



Original Article

Investigation of the static stable states of a bistable composite rectangular plate with curved fibers and piezoelectric layers

Ehsan Hendesi^{id}, Reza Tikani^{*id} and Mohammad Sina Taki^{id}

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran.

Abstract: In this paper, the static analysis of a bistable composite rectangular plate with curved fibers, free boundary conditions and piezoelectric layers reinforced with macro fibers is investigated. To this end, the potential energies and the work of external forces for the composite rectangular plate are derived using von Karman's nonlinear strain-displacement relations. The stable states of the rectangular plate are then determined using the Rayleigh-Ritz method through minimizing the potential energy of the system. Subsequently, the displacements of various parts of the rectangular plate are calculated using an extended higher-order model, and compared with the results by simulation in Abaqus. For the first time, a novel seventh-order shape function for the out-of-plane displacement field is proposed to enhance the accuracy of the results. Finally, the displacements and stable states of the rectangular plate are extracted for five different curved fiber configurations, and compared with the results from the finite element model. The findings demonstrate excellent agreement between the two methods. Additionally, this study uniquely examines the impact of piezoelectric layers reinforced with macro fibers on the static stable states of the system for the first time.

Keywords: Static Analysis, Composite Materials, Curved Fibers, Developed Hyer's Theory, Piezoelectric layers.

Received: Oct. 13, 2024; Revised: Dec. 23, 2025; Accepted: Feb. 18, 2025; Published Online: June 23, 2025.

* Corresponding Author: r_tikani@iut.ac.ir

How to Cite: Hendesi Ehsan, Tikani Reza and Taki Mohammad Sina, Investigation of the Static Stable States of a Bistable Composite Rectangular Plate with Curved Fibers and Piezoelectric Layers, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 44(1), 21-41; DOI: 10.47176/jcme.44.1.1039.





بررسی حالت‌های پایدار استاتیکی ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با الیاف منحنی شکل با لایه‌های پیزوالکتریک

احسان هندسی^{ID}، رضا تیکنی^{ID*} و محمد سینا تاکی^{ID}

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده- در این مقاله، به تحلیل استاتیکی یک ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد که دارای لایه‌های پیزوالکتریک تقویت‌شده با ماکروالیاف است، پرداخته شده است. برای این منظور، ابتدا انرژی‌های پتانسیل و کار نیروهای خارجی ورق مستطیلی مرکب با استفاده از رابطه‌های کرنش-جابجایی غیرخطی و ن کارمن استخراج شده‌اند. سپس حالت‌های پایدار ورق مستطیلی با استفاده از روش ریلی-ریتز و کمینه‌سازی انرژی پتانسیل سیستم به دست آمده‌اند. در ادامه، جابجایی‌های قسمت‌های مختلف ورق مستطیلی با استفاده از مدل توسعه‌یافته هیر محاسبه و با نتایج آباکوس مقایسه شده‌اند. به منظور افزایش دقت نتایج، برای اولین بار، تابع شکل جدیدی از مرتبه هفت برای میدان جابجایی خارج از صفحه ارائه شده است. در نهایت، جابجایی‌های قسمت‌های مختلف ورق مستطیلی به همراه حالت‌های پایدار آن برای پنج حالت مختلف چینش الیاف منحنی شکل استخراج شده‌اند و با مدل اجزای محدود مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که بین نتایج دو روش سازگاری بسیار خوبی وجود دارد. همچنین در این مقاله برای اولین بار اثر وجود لایه‌های پیزوالکتریک تقویت‌شده با ماکروالیاف روی حالت‌های پایدار استاتیکی سیستم بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل استاتیکی، ورق مستطیلی مرکب، الیاف منحنی شکل، نظریه توسعه‌یافته هیر، لایه‌های پیزوالکتریک.

دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۲۲، بازنگری: ۱۴۰۳/۱۰/۰۳، پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۳۰، اولین انتشار: ۱۴۰۴/۰۴/۰۲

* نویسنده مسئول، رایانامه: r_tikani@iut.ac.ir



فهرست علائم

a	طول ورق	u_0	جابه‌جایی لایه میانی ورق در راستای محور x
b	عرض ورق	V	کار نیروهای خارجی
E	مدول الاستیسیته	v_0	جابه‌جایی لایه میانی ورق در راستای محور y
h	ضخامت ورق	w_0	جابه‌جایی لایه میانی ورق در راستای محور z
I	ممان اینرسی جرمی	γ	کرنش برشی
K	انرژی جنبشی	ε	کرنش عمودی
M	ممان خمشی برآیند	ν	ضریب پواسون
N	نیروی عمودی برآیند	ρ	چگالی
Q_{ij}	ضریب‌های سفتی	σ	تنش عمودی
U	انرژی کرنشی	τ	تنش برشی

۱- مقدمه

مواد مرکب با الیاف منحنی شکل یک نوع مواد مرکب هستند که الیاف پیوسته و منحنی را درون ماده زمینه پلیمری یا فلزی جای می‌دهند. این الیاف معمولاً از جنس موادی مانند کربن، آرامید، گرافیت و یا شیشه هستند. استحکام مواد مرکب به طور قابل توجهی تحت تأثیر نحوه آرایش الیاف در ماده زمینه قرار دارد، به‌ویژه الیاف مستقیم و خمیده که هر یک مزایا و محدودیت‌های خاص خود را دارند. مواد مرکب با الیاف مستقیم استحکام کششی و سختی بالایی در جهت هم‌راستا با الیاف نشان می‌دهند و برای کاربردهایی با بارگذاری یک‌جهته ایده‌آل هستند. با این حال، این مواد بسیار ناهمسانگرد هستند و عملکرد ضعیف‌تری در جهت‌های عرضی یا غیرهم‌راستا دارند و مستعد تمرکز تنش و گسترش ترک هستند. در مقابل، مواد مرکب با الیاف خمیده در شرایط بارگذاری چندجهته یا پیچیده برتری دارند، زیرا توانایی توزیع یکنواخت‌تر تنش‌ها، افزایش مقاومت در برابر شکست و انحراف گسترش ترک را دارند. با این وجود، الیاف خمیده معمولاً استحکام کششی کمتری در جهت بار اصلی دارند، تمرکز تنش موضعی ایجاد می‌کند و ساخت آن‌ها پیچیده‌تر و پرهزینه‌تر است [۱].

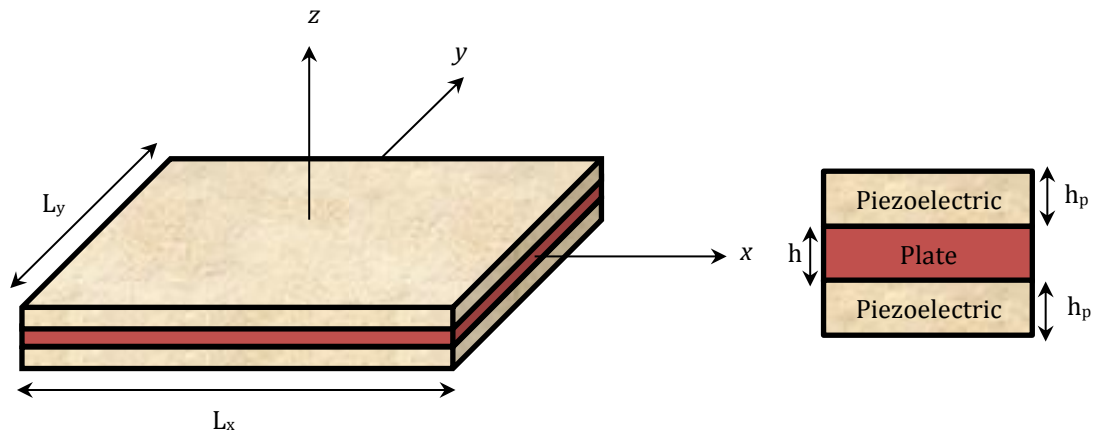
الیاف مستقیم برای کاربردهایی مانند سازه‌های هوافضا که نیاز به استحکام بالا در یک جهت دارند مناسب‌تر هستند، در حالی که الیاف خمیده برای قطعات با هندسه‌های پیچیده یا توزیع تنش غیرخطی، مانند قطعات خودرویی و ایمپلنت‌های زیست‌پزشکی، گزینه بهتری محسوب می‌شوند [۱،۲].

