

**Original Article** 

# Investigation of the static stable states of a bistable composite rectangular plate with curved fibers and piezoelectric layers

### Ehsan Hendesi<sup>®</sup>, Reza Tikani<sup>®</sup> and Mohammad Sina Taki<sup>®</sup>

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran.

Abstract: In this paper, the static analysis of a bistable composite rectangular plate with curved fibers, free boundary conditions and piezoelectric layers reinforced with macro fibers is investigated. To this end, the potential energies and the work of external forces for the composite rectangular plate are derived using von Karman's nonlinear strain-displacement relations. The stable states of the rectangular plate are then determined using the Rayleigh-Ritz method through minimizing the potential energy of the system. Subsequently, the displacements of various parts of the rectangular plate are calculated using an extended higher-order model, and compared with the results by simulation in Abaqus. For the first time, a novel seventh-order shape function for the out-of-plane displacement field is proposed to enhance the accuracy of the results. Finally, the displacements and stable states of the rectangular plate are extracted for five different curved fiber configurations, and compared with the results from the finite element model. The findings demonstrate excellent agreement between the two methods. Additionally, this study uniquely examines the impact of piezoelectric layers reinforced with macro fibers on the static stable states of the system for the first time.

Keywords: Static Analysis, Composite Materials, Curved Fibers, Developed Hyer's Theory, Pizoelectric layers.

Received: Oct. 13, 2024; Revised: Dec. 23, 2025; Accepted: Feb. 18, 2025; Published Online: June 23, 2025.

\* Corresponding Author: r\_tikani@iut.ac.ir

**How to Cite:** Hendesi Ehsan, Tikani Reza and Taki Mohammad Sina, Investigation of the Static Stable States of a Bistable Composite Rectangular Plate with Curved Fibers and Piezoelectric Layers, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 44(1), 21-41; DOI: 10.47176/jcme.44.1.1039.





نشریه روشهای عددی در مهندسی صفحه خانگی نشریه: /https://jcme.iut.ac.ir شایا: ۷۹۶۸–۲۲۲۸ شایا الکترونیکی: ۵۷۴۱



مقاله پژوهشی

بررسی حالتهای پایدار استاتیکی ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با الیاف منحنی شکل با لایههای پیزوالکتریک

> احسان هندسی<sup>©</sup>، رضا تیکنی<sup>®\*</sup> و محمد سینا تاکی<sup>©</sup> دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده- در این مقاله، به تحلیل استاتیکی یک ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد که دارای لایه های پیزوالکتریک تقویت شده با ماکروالیاف است، پرداخته شده است. برای این منظور، ابتدا انرژی های پتانسیل و کار نیروهای خارجی ورق مستطیلی مرکب با استفاده از رابطه های کرنش-جابه جایی غیر خطی ونکارمن استخراج شده اند. سپس حالت های پایدار ورق مستطیلی با استفاده از روش ریلی-ریتز و کمینه سازی انرژی پتانسیل سیستم به دست آمده اند. در ادامه، جابه جایی های قسمت های مختلف ورق مستطیلی با استفاده از روش ریلی-ریتز و کمینه سازی آباکوس مقایسه شده اند. به منظور افزایش دقت نتایج، برای اولین بار، تابع شکل جدیدی از مرتبه هفت برای میدان جابه جایی خارج از صفحه ارائه شده است. در نهایت، جابه جایی های قسمت های مختلف ورق مستطیلی به همراه حالت های پایدار آن برای پنج حالت مختلف چینش الیاف منحنی شکل استخراج شده اند و با مدل اجزای محدود مقایسه شده اند. نتایج نشان میدهند که بین نتایج دو روش سازگاری بسیار خوبی وجود دارد. همچنین در این مقاله برای شده اند و با مدل اجزای محدود مقایسه شده اند. نتایج نشان میده ند که بین نتایج دو روش سازگاری بسیار خوبی وجود دو باید برای اولین برای اولین برای اولین مقاله برای وی حالت های پایدار استای کی میدان جابه ماکرو این منحنی شکل استخراج شده اند و با مدل اجزای محدود مقایسه شده اند. نتایج نشان میده دی نتایج دو روش سازگاری بسیار خوبی وجود دارد. همچنین در این مقاله برای

واژههای کلیدی: تحلیل استاتیکی، ورق مستطیلی مرکب، الیاف منحنی شکل، نظریه توسعهیافته هیر، لایههای پیزوالکتریک.

دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۲۲، بازنگری: ۱۴۰۳/۱۰/۰۳، پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۳۰، اولین انتشار: ۱۴۰۴/۰۴/۰۲ \*: نویسنده مسئول، رایانامه:r\_tikani@iut.ac.ir



حق انتشار این مستند، متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است. ۱۴۰۳ ©.

### فهرست علائم

جابهجایی لایه میانی ورق در راستای محور x	$u_0$	طول ورق	а
کار نیروهای خارجی	V	عرض ورق	b
جابهجایی لایه میانی ورق در راستای محور y	$v_0$	مدول الاستيسيته	Ε
جابهجایی لایه میانی ورق در راستای محور z	$w_0$	ضخامت ورق	h
كرنش برشى	γ	ممان اينرسي جرمي	Ι
کرنش عمودی	ε	انرژی جنبشی	Κ
ضريب پواسون	ν	ممان خمشي برآيند	М
چگالی	ρ	نیروی عمودی برآیند	Ν
تنش عمودي	σ	ضريبهاي سفتي	$Q_{ij}$
تىش برشى	τ	انرژی کرنشی	U

#### ۱– مقدمه

مواد مركب با الياف منحني شكل يك نوع مواد مركب هستند كه الیاف پیوسته و منحنی را درون ماده زمینه پلیمری یا فلزی جای مىدهند. اين الياف معمولاً از جنس موادى مانند كربن، آراميد، گرافیت و یا شیشه هستند. استحکام مواد مرکب به طور قابل توجهی تحت تأثیر نحوه آرایش الیاف در مادهزمینه قرار دارد. بهویژه الیاف مستقیم و خمیده که هر یک مزایا و محدودیتهای خاص خود را دارند. مواد مركب با الياف مستقيم استحكام كششي و سختی بالایی در جهت همراستا با الیاف نشان میدهند و برای کاربردهایی با بار گذاری یکجهته ایدهآل هستند. با این حال، این مواد بسیار ناهمسانگرد هستند و عملکرد ضعیفتری در جهتهای عرضی یا غیرهمراستا دارند و مستعد تمرکز تنش و گسترش ترک هستند. در مقابل، مواد مرکب با الیاف خمیده در شرایط بارگذاری چندجهته یا پیچیده برتری دارند، زیرا توانایی توزيع يكنواختتر تنش ها، افزايش مقاومت در برابر شكست و انحراف گسترش ترک را دارند. با این وجود، الیاف خمیده معمولاً استحکام کششی کمتری در جهت بار اصلی دارند، تمرکز تنش موضعي ايجاد مي كنند و ساخت آنها پيچيدهتر و پرهزينهتر است .[١].

