0.01 انجام شده است.

۶. نتیجه گیری

در این پژوهش، رفتار دینامیک غیرخطی یک پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با لایه‌هایی از ورقک‌های گرافن بررسی شده است. برای این منظور، معادلات حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای با استفاده از تئوری کلاسیک دانل پوسته‌ها، فرضیات غیرخطی فون کارمن و اصل همیلتون استخراج شده‌اند. همچنین خواص مکانیکی ماده‌ی هدفمند (نظیر مدول یانگ، نسبت پواسون و چگالی) به کمک مدل هالپین–تسای و قانون اختلاط تعیین گردیده است. در این پژوهش، از اینرسی درون صفحه‌ای صرف‌نظر شده و با درنظرگرفتن تابع تنش آیری، معادلات حاکم بر حرکت پوسته‌ی کامپوزیتی ساده

گردیده است. سپس با اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و در ادامه، با بهره‌گیری از رویکرد اغتشاشات، معادلات غیرخطی حاکم برای تشدید اولیه حل شده و رفتار دینامیک غیرخطی پوسته مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور، ابتدا فرکانس طبیعی خطی به منظور صحّت‌سنجی با مراجع معتبر مقایسه شده و دقت مدل ارائه‌شده تأیید گردید. در گام بعدی، تأثیر پارامترهای مهمی همچون کسر حجمی گرافن، تعداد لایه و الگوهای گوناگون توزیع ذرات گرافن در ماده‌ی هدفمند مورد بررسی قرار گرفت که مهم‌ترین نتایج آن به‌اختصار به شرح زیر است:

۱- فرضیات ساده‌ساز و تئوری در نظر گرفته‌شده، هم برای ماده‌ی همسانگرد و هم برای ماده‌ی هدفمند تقویت‌شده، از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

۲- مقادیر فرکانس طبیعی خطی با افزایش تعداد لایه‌های ماده هدفمند برای الگوی UD ثابت بوده و برای الگوی FG-X افزایش خواهد یافت. در صورتی که برای دو الگوی FG-O و FG-V با افزایش تعداد لایه مقدار فرکانس طبیعی خطی کاهش خواهد یافت.

۳- در حالی که منحنی پاسخ فرکانسی با افزایش تعداد لایه‌های ماده هدفمند برای الگوی UD ثابت بوده و برای الگوی FG-X باعث کاهش حداکثر دامنه بیشینه و میزان سخت‌شوندگی می‌شود. در مقابل آن برای دو الگوی FG-O و FG-V با افزایش تعداد لایه‌ها، میزان سخت‌شوندگی افزایش پیدا کرده است.

۴- میزان تغییرات منحنی پاسخ فرکانسی با افزایش تعداد لایه‌های ماده هدفمند برای الگوی FG-V بسیار ناچیز است.

۵- افزایش درصد کسر حجمی گرافن در تمامی الگوها باعث کاهش میزان سخت‌شوندگی منحنی پاسخ فرکانسی خواهد شد. به عبارتی برای یک نیروی یکسان به سمت خطی شدن میل خواهد نموده و مقاومت پوسته افزایش یافته است.

۶- برای یک شرایط یکسان، الگوی FG-X دارای کمترین بیشینه دامنه در منحنی پاسخ فرکانسی است، در حالیکه الگوی FG-O دارای بیشترین میزان سخت‌شوندگی و بیشینه دامنه خواهد بود.

واژه نامه

1. Isogeometric Analysis
2. Theory Classic Donell
3. Rayleigh- Ritz
4. Chebyshev polynomials
5. Hamilton's Principle
6. Kirchhoff Plate Theory
7. Lagrange
8. Newmark Method
9. Newton Raphson
10. Von Karman
11. Airy stress
12. Galerkin Method
13. Runge–Kutta

منابع

References

[1] Young R. J., Kinloch I. A., Gong L., and Novoselov K. S., "The mechanics of graphene nanocomposites: A review", Composites Science and Technology, Vol. 72, No. 12, pp. 1459–1476, 2012

[2] Khatounabadi M., Jafari M., and Asemi K., "Finite element analysis of free vibration of functionally graded porous circular plate reinforced with graphene", Aerospace Knowledge and Technology Journal, Vol. 12, No. 1, pp. 163–181, 2023.