به دلیل اهمیت موضوع، پژوهشگران زیادی روی مواد مرکب با الیاف منحنی شکل کار کردند. به‌عنوان مثال، در سال ۱۹۹۱، هیر و لی [۳] مقاومت کمانشی یک ورق مستطیلی مرکب لایه‌ای با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد را با استفاده از روش اجزای محدود بررسی کردند و دریافتند که چنین ورق‌هایی دارای بار کمانشی بیشتری از ورق‌های با الیاف مستقیم هستند. در سال ۱۹۹۶، والدهارت [۴] کمانش و پاسخ درون صفحه‌ای ورق‌های مستطیلی مرکب لایه‌ای با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد را تحت بارگذاری تک‌محوره تحلیل کرد. او نشان داد که استفاده از الیاف منحنی شکل به جای الیاف مستقیم، می‌تواند باعث افزایش بار کمانشی تا ۴۴٪ و افزایش سفتی محوری تا ۱۲۴٪ شود. در سال ۱۹۹۹، لانگلی [۵] یک مدل اجزای محدود برای ورق‌های مستطیلی مرکب لایه‌ای با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد معرفی کرد و پاسخ درون صفحه‌ای، تغییرشکل، شکست و تنش‌ها را تحلیل کرد. تاتینگ و گوردال [۶،۷]

درسال‌های ۲۰۰۲ و ۲۰۰۳ یک نرم‌افزار توسعه داده شده ارائه کردند که به کمک آن موفق شدند کمانش، تغییر شکل و توزیع تنش را در یک ورق مستطیلی مرکب لایه‌ای با الیاف‌های منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد تحلیل کنند. سنوکاک و تناریوور [۸] در سال ۲۰۰۷ تنش‌ها و تغییر مکان‌های ورق‌های مستطیلی مرکب لایه‌ای با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد را با استفاده از روش گالرکین به دست آوردند. لوپس و همکاران [۹، ۱۰] درسال‌های ۲۰۰۸ و ۲۰۱۰ با استفاده از نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس، کمانش، شکست و تنش‌های بین لایه‌ای ورق‌های مستطیلی مرکب با الیاف‌های منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد را مورد مطالعه قرار دادند که این مطالعات شامل تغییر شکل‌های قائم و تنش‌های عمودی ورق بود. سوزا و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۱۳ به تحلیل پایداری یک ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با سختی متغیر و شرایط مرزی آزاد به کمک روش اجزای محدود پرداختند. آن‌ها حالت‌های پایدار ورق را با حالت‌های پایدار ورق‌های تقویت شده با الیاف مستقیم مقایسه کردند. در سال ۲۰۱۷، هالدار و همکاران [۱۲] به کمک روش نیمه تحلیلی و نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس به بررسی و تحلیل یک ورق مستطیلی مرکب چندپایداره سختی متغیر با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد تحت بارگذاری گرمایی پرداختند. آنیکومارو راثو [۱۳] در سال ۲۰۲۱ تأثیر محیط گرمایی را روی دوپایداری ورق‌های مستطیلی سفتی متغیر با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد بررسی و تحلیل کردند. شرما و همکاران [۱۴] به تجزیه و تحلیل استاتیک، ارتعاشات آزاد و کنترل دینامیکی ورق مستطیلی مرکب چندلایه سفتی متغیر با لایه‌های پیزوالکتریک و شرایط مرزی آزاد با در نظر گرفتن اثر لایه‌لایه شدن پرداختند.

در مقاله حاضر، تحلیل استاتیکی یک ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با الیاف منحنی-شکل و لایه‌های پیزوالکتریک تقویت شده با ماکروالیاف و شرایط مرزی آزاد بررسی شده است. هدف این مطالعه، بررسی اثر چینش مختلف الیاف منحنی شکل و لایه‌های پیزوالکتریک بر رفتار استاتیکی ورق مرکب است.

دوپایداره سفتی متغیر با الیاف منحنی شکل و شرایط مرزی آزاد تحت بارگذاری مکانیکی در چهارگوشه ورق پرداختند. گو و همکاران [۱۷] به مدل‌سازی دینامیکی ورق مستطیلی مرکب چندلایه دوپایداره و شرایط مرزی آزاد به کمک شبیه‌سازی عددی و آزمایشگاهی پرداختند. لموس و همکاران [۱۸] به مروری بر ورق‌های مستطیلی مرکب دو پایداره برای کاربردهای هوافضا پرداختند. گو و همکاران [۱۹] به کمک روش‌های تجربی و عددی بر روی ارتعاشات غیرخطی یک ورق مستطیلی نازک دوپایداره چندلایه مرکب نامتقارن با شرایط مرزی مفصلی کار کردند. ژانگ و همکاران [۲۰] به طراحی و تجزیه و تحلیل ورق‌های مستطیلی الیاف منحنی چندپایداره و شرایط مرزی آزاد به کمک چاپگر سه‌بعدی الیاف پیوسته و ماده زمینه رزین گرماسخت پرداختند. گو و همکاران [۲۱] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق‌های مستطیلی چندلایه کامپوزیتی متقارن و نامتقارن و شرایط مرزی آزاد به کمک روش‌های اجزای محدود و تجربی پرداختند. تاکی و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۲۴ یک فرمول جامع برای تعیین ویژگی‌های استاتیکی ورق‌های مستطیلی مرکب چندپایداره موزاییکی و شرایط مرزی آزاد تحت تغییر شکل و چرخش زیاد تعیین کردند. موخرجی و همکاران [۲۳] به کمک روش‌های عددی، تحلیلی و تجربی به تحلیل دینامیکی ورق‌های مستطیلی مرکب دوپایداره و شرایط مرزی آزاد پرداختند و تأثیر پارامترهای هندسی و فیزیکی ورق را روی رفتار غیرخطی سازه مورد بررسی قرار دادند. شرما و همکاران [۲۴] به تجزیه و تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق مستطیلی مرکب چندلایه دارای آسیب با سفتی متغیر و لایه‌های پیزوالکتریک و شرایط مرزی آزاد پرداختند.



شکل ۱. ورق مستطیلی مرکب با لایه‌های پیزوالکتریک

برای تحلیل‌های دینامیکی و برداشت انرژی از این ورق‌ها در نظر گرفته شود.