الیاف مستقیم برای کاربردهایی مانند سازههای هوافضا که نیاز به استحکام بالا در یک جهت دارند مناسب تر هستند، در حالی که الیاف خمیده برای قطعات با هندسههای پیچیده یا توزیع تنش غیر خطی، مانند قطعات خودرویی و ایمپلنتهای زیست پزشکی، گزینه بهتری محسوب می شوند [۱,۲].

به دلیل اهمیت موضوع، پژوهشگران زیادی روی مواد مرکب با الیاف منحنی شکل کار کردند. به عنوان مثال، درسال ۱۹۹۱، هیر و لی [۳] مقاومت کمانشی یک ورق مستطیلی مرکب لایه ای با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد را با استفاده از روش اجزای محدود بررسی کردند و دریافتند که چنین ورق هایی دارای بار کمانشی بیشتری از ورق های با الیاف مستقیم هستند. در سال ۱۹۹۶، والدهارت [۴] کمانش و پاسخ درون صفحه ای ورق های مستطیلی مرکب لایه ای با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد را تحت بارگذاری تک محوره تحلیل کرد. او نشان داد که استفاده از الیاف منحنی شکل به جای الیاف مستقیم، می تواند باعث از الیاف منحنی شکل به جای الیاف مستقیم، می تواند باعث مود. درسال ۱۹۹۹، لانگلی [۵] یک مدل اجزای محدود برای شود. درسال ۱۹۹۹، لانگلی [۵] یک مدل اجزای محدود برای مرزی آزاد معرفی کرد و پاسخ درون صفحه ای، تغییر شکل، شکست و تنش ها را تحلیل کرد. تاتینگ و گوردال [۶٫۷]

دوپایداره سفتی متغیر با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد تحت بارگذاری مکانیکی در چهارگوشه ورق پرداختند. گو و همکاران [۱۷] به مدلسازی دینامیکی ورق مستطیلی مرکب چندلایه دوپایداره و شرایط مرزی آزاد به کمک شبیهسازی عددی و آزمایشگاهی پرداختند. لموس و همکاران [۱۸] به مروری بر ورق،های مستطیلی مرکب دو پایداره برای کاربردهای هوافضا پرداختند. گو و همکاران [۱۹] به کمک روشهای تجربی و عددی بر روی ارتعاشات غیرخطی یک ورق مستطیلی نازک دوپایداره چندلایه مرکب نامتقارن با شرایط مرزی مفصلی کار کردند. ژانگ و همکاران [۲۰] به طراحی و تجزیه و تحلیل ورقهای مستطیلی الیاف منحنی چندپایداره و شرایط مرزی آزاد به کمک چاپگر سهبعدی الیاف پیوسته و ماده زمینه رزین گرماسخت پرداختند. گوو و همکاران [۲۱] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق،های مستطیلی چندلایه کامپوزیتی متقارن و نامتقارن و شرایط مرزی آزاد به کمک روش های اجزای محدود و تجربی پرداختند. تاکی و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۲۴ یک فرمول جامع براي تعيين ويژگيهاي استاتيكي ورقهاي مستطيلي مركب چندپايداره موزاييكي و شرايط مرزى آزاد تحت تغييرشكل و چرخش زیاد تعیین کردند. موخرجی و همکاران [۲۳] به کمک روش های عددی، تحلیلی و تجربی به تحلیل دینامیکی ورق های مستطیلی مرکب دوپایداره و شرایط مرزی آزاد پرداختند و تاثیر پارامترهای هندسی و فیزیکی ورق را روی رفتار غیرخطی سازه مورد بررسی قرار دادند. شرما و همکاران [۲۴] به تجزیه و تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق مستطیلی مرکب چندلایه دارای آسیب با سفتی متغیر و لایههای پیزوالکتریک و شرایط مرزی آزاد یر داختند.

در مقاله حاضر، تحلیل استاتیکی یک ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با الیاف منحنی-شکل و لایههای پیزوالکتریک تقویتشده با ماکروالیاف و شرایط مرزی آزاد بررسی شدهاست. هدف این مطالعه، بررسی اثر چینش مختلف الیاف منحنی شکل و لایههای پیزوالکتریک بر رفتار استاتیکی ورق مرکب است.

درسالهای ۲۰۰۲ و ۲۰۰۳ یک نرمافزار توسعهدادهشده ارائه کردند که به کمک آن موفق شدند کمانش، تغییرشکل و توزیع تنش را در یک ورق مستطیلی مرکب لایهای با الیافهای منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد تحلیل کنند. سنوکاک و تناریوور [۸] در سال ۲۰۰۷ تنش ها و تغییر مکان های ورق های مستطیلی مرکب لایهای با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد را با استفاده از روش گالرکین بهدست آوردند. لوپس و همکاران [۹٫۱۰] درسالهای ۲۰۰۸ و ۲۰۱۰ با استفاده از نرمافزار اجزای محدود آباکوس، کمانش، شکست و تنشهای بین لایهای ورقهای مستطیلی مرکب با الیافهای منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد را مورد مطالعه قرار دادند که این مطالعات شامل تغییرشکلهای قائم و تنشهای عمودی ورق بود. سوزا و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۱۳ به تحلیل پایداری یک ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با سختی متغیر و شرایط مرزی آزاد به کمک روش اجزای محدود پرداختند. آنها حالتهای پایدار ورق را با حالتهای پایدار ورقهای تقویت شده با الیاف مستقیم مقایسه کردند. در سال ۲۰۱۷، هالدار و همکاران [۱۲] به کمک روش نیمه تحلیلی و نرمافزار اجزای محدود آباکوس به بررسی و تحلیل یک ورق مستطیلی مرکب چندپایداره سختی متغیر با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد تحت بارگذاری گرمایی پرداختند. آنیکومارو رائو [۱۳] در سال ۲۰۲۱ تأثیر محیط گرمایی را روی دوپایداری ورقهای مستطیلی سفتی متغیر با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد بررسی و تحلیل کردند. شرما و همکاران [۱۴] به تجزیه و تحلیل استاتیک، ارتعاشات آزاد و کنترل دینامیکی ورق مستطیلی مرکب چندلایه سفتی متغیر با لایههای پیزوالکتریک و شرايط مرزى آزاد با درنظر گرفتن اثر لايهلايه شدن پرداختند. شوکلا و پردیومنا [۱۵] به تحلیل پاسخ استاتیکی یک ورق مستطیلی مرکب سفتی متغیر با لایههای پیزوالکتریک مرکب و شرایط مرزی آزاد پرداختند. در سال ۲۰۲۳، آنیلکومار و همکاران [۱۶] به کمک روش نیمه تحلیلی و نرمافزار اجزای محدود آباکوس به بررسی و تحلیل دینامیکی یک ورق مستطیلی مرکب



شکل ۱. ورق مستطیلی مرکب با لایههای پیزوالکتریک

برای تحلیلهای دینامیکی و برداشت انرژی از این ورقها درنظر گرفته شود.