[3] Mokhtari M. A., "Thermal stability analysis of cylindrical shell reinforced with GPL graphene sheets using differential squares method", Iranian

Journal of Mechanical Engineering Transactions of ISME, Vol. 22, No. 4, pp. 51–71, 2021.
[4] Arefi M., Moghaddam S. K., M.-R. Bidgoli E., Kiani M., and Civalek O., “Analysis of graphene nanoplatelet reinforced cylindrical shell subjected to thermo-mechanical loads”, Composite Structures, Vol. 255, p. 112924, 2021.
[5] Van Do V. N. and Lee C.-H., “Bézier extraction based isogeometric analysis for bending and free vibration behavior of multilayered functionally graded composite cylindrical panels reinforced with graphene platelets”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 183, p. 105744, 2020.
[6] Wang Y., Feng C., Zhao Z., and Yang J., “Eigenvalue buckling of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets (GPL)”, Composite Structures, Vol. 202, pp. 38–46, 2018.
[7] Abedini Baghbadorani A. and Kiani Y., “Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets”, Composite Structures, Vol. 276, p. 114546, 2021.
[8] Nguyen M.-Q. and Dinh G.-N., “Parametric study on free vibration of functionally graded graphene-nanoplatelet reinforced funnel shell with a complex profile”, Proceedings of the International Conference on Advanced Mechanical Engineering, Automation, and Sustainable Development 2021 (AMAS2021), pp. 615–620, 2022.
[9] Babaei M., Kiarasi F., Hossaeini Marashi S. M., Ebadati M., Masoumi F., and Asemi K., “Stress wave propagation and natural frequency analysis of functionally graded graphene platelet-reinforced porous joined conical–cylindrical–conical shell”, Waves in Random and Complex Media, pp. 1–33, 2021.
[10] Javani M., Kiani Y., and Eslami M. R., “On the free vibrations of FG-GPLRC folded plates using GDQE procedure”, Composite Structures, Vol. 286, p. 115273, 2022.
[11] Mirzaei M. and Abbasi M., “Dynamic response of moderately thick graphene reinforced composite cylindrical panels under the action of moving load”, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 146, pp. 292–305, 2023.
[12] Zhou Y. et al., “Free vibration analyses of stiffened functionally graded graphene-reinforced composite multilayer cylindrical panel”, Mathematics, Vol. 11, No. 17, p. 3662, 2023.
[13] Ghasemi H., Mohammadi Y., and Ebrahimi F., “Free vibration analysis of FG-GPL and FG-CNT hybrid laminated nano composite truncated conical shells using systematic differential quadrature method”, ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 103, No. 11, 2023.
[14] Mirzaei M. and Rabiei R., “On the free and forced vibrations of porous GPL reinforced composite conical panels using a Legendre-Ritz method”, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 163, pp. 378–393, 2024.
[15] Huang T., Ma Y., Zhao T., Yang J., and Wang X., “Free vibration analysis of spinning sandwich annular plates with functionally graded graphene nanoplatelet reinforced porous core”, Materials, Vol. 15, No. 4, p. 1328, 2022.
[16] Abdollahzadeh Jamalabadi M. Y., Borji P., Habibi M., and Pelalak R., “Nonlinear vibration analysis of functionally graded GPL-RC conical panels resting on elastic medium”, Thin-Walled Structures, Vol. 160, p. 107370, 2021.
[17] Khayat M., Baghlani A., Dehghan S. M., and Najafgholipour M. A., “Geometrically nonlinear dynamic analysis of functionally graded porous partially fluid-filled cylindrical shells subjected to exponential loads”, Journal of Vibration and Control, Vol. 28, No. 7–8, pp. 758–772, 2022.
[18] Javani M., Kiani Y., and Eslami M. R., “Geometrically nonlinear free vibration of FG-GPLRC circular plate on the nonlinear elastic foundation”, Composite Structures, Vol. 261, p. 113515, 2021.
[19] Shen H.-S., Xiang Y., and Lin F., “Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 319, pp. 175–193, 2017.
[20] Niu Y., Yao M., and Wu Q., “Nonlinear vibrations of functionally graded graphene reinforced composite cylindrical panels”, Applied Mathematical Modelling, Vol. 101, pp. 1–18, 2022.
[21] Kazemi M., Rad M. H. G., and Hosseini S. M., “Geometrically non-linear vibration and coupled thermo-elasticity analysis with energy dissipation in FG multilayer cylinder reinforced by graphene platelets using MLPG method”, Journal of Vibration Engineering & Technologies, Vol. 11, No. 1, pp. 355–379, 2023.
[22] Saboori R. and Ghadiri M., “Nonlinear forced vibration analysis of PFG-GPLRC conical shells under parametric excitation considering internal and external resonances”, Thin-Walled Structures, Vol. 196, p. 111474, 2024.

[23] Cho J.-R., “Large amplitude vibration of FG-GPL reinforced conical shell panels on elastic foundation”, Materials, Vol. 16, No. 17, p. 6056, 2023.
[24] Reddy J. N., *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, CRC Press, 2006.
[25] Brush B. O. and Almroth D. O., *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, 1975.
[26] Ahmadi H. and Foroutan K., “Nonlinear primary resonance of spiral stiffened functionally graded cylindrical shells with damping force using the method of multiple scales”, Thin-Walled Structures, Vol. 135, pp. 33–44, 2019.
[27] Rao S. S., *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons, 2019.
[28] Gao K., Gao W., Wu B., Wu D., and Song C., “Nonlinear primary resonance of functionally graded porous cylindrical shells using the method of multiple scales”, Thin-Walled Structures, Vol. 125, pp. 281–293, 2018.