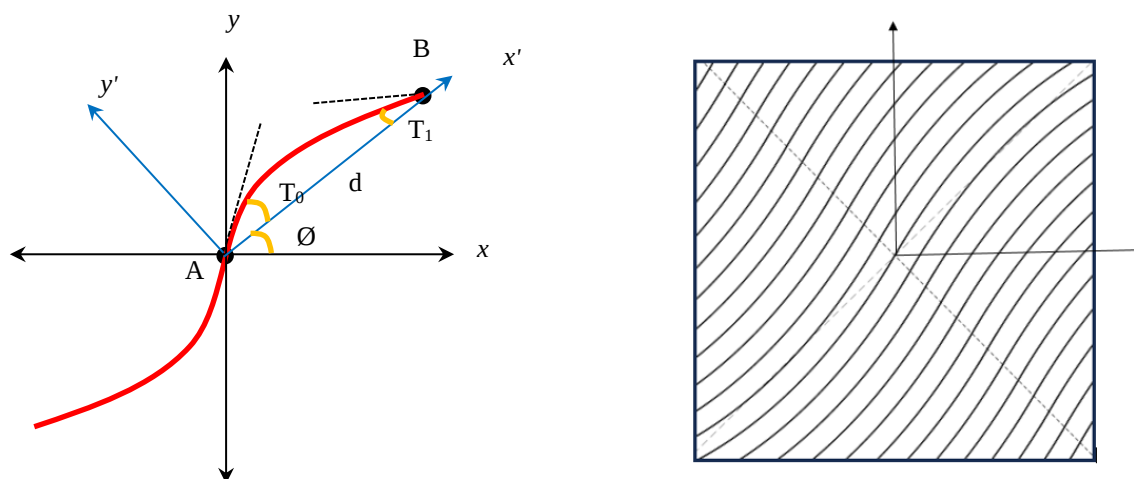
۲- مدل‌سازی ورق مرکب با الیاف منحنی شکل با لایه پیزوالکتریک

شکل ۱ یک ورق مستطیلی چهارلایه مرکب دوطبقه به همراه دولایه پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف و شرایط مرزی با لبه‌های آزاد را نشان می‌دهد. به منظور حذف حرکت صلب ورق، تمامی درجات آزادی مرکز ورق گرفته شده است. طول و عرض ورق به همراه لایه‌های پیزوالکتریک به ترتیب برابر با L_x و L_y و همچنین ضخامت ورق مستطیلی و لایه پیزوالکتریک به ترتیب برابر با h و h_p است. همچنین ورق هنگام پخت تحت گرادیان گرمایی به اندازه ΔT قرار دارد. مبدا دستگاه مختصات کارتزین $(x-y-z)$ در مرکز و روی صفحه میانی ورق واقع شده است. لازم به ذکر است که شرایط مرزی پیزوالکتریک به صورت اتصال کوتاه است.

به منظور محاسبه رابطه‌های کرنش، ابتدا باید میدان جابه‌جایی براساس شرایط مرزی هندسی و روش ریلی-ریتز تقریب زده شود. بنابراین میدان‌های جابه‌جایی به صورت چندجمله‌ای‌های کامل (مرتبه هفت) به صورت رابطه‌های (۱) تا (۳) تقریب زده می‌شوند:

برای این منظور، ابتدا انرژی‌های پتانسیل و کارنیروهای خارجی ورق مرکب با استفاده از رابطه‌های کرنش-جابه‌جایی غیرخطی فون کارمن استخراج شده‌اند. سپس، حالت‌های پایدار ورق با استفاده از روش ریلی-ریتز و کمینه‌سازی انرژی پتانسیل سیستم به دست آمده‌اند. در ادامه، جابه‌جایی‌های قسمت‌های مختلف ورق با استفاده از مدل توسعه‌یافته هیر محاسبه و با نتایج شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که بین نتایج دو روش سازگاری بسیار خوبی وجود دارد. در نهایت اثر چینش‌های مختلف الیاف و همچنین لایه‌های پیزوالکتریک تقویت‌شده با ماکروالیاف روی پایداری و جابه‌جایی نقاط مختلف ورق بررسی شده است. با بررسی مقالات پیشین، نوآوری‌های مقاله حاضر به صورت زیر قابل بیان است:

- (۱) اثر چینش و زوایای مختلف الیاف منحنی شکل روی پایداری ورق‌های مرکب با سختی متغیر با استفاده از توابع چندجمله‌ای درجه هفت برای محاسبه میدان جابه‌جایی بررسی می‌شود. استفاده از این توابع به مراتب دقت بالاتری نسبت به توابع درجه پایین‌تر در تحلیل ورق مذکور دارد.
- (۲) اثر لایه‌های پیزوالکتریک مرکب تقویت‌شده با ماکروالیاف بر روی پایداری استاتیکی ورق بررسی می‌شود که تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است و می‌تواند به عنوان پایه‌ای



شکل ۲. معرفی زوایا و جهت گیری الیاف منحنی شکل

تحلیلی ساده‌تر، مدل ارائه شده در معادله (۷) توسط هالدار و همکاران [۱۲] برای زوایای این الیاف پیشنهاد شده‌است.

$$\theta(x') = \phi + \frac{(T_0 - T_1)x'}{d} + T_0, -d \leq x' \leq 0 \quad (۷)$$

$$\theta(x') = \phi + \frac{(T_1 - T_0)x'}{d} + T_0, 0 \leq x' \leq d$$

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi$$

در اینجا، جهت‌گیری الیاف به‌صورت خطی از زاویه T_0 در نقطه A تا زاویه T_1 در نقطه B تغییر می‌کند. نقاط A و B توسط یک خط فاصل d روی محور x' به‌عنوان طول مشخصه جدا شده‌است. پارامترهای زاویه T_0 و T_1 برحسب محورهای x' و y' که به اندازه زاویه ϕ دوران کرده‌اند برحسب دستگاه مختصات محورهای کارتزین تعریف شده‌اند. مقدار d می‌تواند از مختصه نقاط A و B جایی که زاویه‌های T_0 و T_1 تعریف شده‌اند محاسبه شود. در شکل ۲ خطوط نشان داده شده منحنی الیاف هستند. دیگر مسیرهای الیاف می‌تواند با تغییر مسیر مرجع در راستای y' ایجاد شود. اگرچه الیاف در حال تغییر جهت‌گیری در راستای محور هستند، اگر از زاویه محورهای مختصات کارتزین دیده شوند، جهت‌گیری الیاف تابعی از x و y هستند. ایده استاندارد برای نام‌گذاری چندلایه VS (سفتی متغیر) با پارامترهایی نام‌برده به‌صورت $\langle T_0 | T_1 \rangle$ است. لازم به ذکر است طبق شکل (۲)، T_0 و T_1 به‌ترتیب زاویه الیاف در مرکز و زاویه الیاف در لبه ورق نسبت به محور x' تعریف شده‌اند.

$$u_0 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{7-i} \hat{u}_{ij} x^i y^j \quad (i+j > 0) \quad (۱)$$

$$v_0 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{7-i} \hat{v}_{ij} x^i y^j \quad (i+j > 0) \quad (۲)$$

$$w_0 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{7-i} \hat{w}_{ij} x^i y^j \quad (i+j > 0) \quad (۳)$$

در رابطه‌های (۱) تا (۳) ضریب‌های $\hat{u}_{ij}$ ، $\hat{v}_{ij}$ و $\hat{w}_{ij}$ مجهول هستند که از حل عددی و برنامه‌نویسی در نرم‌افزار متلب از روش نیوتون رافسون به‌دست می‌آیند. همچنین u_0 ، v_0 و w_0 به‌ترتیب جابه‌جایی‌های لایه میانی ورق مستطیلی در راستای محور x ، y و z هستند. در ادامه رابطه‌های کرنش جابه‌جایی بر اساس نظریه کلاسیک با در نظر گرفتن فرضیات غیرخطی هندسی و ن‌کارمن ارائه می‌گردد [۲۵]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (۴)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (۵)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (۶)$$