# ۲ مدلسازی ورق مرکب با الیاف منحنی شکل با لایه پیزوالکتریک

شکل ۱ یک ورق مستطیلی چهارلایه مرکب دوپایداره به همراه دولایه پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف و شرایط مرزی با لبههای آزاد را نشان میدهد. به منظور حذف حرکت صلب ورق، تمامی درجات آزادی مرکز ورق گرفته شده است. طول و عرض ورق به همراه لایههای پیزوالکتریک بهترتیب برابر با L و  $\chi l$  و همچنین ضخامت ورق مستطیلی و لایه پیزوالکتریک بهترتیب برابر با  $h \ q \ d$  است. همچنین ورق هنگام پخت تحت گرادیان گرمایی به اندازه  $T\Delta$  قرار دارد. مبدا دستگاه مختصات کارتزین به ذکر است که شرایط مرزی پیزوالکتریک به صورت اتصال کوتاه به ذکر است که شرایط مرزی پیزوالکتریک به صورت اتصال کوتاه است.

بهمنظور محاسبه رابطههای کرنش، ابتدا باید میدان جابهجایی براساس شرایط مرزی هندسی و روش ریلی-ریتز تقریب زده شود. بنابراین میدانهای جابهجایی بهصورت چندجملهایهای کامل (مرتبه هفت) بهصورت رابطههای (۱) تا (۳) تقریب زده می شوند: برای این منظور، ابتدا انرژیهای پتانسیل و کارنیروهای خارجی ورق مرکب با استفاده از رابطههای کرنش-جابهجایی غیرخطی فونکارمن استخراج شدهاند. سپس، حالتهای پایدار ورق با استفاده از روش ریلی-ریتز و کمینهسازی انرژی پتانسیل سیستم به دست آمدهاند. در ادامه، جابهجاییهای قسمتهای مختلف ورق با استفاده از مدل توسعهیافته هیر محاسبه و با نتایج شبیهسازی در نرمافزار آباکوس مقایسه شدهاند. نتایج نشان میدهند که بین نتایج دو روش سازگاری بسیار خوبی وجود دارد. در نهایت اثر چینشهای مختلف الیاف و همچنین لایههای پیزوالکتریک تقویتشده با ماکروالیاف روی پایداری و جابهجایی نقاط مختلف ورق بررسی شدهاست. با بررسی مقالات پیشین، نوآوریهای مقاله حاضر به صورت زیر قابل بیان است:

- ۱) اثر چینش و زوایای مختلف الیاف منحنی شکل روی پایداری ورق های مرکب با سختی متغیر با استفاده از توابع چندجملهای درجه هفت برای محاسبه میدان جابه جایی بررسی می شود. استفاده از این توابع به مراتب دقت بالاتری نسبت به توابع درجه پایین تر در تحلیل ورق مذکور دارد.
- ۲) اثر لایههای پیزوالکتریک مرکب تقویتشده با ماکروالیاف بر روی پایداری استاتیکی ورق بررسی میشود که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفتهاست و میتواند به عنوان پایهای





شکل ۲. معرفی زوایا و جهتگیری الیاف منحنی شکل

تحلیلی سادہ تر، مدل ارائه شدہ در معادلہ (۷) توسط هالدار و همکاران [۱۲] برای زوایای این الیاف پیشنهاد شدہ است. (۷)  $T = \frac{(T_0 - T_1)x'}{(T_0 - T_1)} + \frac{T_0}{(T_0 - T_1)}$ 

$$\theta(x') = \phi + \frac{1}{d} + T_0, \quad -d \le x' \le 0$$
  

$$\theta(x') = \phi + \frac{(T_1 - T_0)x'}{d} + T_0, \quad 0 \le x' \le d$$
  

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi$$

در اینجا، جهت گیری الیاف به صورت خطی از زوایه To در نقطه A تا زاویه T<sub>1</sub> در نقطه B تغییر میکند. نقاط A و B توسط یک خط فاصل d روى محور 'x به عنوان طول مشخصه جدا شده است. پارامترهای زاویه  $T_0$  و  $T_1$  برحسب محورهای x' و y' که به اندازه زاویه 🖨 دوران کردهاند برحسب دستگاه مختصات محورهای کارتزین تعریف شدهاند. مقدار d می تواند از مختصه نقاط A و B جایی که زاویههای T<sub>0</sub> و T<sub>1</sub> تعریف شدهاند محاسبه شود. در شکل۲ خطوط نشان داده شده منحنی الیاف هستند. دیگر مسیرهای الیاف می تواند با تغییر مسیر مرجع در راستای y' ایجاد شود. اگرچه الیاف درحال تغییر جهتگیری در راستای محور هستند، اگر از زاویه محورهای مختصات کارتزین دیده شوند، جهت گیری الیاف تابعی از x و y هستند. ایده استاندارد برای نامگذاری چندلایه VS (سفتی متغیر) با پارامترهایی نامبرده  $T_0$  ،(۲)، است. لازم به ذکر است طبق شکل (۲)،  $\phi < T_0 | T_l > 0$ و T<sub>I</sub> بهترتيب زاويه الياف در مركز و زاويه الياف در لبه ورق نسبت به محور x' تعريف شدهاند.

$$u_0 = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{7-i} \hat{u}_{ij} \ x^i y^j \quad (i+j>0)$$
(1)

$$v_0 = \sum_{\substack{i=1\\7\\7\\7\\-i}}^{j} \sum_{\substack{j=1\\7\\7\\-i}}^{j-i} \hat{v}_{ij} \ x^i y^j \ (i+j>0)$$
(Y)

$$w_0 = \sum_{i=1}^{j} \sum_{j=1}^{j-1} \widehat{w}_{ij} \ x^i y^j \quad (i+j>0)$$
(٣)

در رابطههای (۱) تا (۳) ضریبهای  $\hat{v}_{ij}$   $\hat{v}_{ij}$  و  $\hat{v}_{ij}$  مجهول هستند که از حل عددی و برنامهنویسی در نرمافزار متلب از روش نیوتون رافسون بهدست میآیند. همچنین  $u_0$  ،  $v_0$  و  $w_0$ بهترتیب جابهجاییهای لایه میانی ورق مستطیلی در راستای محور x و z هستند. در ادامه رابطههای کرنش جابهجایی بر اساس نظریه کلاسیک با در نظر گرفتن فرضیات غیرخطی هندسی ونکارمن ارائه میگردد [۲۵]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \tag{(f)}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{(a)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \tag{9}$$

در این مطالعه، از الیاف منحنی شکل برای لایههای مرکب استفاده شدهاست. این الیاف در یک الگوی منحنی شکل قرار می گیرند که زاویه جهت گیری آنها بهصورت خطی تغییر میکند. به دلیل سازگاری با محدودیتهای تولید و همچنین کاربرد در مدلهای

$$\begin{split} U_{VS} &= \sum_{k=1}^{N} \int_{-L_{y/2}}^{L_{x/2}} \int_{-L_{y/2}}^{H_{k}} \int_{H_{k-1}}^{H_{k}} (\frac{1}{2} \overline{Q_{11}^{k}} \varepsilon_{xx}^{2} \\ &+ \frac{1}{2} \overline{Q_{22}^{k}} \varepsilon_{yy}^{2} + \frac{1}{2} \overline{Q_{66}^{k}} \gamma_{xy}^{2} \\ &+ \overline{Q_{12}^{k}} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \overline{Q_{16}^{k}} \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} \\ &+ \overline{Q_{26}^{k}} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} \\ &- (\overline{Q_{11}^{k}} \overline{\alpha_{xx}}^{k} + \overline{Q_{12}^{k}} \overline{\alpha_{yy}}^{k} \\ &+ \overline{Q_{16}^{k}} \overline{\alpha_{xy}}^{k}) \varepsilon_{xx} \Delta T \\ &- (\overline{Q_{12}^{k}} \overline{\alpha_{xx}}^{k} + \overline{Q_{22}^{k}} \overline{\alpha_{yy}}^{k} \\ &+ \overline{Q_{26}^{k}} \overline{\alpha_{xy}}^{k}) \varepsilon_{yy} \Delta T \\ &- (\overline{Q_{16}^{k}} \overline{\alpha_{xx}}^{k} + \overline{Q_{26}^{k}} \overline{\alpha_{yy}}^{k}) \\ &+ \overline{Q_{66}^{k}} \overline{\alpha_{xy}}^{k}) \gamma_{xy} \Delta T) dx dy dz \end{split}$$

$$\begin{split} U_{MFC} &= \sum_{k=1}^{M} \int_{-L_{y/2}}^{L_{x/2}} \int_{-L_{y/2}}^{H_{k}} \int_{H_{k-1}}^{1} (\frac{1}{2} \overline{Q_{11}^{p}} \varepsilon_{xx}^{2}) \\ &+ \frac{1}{2} \overline{Q_{22}^{p}} \varepsilon_{yy}^{p} + \frac{1}{2} \overline{Q_{66}^{p}} \gamma_{xy}^{2} \\ &+ \frac{1}{2} \overline{Q_{22}^{p}} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yy} + \overline{Q_{16}^{p}} \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} \\ &+ \overline{Q_{26}^{p}} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} \\ &- \frac{1}{2} (\overline{Q_{11}^{p}} d_{31} \qquad (17) \\ &+ \overline{Q_{12}^{p}} d_{32}) \varepsilon_{xx} E_{3} \\ &- \frac{1}{2} (\overline{Q_{12}^{p}} d_{31} \\ &+ \overline{Q_{22}^{p}} d_{32}) \varepsilon_{yy} E_{3} \\ &- \frac{1}{2} (\overline{Q_{16}^{p}} d_{31} \\ &+ \overline{Q_{26}^{p}} d_{32}) \gamma_{xy} E_{3}) dx dy dz \end{split}$$

الکتریکی ذخیره شده در مواد پیزوالکتریک از رابطه زیر بهدست می آید:

$$W_{MFC} = \sum_{k=1}^{M} \int_{-L_{y/2}}^{L_{x/2}} \int_{-L_{y/2}}^{H_{x/2}} \int_{H_{k-1}}^{H_{k}} (\frac{1}{2} (\overline{Q_{11}^{p}} d_{31} + \overline{Q_{12}^{p}} d_{32}) \varepsilon_{xx} E_{3} + \frac{1}{2} (\overline{Q_{12}^{p}} d_{31} + \overline{Q_{22}^{p}} d_{32}) \varepsilon_{yy} E_{3} + \frac{1}{2} (\overline{Q_{16}^{p}} d_{31} + \overline{Q_{26}^{p}} d_{32}) \gamma_{xy} E_{3} + \frac{1}{2} T_{33} E_{3}^{2}) dx dy dz$$

$$(17)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(x,y) & \bar{Q}_{12}(x,y) & \bar{Q}_{16}(x,y) \\ \bar{Q}_{12}(x,y) & \bar{Q}_{22}(x,y) & \bar{Q}_{26}(x,y) \\ \bar{Q}_{16}(x,y) & \bar{Q}_{26}(x,y) & \bar{Q}_{66}(x,y) \end{bmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\Lambda) \\ -\Delta T \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{xx}(x,y) \\ \bar{\alpha}_{yy}(x,y) \\ \bar{\alpha}_{xy}(x,y) \end{bmatrix}^{(k)} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{22} \sin^4(\theta) \bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^{4}(\theta) \cos^{5}(\theta) + Q_{12}(\sin^{4}(\theta) + \cos^{4}(\theta))$$
$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}\sin^{4}(\theta) + 2(Q_{12} - 2(\theta)) + 2(\theta) + 2(\theta)$$

$$+ 2Q_{66}) \sin^{2}(\theta) \cos^{2}(\theta) + Q_{22} \cos^{4}(\theta)$$
(9)

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta)$$

$$\begin{split} \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\ &+ (Q_{12} - Q_{22} \\ &+ 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) \end{split}$$

$$\begin{split} \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} \\ &- 2Q_{66})\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) \\ &+ Q_{66}(\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \end{split}$$

و همچنین ضریبهای انبساط گرمایی برای هرلایه k ام به صورت  
رابطهی (۱۰) به دست می آیند [۱۲]:  
$$\overline{\alpha}_{xx} = \alpha_{11} \cos^2(\theta) + \alpha_{22} \sin^2(\theta)$$
  
 $\overline{\alpha}_{yy} = \alpha_{22} \cos^2(\theta) + \alpha_{11} \sin^2(\theta)$  (۱۰)  
 $\overline{\alpha}_{xy} = 2(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \cos(\theta) \sin(\theta)$   
یاد آوری می شود در رابطه های (۹) و (۱۰) زاویه  $\theta$  بر حسب متغیر

انتگرالگیری ها در رابطه های (۱۱) تا (۱۳) در راستای z در پیوست ارائه شده است. با استفاده از عبارات حدس زده شده برای میدان های جابه جایی، می توان میدان های کرنشی را محاسبه کرد. با جایگذاری این کرنش ها در رابطه های انرژی کرنشی و انتگرال گیری از آن ها، می توان انرژی کرنشی کل ورق را محاسبه کرد. این انرژی شامل انرژی کرنشی ورق مرکب با الیاف منحنی شکل و لایه های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف است و به صورت تابعی از ضریب های میدان های جابه جایی و همچنین تغییرات دما محاسبه می شوند:

$$\begin{split} \delta U_{Total} &= \left(\frac{\partial U_{Total}}{\partial \hat{u}}\right) \delta \hat{u} + \left(\frac{\partial U_{Total}}{\partial \hat{v}}\right) \delta \hat{v} \\ &+ \left(\frac{\partial U_{Total}}{\partial \hat{w}}\right) \delta \hat{w} \end{split} \tag{12}$$

در رابطه (۱۵)، عبارتهای داخل پرانتز، بهترتیب دستگاه معادلات حاصل از تغییرات انرژی پتانسیل کل نسبت به ضریبهای میدانهای جابهجایی *u*، *v* و *w* هستند. برای برقراری رابطه (۱۵)، لازم است تک تک دستگاه معادلات به دست آمده، برابر با صفر باشند. این مجموعه معادلات، تابعهای خطی از ضریبهای میدانهای جابهجایی درون صفحه هستند. بنابراین، میتوان ضریبهای میدانهای جابهجایی درون صفحه را بهصورت تابعهایی از ضریبهای میدانهای جابهجایی خارج صفحه به دست آورد. با حذف این ضریبهای، تعداد معادلات به تعداد ضریبهای میدانهای جابهجایی خارج از صفحه کاهش خواهد یافت.