در این مطالعه، از الیاف منحنی شکل برای لایه‌های مرکب استفاده شده‌است. این الیاف در یک الگوی منحنی شکل قرار می‌گیرند که زاویه جهت‌گیری آن‌ها به‌صورت خطی تغییر می‌کند. به دلیل سازگاری با محدودیت‌های تولید و همچنین کاربرد در مدل‌های

$$\begin{aligned}
 U_{VS} = \sum_{k=1}^N \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \int_{H_{k-1}}^{H_k} & \left(\frac{1}{2} \bar{Q}_{11}^k \varepsilon_{xx}^2 \right. \\
 & + \frac{1}{2} \bar{Q}_{22}^k \varepsilon_{yy}^2 + \frac{1}{2} \bar{Q}_{66}^k \gamma_{xy}^2 \\
 & + \bar{Q}_{12}^k \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \bar{Q}_{16}^k \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} \\
 & + \bar{Q}_{26}^k \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} \\
 & - (\bar{Q}_{11}^k \bar{\alpha}_{xx}^k + \bar{Q}_{12}^k \bar{\alpha}_{yy}^k \\
 & + \bar{Q}_{16}^k \bar{\alpha}_{xy}^k) \varepsilon_{xx} \Delta T \\
 & - (\bar{Q}_{12}^k \bar{\alpha}_{xx}^k + \bar{Q}_{22}^k \bar{\alpha}_{yy}^k \\
 & + \bar{Q}_{26}^k \bar{\alpha}_{xy}^k) \varepsilon_{yy} \Delta T \\
 & - (\bar{Q}_{16}^k \bar{\alpha}_{xx}^k + \bar{Q}_{26}^k \bar{\alpha}_{yy}^k \\
 & + \bar{Q}_{66}^k \bar{\alpha}_{xy}^k) \gamma_{xy} \Delta T \Big) dx dy dz
 \end{aligned} \quad (11)$$

سپس انرژی کرنشی برای لایه‌های بالایی و پایینی پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 U_{MFC} = \sum_{k=1}^M \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \int_{H_{k-1}}^{H_k} & \left(\frac{1}{2} \bar{Q}_{11}^p \varepsilon_{xx}^2 \right. \\
 & + \frac{1}{2} \bar{Q}_{22}^p \varepsilon_{yy}^2 + \frac{1}{2} \bar{Q}_{66}^p \gamma_{xy}^2 \\
 & + \bar{Q}_{12}^p \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \bar{Q}_{16}^p \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} \\
 & + \bar{Q}_{26}^p \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} \\
 & - \frac{1}{2} (\bar{Q}_{11}^p d_{31} \\
 & + \bar{Q}_{12}^p d_{32}) \varepsilon_{xx} E_3 \\
 & - \frac{1}{2} (\bar{Q}_{12}^p d_{31} \\
 & + \bar{Q}_{22}^p d_{32}) \varepsilon_{yy} E_3 \\
 & - \frac{1}{2} (\bar{Q}_{16}^p d_{31} \\
 & + \bar{Q}_{26}^p d_{32}) \gamma_{xy} E_3 \Big) dx dy dz
 \end{aligned} \quad (12)$$

به علت خاصیت الکترومکانیکی مواد پیزوالکتریک، علاوه بر انرژی کرنشی، انرژی الکتریکی نیز در آن‌ها ذخیره می‌شود. انرژی الکتریکی ذخیره شده در مواد پیزوالکتریک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 W_{MFC} = \sum_{k=1}^M \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \int_{H_{k-1}}^{H_k} & \left(\frac{1}{2} (\bar{Q}_{11}^p d_{31} \right. \\
 & + \bar{Q}_{12}^p d_{32}) \varepsilon_{xx} E_3 \\
 & + \frac{1}{2} (\bar{Q}_{12}^p d_{31} \\
 & + \bar{Q}_{22}^p d_{32}) \varepsilon_{yy} E_3 \\
 & + \frac{1}{2} (\bar{Q}_{16}^p d_{31} \\
 & + \bar{Q}_{26}^p d_{32}) \gamma_{xy} E_3 \\
 & + \frac{1}{2} T_{33} E_3^2 \Big) dx dy dz
 \end{aligned} \quad (13)$$

رابطه‌های تنش برحسب کرنش با در نظر گرفتن اثر بارهای گرمایی برای مدل حاضر به صورت رابطه‌ی (۸) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(x,y) & \bar{Q}_{12}(x,y) & \bar{Q}_{16}(x,y) \\ \bar{Q}_{12}(x,y) & \bar{Q}_{22}(x,y) & \bar{Q}_{26}(x,y) \\ \bar{Q}_{16}(x,y) & \bar{Q}_{26}(x,y) & \bar{Q}_{66}(x,y) \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \\
 &- \Delta T \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{xx}(x,y) \\ \bar{\alpha}_{yy}(x,y) \\ \bar{\alpha}_{xy}(x,y) \end{bmatrix}^{(k)}
 \end{aligned} \quad (8)$$

ضریب‌های سفتی متغیر کاهش یافته در رابطه ۸ برای لایه k ام به صورت رابطه‌ی (۹) به دست می‌آیند [۱۲]:

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4(\theta) \\
 &\quad + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\
 &\quad + Q_{22} \sin^4(\theta) \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\
 &\quad + Q_{12} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4(\theta) \\
 &\quad + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\
 &\quad + Q_{22} \cos^4(\theta) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\
 &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\
 &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} \\
 &\quad - 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\
 &\quad + Q_{66} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta))
 \end{aligned} \quad (9)$$

و همچنین ضریب‌های انبساط گرمایی برای هر لایه k ام به صورت رابطه‌ی (۱۰) به دست می‌آیند [۱۲]:

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}_{xx} &= \alpha_{11} \cos^2(\theta) + \alpha_{22} \sin^2(\theta) \\
 \bar{\alpha}_{yy} &= \alpha_{22} \cos^2(\theta) + \alpha_{11} \sin^2(\theta) \\
 \bar{\alpha}_{xy} &= 2(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \cos(\theta) \sin(\theta)
 \end{aligned} \quad (10)$$

یادآوری می‌شود در رابطه‌های (۹) و (۱۰) زاویه θ برحسب متغیر x و y است. انرژی کرنشی برای ورق مرکب با الیاف منحنی شکل به صورت رابطه (۱۱) بیان می‌شود:

عبارتی ماتریس ژاکوبین ضریب‌های دستگاه به صورت زیر تشکیل گردد [۱۲]:

$$J_{ij} = \frac{\partial^2 U_{Total}}{\partial \hat{U}_i \partial \hat{U}_j}, \quad \hat{U} = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}] \quad (۱۶)$$

ژاکوبین ماتریس ضرایب در نقاط متناظر با جواب‌های حالت پایدار باید مثبت باشد. زمانی که یکی از مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین صفر و یا منفی باشد، ماتریس ژاکوبین مثبت معین نبوده و جواب به دست آمده نشان‌دهنده حالت ناپایدار سیستم است. پارامترهای زیادی مانند ضخامت لایه‌ها، آرایش لایه‌ها، خواص مکانیکی مواد، ضخامت لایه‌های رزین، مرتبه میدان‌های جابجایی بر شکل نهایی این ورق‌ها تأثیرگذار هستند. برای هر ورق یک ضخامت بحرانی و یک طول بحرانی تعریف می‌گردد، چنانچه ضخامت ورق کمتر از ضخامت بحرانی و طول جانبی نیز بیشتر از طول بحرانی باشد ورق حالت دوپایداره پیدا می‌کند. اثر لایه‌های رزین و وابستگی دمایی خواص بر شکل نهایی ورق و نقطه انشعاب در مطالعات زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. روندنمای حل معادله‌ها در متلب در شکل ۳ نشان داده شده است.