با استفاده از این دستگاه معادلات، می توان شکل تغییریافته این ورقها را بعد از فرآیند پخت، با استفاده از روش نیوتون-رافسون و برنامه ویژه نوشته شده در نرمافزار متلب به دست آورد.

با توجه به اینکه در بیشتر موارد بیش از یک جواب برای دستگاه معادلات تعادل یافت می شود و بعضی از جواب ها ممکن است متناظر با حالت های ناپایدار سیستم باشد، برای ارزیابی جواب ها لازم است تغییرات دوم تابع انرژی پتانسیل کل و یا به

عبارتی ماتریس ژاکوبین ضریبهای دستگاه بهصورت زیر تشکیل گردد [۱۲]:

$$J_{ij} = \frac{\partial^2 U_{Total}}{\partial \hat{U}_i \partial \hat{U}_j}, \quad \hat{U} = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}] \tag{19}$$

ژاکوبین ماتریس ضرایب در نقاط متناظر با جوابهای حالت پایدار باید مثبت باشد. زمانی که یکی از مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین صفر و یا منفی باشد، ماتریس ژاکوبین مثبت معین نبوده و جواب به دست آمده نشاندهنده حالت ناپایدار سیستم است.

پارامترهای زیادی مانند ضخامت لایهها، آرایش لایهها، خواص مکانیکی مواد، ضخامت لایههای رزین، مرتبه میدانهای جابجایی بر شکل نهایی این ورقها تأثیرگذار هستند. برای هر ورق یک ضخامت بحرانی و یک طول بحرانی تعریف می گردد، چنانچه ضخامت ورق کمتر از ضخامت بحرانی و طول جانبی نیز بیشتر از طول بحرانی باشد ورق حالت دوپایداره پیدا میکند. اثر لایههای رزین و وابستگی دمایی خواص بر شکل نهایی ورق و نقطه انشعاب در مطالعات زیادی مورد بررسی قرار گرفتهاست. روندنمای حل معادلهها در متلب درشکل ۳ نشان داده شدهاست.

## ۳- خواص و مواد

در این مقاله از یک ورق مستطیلی مرکب مربعی چهار لایه استفاده میشود که طول و عرض آن ۳۸۰ میلیمتر و ضخامت هرلایه برابر با ۳/۰ میلیمتر است که در مجموع ضخامت کل ورق برابربا ۲/۱ میلیمتر میشود. ورق از نوع مرکب لایهای است که چهارلایه وسط از نوع مرکب 2-907 pop با الیاف منحنی شکل هستند که خواص مکانیکی و حرارتی لایهها در جدول ۱ ارائه شدهاست. همچنین جزئیات مربوط به جهت گیری الیاف مرکب سفتی متغیر در جدول ۲ گزارش شدهاست. به علاوه، دو لایه بالا و پایین پیزوالکتریک ازنوع مرکب ماکروالیاف هستند که بهصورت [۹۰] و جهت گیری لایه پایینی پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف بهصورت صفر درجه هستند که خواص مکانیکی و الکتریکی آنها در جدول۳ ارائه شدهاست. لازم به ذکر است ورق



خاصيت	مقدار
مدول الاستيسيته طولى E11 (گيگاپاسكال)	۱۵۶
مدول الاستيسيته عرضي E22 (گيگاپاسكال)	٨/٣۵
مدول الاستیسیته برشی Gı2 (گیگاپاسکال)	۴/۲
ضريب پواسون ٧١2	۰/٣٣
ضریب انبساط گرمایی طولی α <sub>11</sub> (× <sup>۶</sup> -۱۰ بر درجه سلسیوس)	<u> </u>
ضریب انبساط گرمایی عرضی α22 (× <sup></sup> ۱۰ بر درجه سلسیوس)	74
چگالی p (کیلوگرم برمترمکعب)	<b>१</b> २ ४ ०
ضخامت (ميلىمتر)	۰ /۲ <sup>۰</sup>

# جدول۱. خواص مکانیکی و گرمایی cycom 972-22 [۱۴]

نامگذاری	خانه اده	لايه بالايي		لايە پايىنى	
	5	T <sub>0</sub>	$T_1$	To	$T_1$
VS-1	>-VQ -1Q<4Q>/VQ 1Q<4Q	10	V۵	-10	-V۵
VS-2	>-90 -80<40>/90 80<40	٣٠	۶ ۰	-۳۰	_9°
VS-3	>-40 -40<40>/40 40<40	40	40	-40	-40
VS-4	>-~° -?`<40>/~` ?`<40	۶ ۰	۳۰	- ° °	-٣٠
VS-5	>-10 -V0<40>/10 V0<40	V۵	۱۵	-ν۵	-10

. جدول۲. جهت گیری الیاف منحنی شکل

مدول الاستيسيته طولي E11 (گیگاپاسکال)	79/4			
مدول الاستيسيته عرضي E <sub>22</sub> (گيگاپاسكال)	10/7			
مدول الاستيسيته برشي G <sub>12</sub> (گيگاپاسكال)	$\mathcal{F} / \circ \mathcal{F}$			
ضريب پواسون ٧١2	۰/٣١٢			
ضخامت (ميلىمتر)	۰ /٣			
ضریب پیزوالکتریک d₃₃ (× <sup>۹</sup> ۰۰ میلیمتر بر ولت)	٣٨٠			
ضریب پیزوالکتریک d₃۱ (× <sup>۹</sup> ۰۰ میلیمتر بر ولت)	-1V•			
ثابت دیالکتریک ɛx <sup>s</sup> (× <sup>۱۱–</sup> ۱۰ فراد بر میلیمتر)	١/۵			
چگالي ρ (کيلو گر م ير متر مکعب)	5440			

جدول۳. خواص مكانيكي و الكتريكي پيزوالكتريك MFC-P2-type [۲۶،۲۷]

پیزوالکتریک به منظور میدان الکتریکی بایستی ولتاژ در راستای ضخامت تغییر کند، از المان سه بعدی برای ورق و لایه های پیزوالکتریک استفاده شده است. برای شبکه بندی ورق از المان های سه بعدی ۲۰ گره ای با سه درجه آزادی استفاده شده است. به علت غیر خطی بودن مساله گزینه مربوط به غیر خطی بودن تغییرات هند سه برای بررسی جابه جایی های بورگ انتخاب شده است. حلگر مورد استفاده در نرم افزار از نوع Static General است. در قسمت شرایط مرزی حاکم بر مدل اجزای محدود، هر شش درجه آزادی در نقطه مرکزی ورق بسته شده است. برای مدل سازی الیاف منحنی شکل در آباکوس از زیر برنامه استفاده شده و به کمک برنامه ویژه نوشته شده در نرم افزار فرترن، شیب الیاف منحنی شکل در هر نقطه از ورق مطابق شکل ۲ در نرم افزار تعریف شده و سپس برنامه در قسمتی که توسط نرم افزار آباکوس برای فراخوانی

روش های عددی در مهندسی، سال ۴۴، شماره ۱، ۴۰۴

در دمای پخت ۱۸۰ درجه سانتی گراد قرار گرفته و پس از خنک شدن به دمای ۲۰ درجه میرسد از اینرو گرادیان گرمایی با اختلاف دمای ۱۶۰ درجه سانتی گراد را تجربه میکند. شکل۴ جهت گیری الیاف منحنی شکل ورق مستطیلی مرکب مورد تحقیق را نشان می دهد.

# ۵- روش اجزای محدود

برای اعتبارسنجی نتایج بهدست آمده از تحلیل استاتیکی از نرمافزار اجزای محدود آباکوس استفاده شدهاست. برای شبکهبندی ورق و لایه های پیزوالکتریک از المان های دوبعدی (S4R) مخصوص پوسته استفاده شدهاست. باتوجه بهنازک بودن ورق و پیزوالکتریک هردو سازه در تحلیل استاتیکی بهصورت پوسته مدلسازی شدهاست اما باتوجه به بدون ضخامت بودن المان پوسته در آباکوس و اینکه در مواد



شكل ۴. جهت گیری الیاف منحنی شكل ورق مستطیلی الف) IS-3 ب) IS-3 ج) IS-3 د) VS-4 ها VS-5 ها VS-3

زیربرنامهها مشخص شده فراخوانی میشود و ورق الیاف منحنی در آباکوس تعریف میگردد.

۶– نتایج و بحث

**۶–۱– اعتبارسنجی** در این قسمت نتایج حاصل از تحلیل استاتیکی ورق مرکب دوپایداره با الیاف منحنی شکل و با لایههای پیزوالکتریک مرکب

ماکروالیاف ارائه شده است. این نتایج که شامل جابه جایی خارج از صفحه و حالت های پایدار ورق هستند برای چینش های مختلف الیاف لایه های مرکب ورق ارائه شده است. به علاوه به منظور اعتبار سنجی نتایج به دست آمده از مدل نیمه تحلیلی، این نتایج با نتایج ارائه شده توسط نرمافزار اجزای محدود آباکوس مقایسه شده است.

		لحتريك كامپوريني ماكروا	پيروا	
نوع ورق	مدل	С	В	А
	توسعه يافته	Y9/V90	21/214	۲۵/0۶۶
VS-1	آباكوس	29/800	29/810	74/440
	خطا(./)	• /¥	٣/٣	٣/ ۰
	توسعه يافته	<b>W1/V9V</b>	30/17V	20/904
VS-2	آباكوس	٣°/٩٨°	36/198	36/19V
	خطا(./)	۲/۵	۲/۹	• /A
	توسعه يافته	$\gamma$ /17V	40/710	$\gamma / 1 $
VS-3	آباكوس	$\Psi V/\Lambda P V$	¥ ° /¥9	$\gamma V/\Lambda SV$
	خطا(./)	• / 9	•/¥	• / 6
VS-4	توسعه يافته	۳۲/۳۶ ۰	312/214	40/214
	آباكوس	WY/19A	34/48V	4 °/7 °7
	خطا(./)	• / <b>\</b>	۲/۳	۰ /٣
VS-5	توسعه يافته	٢۶/١٨.	۳۳/۰۶۵	36/162
	آباكوس	24/212	377/810	۳۶/۹۱۰
	خطا(./)	۵/۵	١/۶	۰/۲

جدول۴. مقایسه جابهجایی (برحسب میلیمتر) خارج از صفحه ورق مستطیلی چهارلایه با الیاف منحنی شکل بدون لایههای بینوالکتر یک کامیه زیتر ماک والیاف

پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف را نشان میدهد که از دو روش نیمه تحلیلی و اجزای محدود به دست آمده اند. همانطور که از این جدول مشخص است، نتایج سازگاری بسیارخوبی با هم دارد. به علاوه، نتایج نشان می دهد که بیشترین و کمترین جلبه جایی مرکز ورق به ترتیب مربوط به چینش 4-VS و 1-VS است. بنابراین، می توان نتیجه گرفت که ورق با چینش 4-VS و احکا به ترتیب مناسب برای برداشت انرژی و مورفینگ هستند. از مقایسه نتایج در جدول ۴ و ۵ مشخص می شود که افزودن لایه های پیزوالکتریک ماکروالیاف به ورق می شود به کاهش چشم گیر جابجایی ها در نقاط A، B و C ورق می شود به عبارت دیگر سختی سازه در اثر افزودن این لایه افزایش می یابد. جدول ۴ جابه جایی (بر حسب میلی متر) قسمت های مختلف ورق با الیاف مستقیم و منحنی شکل چهارلایه بدون لایه های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف را نشان می دهد که از دو روش تحلیلی و آباکوس به دست آمده اند. در جدول ۴ منظور از نقاط A، B و C به ترتیب گوشه لبه سمت راست ورق، وسط لبه ورق و گوشه لبه سمت چپ ورق است. همانطور که از این جدول مشخص است، نتایج متلب سازگاری بسیار خوبی با نتایج به دست آمده از آباکوس دارد. به علاوه، نتایج نشان می دهد که بیشترین و کمترین جابه جایی مرکز ورق به ترتیب مربوط به چینش S-SV و I-SV است. بنابراین، می توان نتیجه گرفت که ورق با چینش S-3 و NS-3 به ترتیب مناسب برای برداشت انرژی و مورفینگ

جدول۵ جابهجایی (برحسب میلیمتر) قسمتهای مختلف ورق با الیاف مستقیم و منحنی شکل چهارلایه همراه با لایههای

کامپورینی ماکروالیاف					
نوع ورق	نوع حل	С	В	А	
	توسعهيافته	۵/۳۲۶	٩/٩١٢	۵/۴۱۵	
VS-1	آباكوس	$\Delta/\Upsilon\circ\Delta$	10/117	۵/۴۰۳	
	خطا(./)	۰ /٣	١/٩	۰/۲	
	توسعهيافته	٨/٧٩٩	17/400	$\Lambda/4\Lambda$ )	
VS-2	آباكوس	٩/•٨•	17/881	۹/۱۰۳	
	خطا(./)	٣/١	1/8	١/٣	
	توسعهيافته	17/181	10/11	13/181	
VS-3	آباكوس	13/519	10/V9	13/719	
	خطا(./)	۰ /٣	۰ /٣	۰ /٣	
	توسعهيافته	۱۳/۶ • V	1 <i>8</i> / • VY	14/193	
VS-4	آباكوس	17/848	18/019	14/811	
	خطا(./)	۰ /۲	۰/٣	• /V	
	متلب	11/884	14/400	14/480	
VS-5	آباكوس	11/22	14/401	14/011	
	خطا(./)	١/٣	• / • • V	٣/٢	