۳- خواص و مواد

در این مقاله از یک ورق مستطیلی مرکب مربعی چهار لایه استفاده می‌شود که طول و عرض آن ۳۸۰ میلی‌متر و ضخامت هرلایه برابر با ۰/۳ میلی‌متر است که در مجموع ضخامت کل ورق برابر با ۱/۲ میلی‌متر می‌شود. ورق از نوع مرکب لایه‌ای است که چهارلایه وسط از نوع مرکب cycom 997-2 با الیاف منحنی شکل هستند که خواص مکانیکی و حرارتی لایه‌ها در جدول ۱ ارائه شده است. همچنین جزئیات مربوط به جهت‌گیری الیاف مرکب سفتی متغیر در جدول ۲ گزارش شده است. به علاوه، دو لایه بالا و پایین پیزوالکتریک از نوع مرکب ماکروالیاف هستند که جهت‌گیری الیاف لایه بالایی پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف به صورت [۹۰] و جهت‌گیری لایه پایینی پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف به صورت صفر درجه هستند که خواص مکانیکی و الکتریکی آن‌ها در جدول ۳ ارائه شده است. لازم به ذکر است ورق

انتگرال‌گیری‌ها در رابطه‌های (۱۱) تا (۱۳) در راستای z در پیوست ارائه شده است. با استفاده از عبارات حدس زده شده برای میدان‌های جابه‌جایی، می‌توان میدان‌های کرنشی را محاسبه کرد. با جایگذاری این کرنش‌ها در رابطه‌های انرژی کرنشی و انتگرال‌گیری از آن‌ها، می‌توان انرژی کرنشی کل ورق را محاسبه کرد. این انرژی شامل انرژی کرنشی ورق مرکب با الیاف منحنی شکل و لایه‌های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف است و به صورت تابعی از ضریب‌های میدان‌های جابه‌جایی و همچنین تغییرات دما محاسبه می‌شوند:

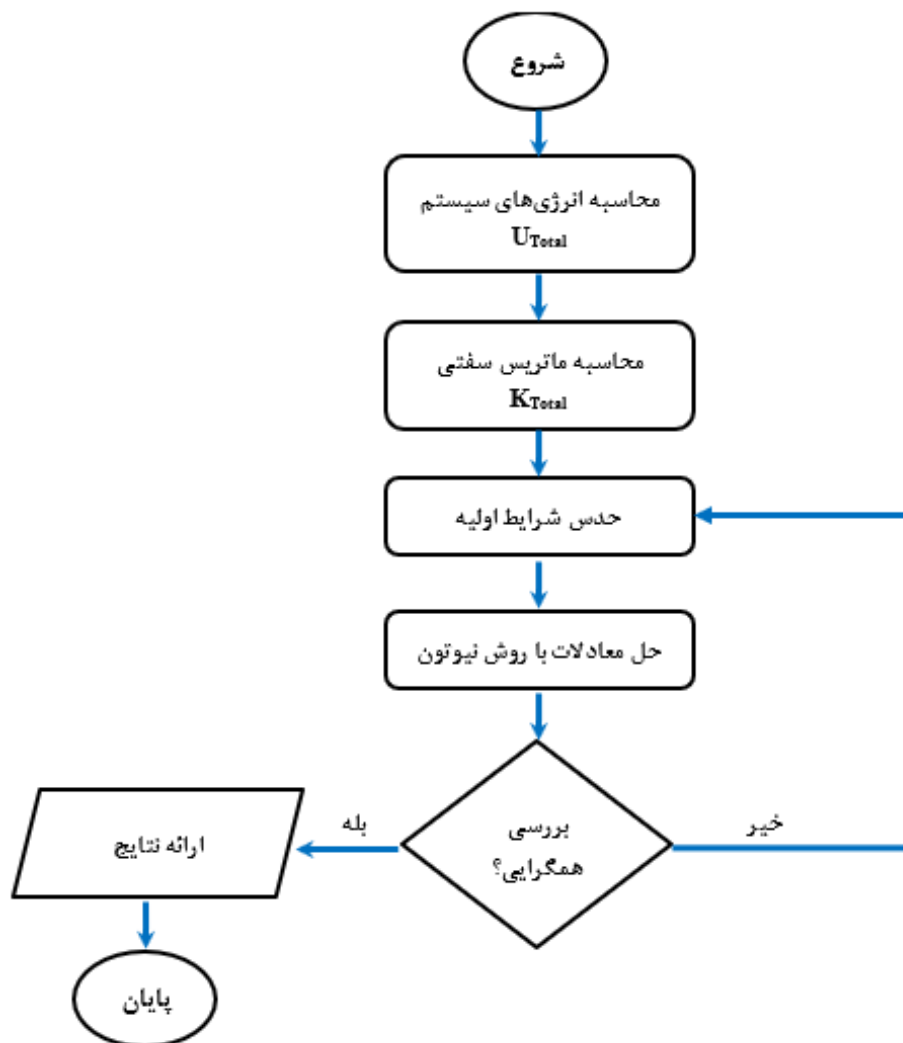
$$U_{Total}(\Delta T, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = U_{VS} + U_{MFC} - W_{MFC} \quad (۱۴)$$

تغییرات مجازی انرژی پتانسیل ورق به صورت زیر به دست می‌آید [۱۲]:

$$\delta U_{Total} = \left(\frac{\partial U_{Total}}{\partial \hat{u}} \right) \delta \hat{u} + \left(\frac{\partial U_{Total}}{\partial \hat{v}} \right) \delta \hat{v} + \left(\frac{\partial U_{Total}}{\partial \hat{w}} \right) \delta \hat{w} \quad (۱۵)$$

در رابطه (۱۵)، عبارت‌های داخل پرانتز، به ترتیب دستگاه معادلات حاصل از تغییرات انرژی پتانسیل کل نسبت به ضریب‌های میدان‌های جابه‌جایی $\hat{u}$ ، $\hat{v}$ و $\hat{w}$ هستند. برای برقراری رابطه (۱۵)، لازم است تک تک دستگاه معادلات به دست آمده، برابر با صفر باشند. این مجموعه معادلات، تابع‌های خطی از ضریب‌های میدان‌های جابه‌جایی درون صفحه هستند. بنابراین، می‌توان ضریب‌های میدان‌های جابه‌جایی درون صفحه را به صورت تابع‌هایی از ضریب‌های میدان‌های جابه‌جایی خارج صفحه به دست آورد. با حذف این ضریب‌های، تعداد معادلات به تعداد ضریب‌های میدان‌های جابه‌جایی خارج از صفحه کاهش خواهد یافت.