جدول۵. مقایسه جابهجایی (برحسب میلیمتر) خارج از صفحه ورق مستطیلی چهارلایه با الیاف منحنی شکل با لایههای پیزوالکتریک

آباکوس بهدست آمدهاند. شکل ۹ مقایسه جابهجاییهای گوشههای ورق با چینشهای مختلف الیاف منحنی شکل را نشان میدهد. همانطور که از شکلها مشخص است، نتایج تحلیلی سازگاری بسیارخوبی با نتایج بهدست آمده از آباکوس دارد.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، تحلیل استاتیکی یک ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با الیاف منحنی شکل و لایههای پیزوالکتریک تقویتشده با ماکروالیاف بررسی شدهاست. برای این منظور، انرژی پتانسیل و کارنیروهای خارجی ورق مرکب با استفاده از رابطههای کرنش-جابهجایی غیرخطی فونکارمن استخراج شدهاند. سپس، با استفاده از روش ریلیریتز و کمینهسازی انرژی پتانسیل سیستم، حالتهای پایدار ورق به دست آمدهاند. در ادامه، با استفاده از مدل توسعهیافته هیر، جابهجاییهای به طور کلی با استفاده از تحلیلهای ارائه شده در این بخش می توان متناسب با نوع کاربرد مورد انتظار چینش مطلوب را انتخاب کرد. البته به منظور انتخاب چینش مناسب پیشنهاد می شود به کمک معادلات استخراج شده، مساله بهینه سازی با تابع هدف مورد نظر به کار گرفته شود.

۶-۲- حالتهای پایدار

در این قسمت حالتهای پایدار ورق با الیاف مستقیم و منحنی شکل با انواع مختلف که از روش تحلیلی و آباکوس بهدست آمده، ارائه شدهاست. شکلهای ۵ و ۶ بهترتیب حالتهای پایدار اول و دوم انواع مختلف ورق مرکب بدون لایههای پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف را نشان میدهد که از دو روش تحلیلی و آباکوس بهدست آمدهاند. شکل ۷ و شکل ۸ بهترتیب حالتهای پایدار اول و دوم ورق مرکب همراه با لایههای پیزوالکتریک



شکل ۵. مقایسه حالت پایدار اول برای ورق مرکب بدون لایه های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف الف) IS-3 ب) S-3 ج) S-3 د)

VS-5 (۵ VS-4







(ج)



شکل ۶. مقایسه حالت پایدار دوم برای ورق مرکب بدون لایههای پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف الف) VS-1 ب) VS-2 ج) VS-3 د) VS-4 ها VS-5 ها VS-4

•



(ھ)

شکل ۷. مقایسه حالت پایدار اول برای ورق مرکب با لایه های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف الف) I-SV ب) VS-2 ج) VS-3 د) -VS 4 ها S-5



شکل ۸. مقایسه حالت پایدار دوم برای ورق مرکب با لایههای پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف الف) I-VS ب) S-S ج) S-S د) -VS شکل ۸. مقایسه حالت پایدار دوم برای ورق مرکب با لایههای پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف الف) I-VS ب) S-3 ج) S-3 د)



شکل ۹. مقایسه جابهجاییهای گوشههای ورق بدون لایههای پیزوالکتریک در حالتهای مختلف الف) (w(x,Ly-2) ب) w(x,Ly-2) م ج) (x,-Ly-2)

لایه های پیزوالکتریک به ترتیب مربوط به چینش S-S و I-SV و VS-۱ است که به ترتیب مناسب برای کاربرد برداشت انرژی و مورفینگ هستند. افزودن لایه های پیزوالکتریک ماکروالیاف سختی ورق را افزایش می دهد و منجر به کاهش جابجایی ها ورق می شود. به طور کلی با استفاده از نتایج ارائه شده در این مقاله می توان متناسب با نوع کاربرد مورد انتظار چینش مطلوب را انتخاب کرد. البته به منظور انتخاب چینش مناسب پیشنهاد می شود به کمک معادلات استخراج شده، مساله بهینه سازی با تابع هدف مورد نظر به کار گرفته شود. قسمتهای مختلف ورق محاسبه و با نتایج شبیهسازی در نرمافزار آباکوس مقایسه شدهاند. همچنین برای میدان جابهجایی از تابعهای شکل مرتبه هفت استفاده شدهاست. در نهایت، جابهجاییهای قسمتهای مختلف ورق به همراه حالتهای پایدار آن برای پنج حالت مختلف چینش الیاف منحنی شکل استخراج شدهاند و با مدل اجزای محدود مقایسه شدهاند. مدل توسعهیافته مرتبه هفت میدان جابجایی سازگاری بسیار خوبی با نتایج بدست آمده از روش اجزای محدود دارد. بر اساس نتایج

## ۸- پيوست

$$\begin{split} U_{VS} &= \int_{-L_{y/2}}^{L_{y/2}} \int_{-L_{y/2}}^{-L_{y/2}} \left( -A_{11}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xx}^{-} - A_{16}\Delta T\gamma_{xy0} a_{xx}^{-} - A_{12}\Delta T\epsilon_{yy0} a_{xx}^{-} - A_{16}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xy}^{-} - A_{12}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xy}^{-} - A_{12}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xy}^{-} - A_{12}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xy}^{-} - A_{12}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xy}^{-} - A_{16}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xy}^{-} - A_{12}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xx}^{-} - A_{16}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xy}^{-} - A_{12}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xx}^{-} - A_{16}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xy}^{-} - A_{12}\Delta T\epsilon_{xx0} a_{xy}^{-} - B_{16}\Delta Tk_{xy0} a_{xy}^{-} - A_{26}\Delta T\epsilon_{yy0} a_{xy}^{-} - A_{26}\Delta T\epsilon_{yy0} a_{yy}^{-} - A_{26}\Delta T\epsilon_{yy0} a_{yy}^{-} - A_{26}\Delta T\epsilon_{yy0} a_{yy}^{-} - A_{26}\Delta T\epsilon_{yy0} a_{yy}^{-} - A_{26}\Delta T\epsilon_{xy0} a_{yy}^{-} - A_{26}\Delta T\epsilon_{xy0} a_{yy}^{-} - A_{26}\Delta T\epsilon_{yy0} a_{yy}^{-} + A_{26}\Delta \epsilon_{yy0} \epsilon_{yy0} + A_{26}\epsilon_{xy0} \epsilon_{yy0} + \epsilon_{yy0}^{-} - A_{26}\Delta \epsilon_{yy0} \epsilon_{yy0} + B_{26}\epsilon_{xy0} \epsilon_{yy0} + A_{26}\epsilon_{xy0} \epsilon_{yy0} + B_{26}\epsilon_{xy0} \epsilon_{yy0} + B_{26}\epsilon_{xy0} \epsilon_{yy0} + A_{26}\epsilon_{xy0} \epsilon_{yy0} \epsilon_{yy0} + A_{26}\epsilon_{xy0} \epsilon_{yy0} \epsilon_{yy0}$$