با استفاده از این دستگاه معادلات، می‌توان شکل تغییر یافته این ورق‌ها را بعد از فرآیند پخت، با استفاده از روش نیوتون-رافسون و برنامه ویژه نوشته شده در نرم‌افزار متلب به دست آورد. با توجه به اینکه در بیشتر موارد بیش از یک جواب برای دستگاه معادلات تعادل یافت می‌شود و بعضی از جواب‌ها ممکن است متناظر با حالت‌های ناپایدار سیستم باشد، برای ارزیابی جواب‌ها لازم است تغییرات دوم تابع انرژی پتانسیل کل و یا به



شکل ۳. روندنمای حل معادله‌ها در متلب

جدول ۱. خواص مکانیکی و گرمایی cycom 972-22 [۱۶]

مقدار	خاصیت
۱۵۶	مدول الاستیسیته طولی E_{11} (گیگاپاسکال)
۸/۳۵	مدول الاستیسیته عرضی E_{22} (گیگاپاسکال)
۴/۲	مدول الاستیسیته برشی G_{12} (گیگاپاسکال)
۰/۳۳	ضریب پواسون ν_{12}
-۰/۲۹	ضریب انبساط گرمایی طولی α_{11} (10^{-6} بر درجه سلسیوس)
۲۴	ضریب انبساط گرمایی عرضی α_{22} (10^{-6} بر درجه سلسیوس)
۱۶۲۰	چگالی ρ (کیلوگرم بر مترمکعب)
۰/۳	ضخامت (میلی‌متر)

جدول ۲. جهت گیری الیاف منحنی شکل

نام گذاری	خانواده	لایه بالایی		لایه پایینی	
		T ₀	T ₁	T ₀	T ₁
VS-1	$>-۷۵ -۱۵<۴۵>/۷۵ ۱۵<۴۵$	۱۵	۷۵	-۱۵	-۷۵
VS-2	$>-۶۰ -۳۰<۴۵>/۶۰ ۳۰<۴۵$	۳۰	۶۰	-۳۰	-۶۰
VS-3	$>-۴۵ -۴۵<۴۵>/۴۵ ۴۵<۴۵$	۴۵	۴۵	-۴۵	-۴۵
VS-4	$>-۳۰ -۶۰<۴۵>/۳۰ ۶۰<۴۵$	۶۰	۳۰	-۶۰	-۳۰
VS-5	$>-۱۵ -۷۵<۴۵>/۱۵ ۷۵<۴۵$	۷۵	۱۵	-۷۵	-۱۵

جدول ۳. خواص مکانیکی و الکتریکی پیزوالکتریک MFC-P2-type [۲۶، ۲۷]

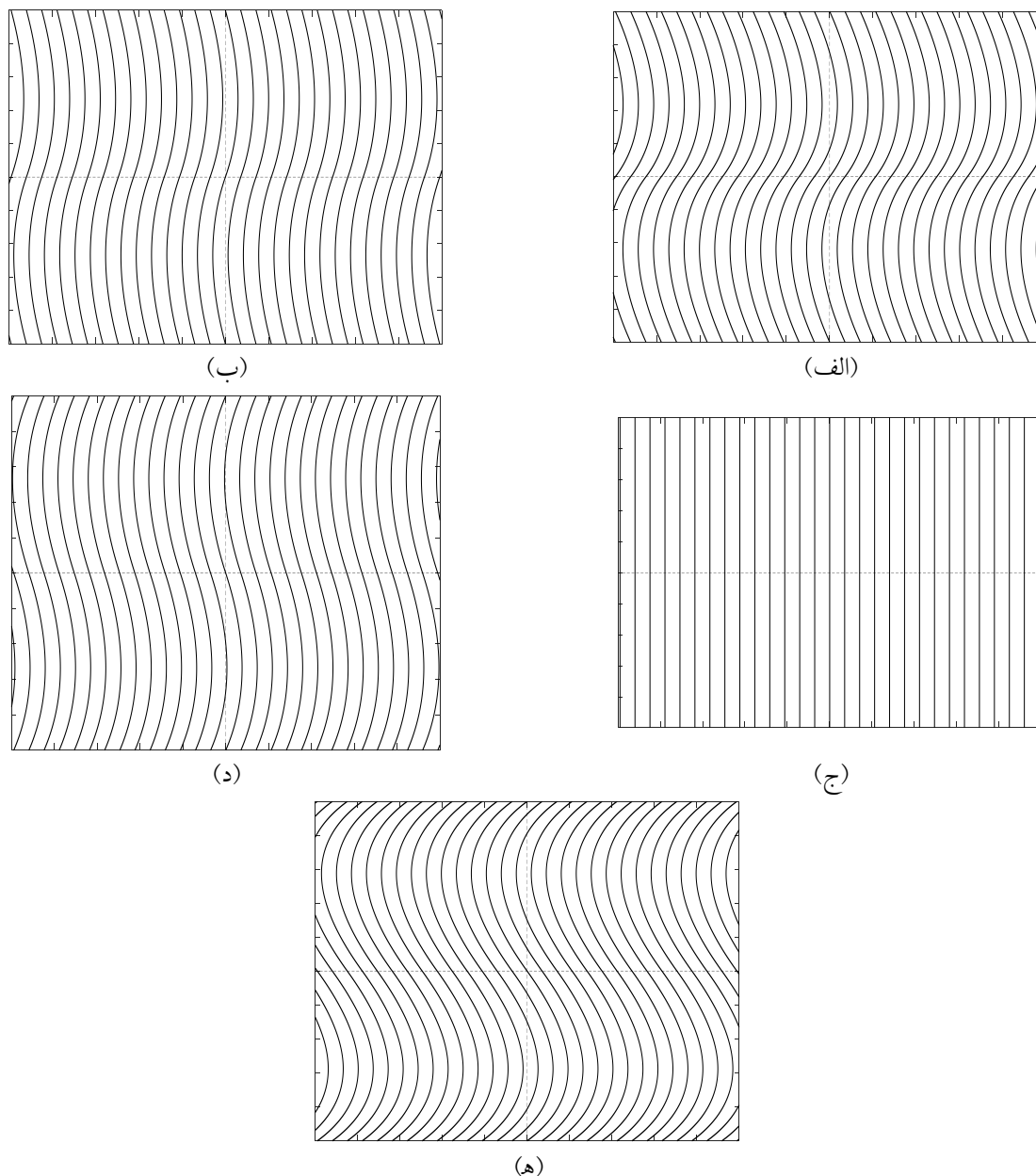
مدول الاستیسیته طولی E ₁₁ (گیگاپاسکال)	۲۹/۴
مدول الاستیسیته عرضی E ₂₂ (گیگاپاسکال)	۱۵/۲
مدول الاستیسیته برشی G ₁₂ (گیگاپاسکال)	۶/۰۶
ضریب پواسون ν_{12}	۰/۳۱۲
ضخامت (میلی متر)	۰/۳
ضریب پیزوالکتریک d ₃₃ (10^{-9} x میلی متر بر ولت)	۳۸۰
ضریب پیزوالکتریک d ₃₁ (10^{-9} x میلی متر بر ولت)	-۱۷۰
ثابت دی الکتریک ϵ_x^s (10^{-11} x فراد بر میلی متر)	۱/۵
چگالی ρ (کیلوگرم بر مترمکعب)	۵۴۴۰

پیزوالکتریک به منظور میدان الکتریکی بایستی ولتاژ در راستای ضخامت تغییر کند، از المان سه بعدی برای ورق و لایه های پیزوالکتریک استفاده شده است. برای شبکه بندی ورق از المان های سه بعدی ۲۰ گره ای با سه درجه آزادی استفاده شده است. به علت غیرخطی بودن مساله گزینه مربوط به غیرخطی بودن تغییرات هندسه برای بررسی جابه جایی های بزرگ انتخاب شده است. حلگر مورد استفاده در نرم افزار از نوع Static General است. در قسمت شرایط مرزی حاکم بر مدل اجزای محدود، هر شش درجه آزادی در نقطه مرکزی ورق بسته شده است. برای مدل سازی الیاف منحنی شکل در آباکوس از زیر برنامه استفاده شده و به کمک برنامه ویژه نوشته شده در نرم افزار فرترن، شیب الیاف منحنی شکل در هر نقطه از ورق مطابق شکل ۲ در نرم افزار تعریف شده و سپس برنامه در قسمتی که توسط نرم افزار آباکوس برای فراخوانی

در دمای پخت ۱۸۰ درجه سانتی گراد قرار گرفته و پس از خنک شدن به دمای ۲۰ درجه می رسد از این رو گرادیان گرمایی با اختلاف دمای ۱۶۰ درجه سانتی گراد را تجربه می کند. شکل ۴ جهت گیری الیاف منحنی شکل ورق مستطیلی مرکب مورد تحقیق را نشان می دهد.