#### References

- Zhang, H., Yang, D., and Sheng, Y., "Performancedriven 3D printing of continuous curved carbon fibre reinforced polymer composites: A preliminary numerical study", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 151. pp. 256-264, 2018.
- [2] Sanz-Herrera, J. A., Apolinar-Fernandez, A., Jimenez-Aires, A., Perez-Alcantara, P., Domínguez, J., and Reina-Romo, E., "Multiscale characterization of the mechanics of curved fibered structures with application to biological materials", *bioRxiv*, 2024.
- [3] Hyer, M. W., and Lee, H. H., "The use of curvilinear fiber format to improve buckling resistance of composite plates with central circular holes", *Composite Structures*, Vol. 18. No. 3, pp. 239-261,1991.
- [4] Waldhart, C., "Analysis of tow-placed, variablestiffness laminates", Doctoral dissertation, Virginia Tech. 1996.
- [5] Langley, P. T., "Finite element modeling of towplaced variable-stiffness composite laminates", Doctoral dissertation, Virginia Tech. 1999.
- [6] Jegley, D. C., Tatting, B. F., and Guerdal, Z., "Automated Finite Element Analysis of Elastically-Tailored Plates" (No. NASA/CR-2003-212679). 2003.
- [7] Tatting, B. F., Gürdal, Z., and Jegley, D., "Design and manufacture of elastically tailored tow placed plates" (No. NASA/CR-2002-211919). 2002.
- [8] Senocak, E., and Tanriover, H., "Analysis of composite plates with variable stiffness using Galerkin method", *The Aeronautical Journal*, Vol. 111, No. 1118. Pp. 247-255. 2007.
- [9] Lopes, C. S., Gürdal, Z., and Camanho, P. P., "Variable-stiffness composite panels: Buckling and first-ply failure improvements over straight-fibre laminates", *Composite Structures*, Vol. 86, No. 9, pp. 897-907. 2008.
- [10] Lopes, C. S., Gürdal, Z., and Camanho, P. P., "Tailoring for strength of composite steered-fibre panels with cutouts", *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 41, No. 12, pp. 1760-1767. 2010.
- [11] Sousa, C. S., Camanho, P. P., and Suleman, A., "Analysis of multistable variable stiffness composite plates", *Composite Structures*, Vol. 98, pp. 34-46. 2013.
- [12] Haldar, A., Reinoso, J., Jansen, E., and Rolfes, R., "Thermally induced multistable configurations of variable stiffness composite plates: Semi-analytical and finite element investigation", *Composite Structures.*, Vo. 183, pp. 161-175. 2018.
- [13] Anilkumar, P. M., and Rao, B. N., "Impact of hygrothermal environment on the bistability of variable stiffness laminates with curvilinear fibre paths", *International Journal of Advances in*

*Engineering Sciences and Applied Mathematics*. Vol. 13, No. 1, pp. 33-48. 2021.

- [14] Sharma, N., Swain, P. K., Maiti, D. K., and Singh, B. N., "Static and free vibration analyses and dynamic control of smart variable stiffness laminated composite plate with delamination", *Composite Structures.*, Vol. 280, pp. 114793. 2022.
- [15] Shukla, R., and Pradyumna, S., "Static Response of a Variable Stiffness Composite Laminated Plate Embedded with a PFRC Layer", In Recent Advances in Computational and Experimental Mechanics, Vol—I: Select Proceedings of ICRACEM 2020 (pp. 435-446). Springer Singapore.2022
- [16] Anilkumar, P. M., Scheffler, S., Haldar, A., Brod, M., Rao, B. N., Jansen, E. L., and Rolfes, R., "Nonlinear dynamic modeling of bistable variable stiffness composite laminates", *Journal of Sound and Vibration.*, Vol. 545, pp. 117417. 2023.
- [17] Guo, X., Dong, T., and Guo, Z., "Study on the rectangular bistable composite laminated plate through dynamic modeling, numerical simulation and experiment." *Acta Mechanica*, Vol. 234, No. 9, pp. 4297-4313. 2023.
- [18] Lemos, D. M., Marques, F. D., and Ferreira, A. J., "A review on bistable composite laminates for aerospace applications", *Composite Structures*, pp. 117756. 2023.
- [19] Guo, X. T., Zhang, W., and Zhang, Y. F., "Experimental and numerical investigations on nonlinear snap-through vibrations of an asymmetrically composite laminated bistable thin plate simple supported at four corners", *Engineering Structures.*, Vol. 296, pp. 116926. 2023.
- [20] Zhang, Z., Xu, J., Ma, Y., Sun, M., Chai, H., Wu, H., and Jiang, S., "Design and analysis of multistable curvilinear-fiber laminates based on continuous fiber 3D printing of thermosetting resin matrix", *Composite Structures.*, Vol. 307, pp. 116616. 2023.
- [21] Guo, Z., Xu, J., Cao, D., Dong, T., and Ma, W.," The static and dynamic regimes of the bistable asymmetric cross-ply composite laminated plates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, pp.1-15. 2023
- [22] Taki, M. S., Tikani, R., and Ziaei-Rad, S., "A comprehensive formulation for determining static characteristics of mosaic multi-stable composite laminates under large deformation and large rotation", *Thin-Walled Structures*, Vol. 197, pp. 111545. 2024.
- [23] Mukherjee, P., Mukherjee, A., Arockiarajan, A., and Ali, S. F., "Dynamics of bistable composite plates", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 104767. 2024.
- [24] Sharma, N., Swain, P. K., Maiti, D. K., and Singh, B. N., "Static and free vibration analyses and dynamic

منابع

control of smart variable stiffness laminated composite plate with delamination", *Composite Structures*, Vol. 280, 114793.

- [25] Hashemi, S., Shahri, P. K., Beigzadeh, S., Zamani, F., Eratbeni, M. G., Mahdavi, M., Heidari, A., Khaledi, H. and Abadi, M. R. R., "Nonlinear free vibration analysis of In-plane Bi-directional functionally graded plate with porosities resting on elastic foundations", *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 14, No. 01, pp. 2150131. 2022.
- [26] Lee, A. J., and Inman, D. J., "Electromechanical modelling of a bistable plate with macro fiber composites under nonlinear vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 446, pp.326-342. 2019.
- [27] Lee, A. J., and Inman, D. J., "A multifunctional bistable laminate: Snap-through morphing enabled by broadband energy harvesting", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 29, No. 11, pp. 2528-2543, 2018.