۵- روش اجزای محدود

برای اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از تحلیل استاتیکی از نرم افزار اجزای محدود آباکوس استفاده شده است. برای شبکه بندی ورق و لایه های پیزوالکتریک از المان های دوبعدی (S4R) مخصوص پوسته استفاده شده است. باتوجه به نازک بودن ورق و پیزوالکتریک هردو سازه در تحلیل استاتیکی به صورت پوسته مدل سازی شده است اما باتوجه به بدون ضخامت بودن المان پوسته در آباکوس و اینکه در مواد



شکل ۴. جهت‌گیری الیاف منحنی شکل ورق مستطیلی (الف VS-1 ب VS-2 ج VS-3 د VS-4 ه VS-5)

زیربرنامه‌ها مشخص شده فراخوانی می‌شود و ورق الیاف منحنی در آباکوس تعریف می‌گردد.

۶- نتایج و بحث

۶-۱- اعتبارسنجی

در این قسمت نتایج حاصل از تحلیل استاتیکی ورق مرکب دوپایداره با الیاف منحنی شکل و با لایه‌های پیزوالکتریک مرکب

ماکروالیاف ارائه شده‌است. این نتایج که شامل جابه‌جایی خارج از صفحه و حالت‌های پایدار ورق هستند برای چینش‌های مختلف الیاف لایه‌های مرکب ورق ارائه شده‌است. به علاوه به منظور اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از مدل نیمه تحلیلی، این نتایج با نتایج ارائه شده توسط نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس مقایسه شده‌است.

جدول ۴. مقایسه جابه‌جایی (برحسب میلی‌متر) خارج از صفحه ورق مستطیلی چهارلایه با الیاف منحنی شکل بدون لایه‌های پیزوالکتریک کامپوزیتی ماکروالیاف

نوع ورق	مدل	C	B	A
VS-1	توسعه یافته	۲۹/۷۹۵	۲۸/۶۱۴	۲۵/۰۶۶
	آباکوس	۲۹/۶۵۵	۲۹/۶۱۵	۲۴/۳۳۷
	خطا(%)	۰/۴	۳/۳	۳/۰
VS-2	توسعه یافته	۳۱/۷۶۷	۳۵/۱۲۷	۳۵/۹۵۴
	آباکوس	۳۰/۹۸۰	۳۶/۱۹۶	۳۶/۲۶۷
	خطا(%)	۲/۵	۲/۹	۰/۸
VS-3	توسعه یافته	۳۸/۱۲۷	۴۰/۲۱۵	۳۸/۱۲۷
	آباکوس	۳۷/۸۶۷	۴۰/۳۹	۳۷/۸۶۷
	خطا(%)	۰/۶	۰/۴	۰/۶
VS-4	توسعه یافته	۳۲/۳۶۰	۳۸/۵۲۴	۴۰/۳۱۴
	آباکوس	۳۲/۱۹۸	۳۹/۴۶۷	۴۰/۲۰۲
	خطا(%)	۰/۵	۲/۳	۰/۳
VS-5	توسعه یافته	۲۶/۱۸۰	۳۳/۰۶۵	۳۶/۸۴۲
	آباکوس	۲۴/۸۱۳	۳۳/۶۱۵	۳۶/۹۱۰
	خطا(%)	۵/۵	۱/۶	۰/۲

پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف را نشان می‌دهد که از دو روش نیمه‌تحلیلی و اجزای محدود به‌دست آمده‌اند. همانطور که از این جدول مشخص است، نتایج سازگاری بسیارخوبی با هم دارد. به علاوه، نتایج نشان می‌دهد که بیشترین و کمترین جابه‌جایی مرکز ورق به‌ترتیب مربوط به چینش VS-1 و VS-4 است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که ورق با چینش VS-4 و VS-1 به‌ترتیب مناسب برای برداشت انرژی و مورفینگ هستند. از مقایسه نتایج در جدول ۴ و ۵ مشخص می‌شود که افزودن لایه‌های پیزوالکتریک ماکروالیاف به ورق منجر به کاهش چشم‌گیر جابجایی‌ها در نقاط A، B و C ورق می‌شود به عبارت دیگر سختی سازه در اثر افزودن این لایه افزایش می‌یابد.

جدول ۴ جابه‌جایی (برحسب میلی‌متر) قسمت‌های مختلف ورق با الیاف مستقیم و منحنی شکل چهارلایه بدون لایه‌های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف را نشان می‌دهد که از دو روش تحلیلی و آباکوس به‌دست آمده‌اند. در جدول ۴ منظور از نقاط A، B و C به‌ترتیب گوشه لبه سمت راست ورق، وسط لبه ورق و گوشه لبه سمت چپ ورق است. همانطور که از این جدول مشخص است، نتایج متلب سازگاری بسیارخوبی با نتایج به‌دست آمده از آباکوس دارد. به علاوه، نتایج نشان می‌دهد که بیشترین و کمترین جابه‌جایی مرکز ورق به‌ترتیب مربوط به چینش VS-3 و VS-1 است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که ورق با چینش VS-1 و VS-3 به‌ترتیب مناسب برای برداشت انرژی و مورفینگ هستند.

جدول ۵ جابه‌جایی (برحسب میلی‌متر) قسمت‌های مختلف ورق با الیاف مستقیم و منحنی شکل چهارلایه همراه با لایه‌های

جدول ۵. مقایسه جابه‌جایی (برحسب میلی‌متر) خارج از صفحه ورق مستطیلی چهارلایه با الیاف منحنی شکل با لایه‌های پیزوالکتریک کامپوزیتی ماکروالیاف

نوع ورق	نوع حل	C	B	A
VS-1	توسعه یافته	۵/۳۲۶	۹/۹۱۲	۵/۴۱۵
	آباکوس	۵/۳۰۵	۱۰/۱۱۲	۵/۴۰۳
	خطا(%)	۰/۳	۱/۹	۰/۲
VS-2	توسعه یافته	۸/۷۹۹	۱۲/۴۵۵	۸/۹۸۱
	آباکوس	۹/۰۸۰	۱۲/۶۶۱	۹/۱۰۳
	خطا(%)	۳/۱	۱/۶	۱/۳
VS-3	توسعه یافته	۱۳/۱۶۸	۱۵/۷۱۱	۱۳/۱۶۸
	آباکوس	۱۳/۲۱۹	۱۵/۷۶	۱۳/۲۱۹
	خطا(%)	۰/۳	۰/۳	۰/۳
VS-4	توسعه یافته	۱۳/۶۰۷	۱۶/۰۷۳	۱۴/۷۹۳
	آباکوس	۱۳/۶۴۶	۱۶/۰۱۹	۱۴/۶۸۷
	خطا(%)	۰/۳	۰/۳	۰/۷
VS-5	متلب	۱۱/۶۸۳	۱۴/۴۰۰	۱۴/۴۶۰
	آباکوس	۱۱/۸۳۷	۱۴/۴۰۱	۱۴/۰۱۱
	خطا(%)	۱/۳	۰/۰۰۷	۳/۲

آباکوس به دست آمده‌اند. شکل ۹ مقایسه جابه‌جایی‌های گوشه‌های ورق با چینش‌های مختلف الیاف منحنی شکل را نشان می‌دهد. همانطور که از شکل‌ها مشخص است، نتایج تحلیلی سازگاری بسیار خوبی با نتایج به دست آمده از آباکوس دارد.

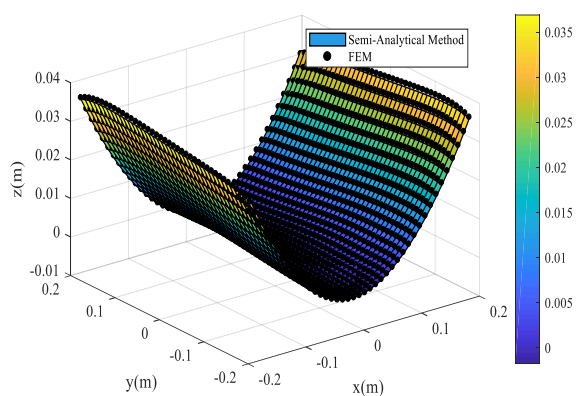
۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل استاتیکی یک ورق مستطیلی مرکب دوپایداره با الیاف منحنی شکل و لایه‌های پیزوالکتریک تقویت‌شده با ماکروالیاف بررسی شده‌است. برای این منظور، انرژی پتانسیل و کارنیروهای خارجی ورق مرکب با استفاده از رابطه‌های کرنش-جابه‌جایی غیرخطی فون کارمن استخراج شده‌اند. سپس، با استفاده از روش ریلی ریتز و کمینه‌سازی انرژی پتانسیل سیستم، حالت‌های پایدار ورق به دست آمده‌اند. در ادامه، با استفاده از مدل توسعه‌یافته هیر، جابه‌جایی‌های

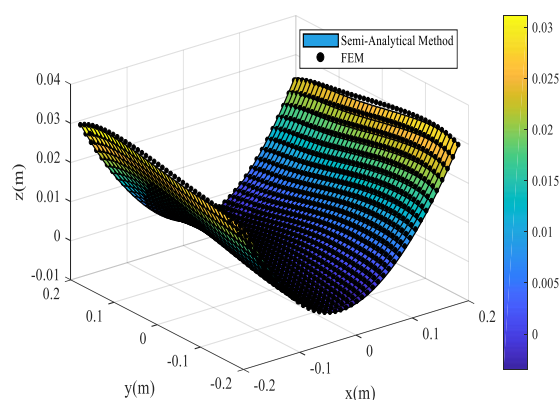
به طور کلی با استفاده از تحلیل‌های ارائه شده در این بخش می‌توان متناسب با نوع کاربرد مورد انتظار چینش مطلوب را انتخاب کرد. البته به منظور انتخاب چینش مناسب پیشنهاد می‌شود به کمک معادلات استخراج شده، مساله بهینه‌سازی با تابع هدف مورد نظر به کار گرفته شود.

۶-۲- حالت‌های پایدار

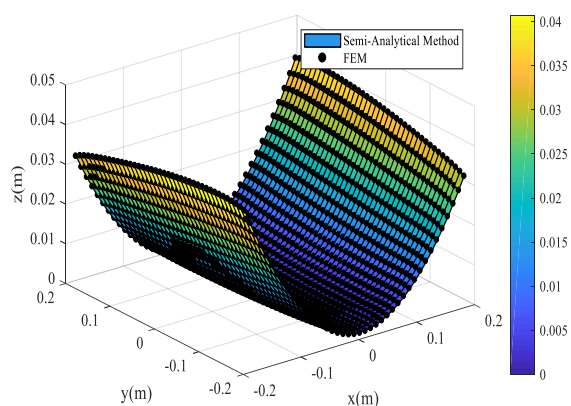
در این قسمت حالت‌های پایدار ورق با الیاف مستقیم و منحنی شکل با انواع مختلف که از روش تحلیلی و آباکوس به دست آمده، ارائه شده‌است. شکل‌های ۵ و ۶ به ترتیب حالت‌های پایدار اول و دوم انواع مختلف ورق مرکب بدون لایه‌های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف را نشان می‌دهد که از دو روش تحلیلی و آباکوس به دست آمده‌اند. شکل ۷ و شکل ۸ به ترتیب حالت‌های پایدار اول و دوم ورق مرکب همراه با لایه‌های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف را نشان می‌دهد که از دو روش تحلیلی و



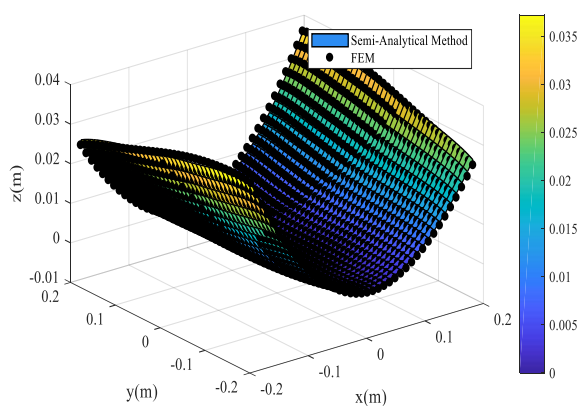
(ب)



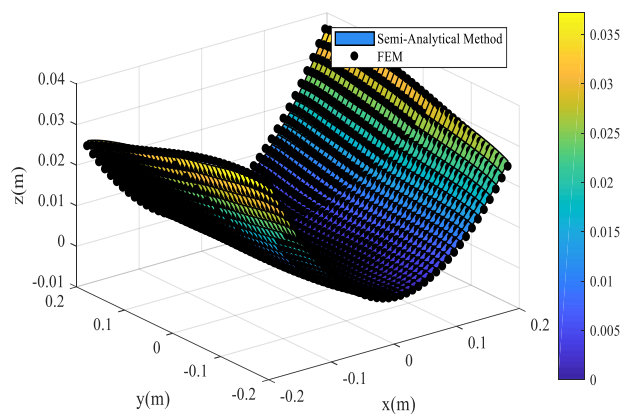
(الف)



(د)



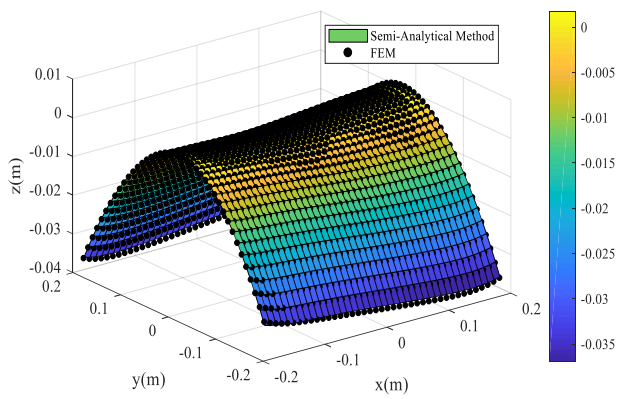
(ج)



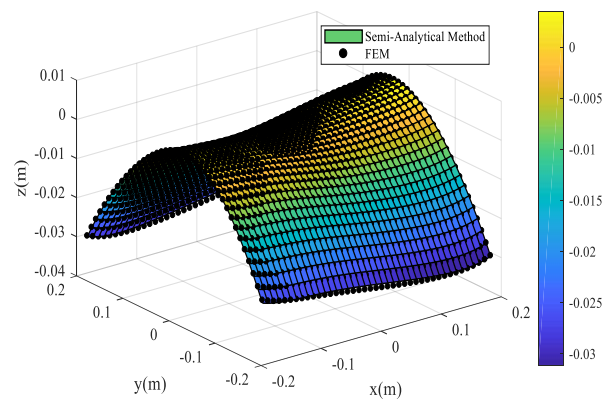
(هـ)

شکل ۵. مقایسه حالت پایدار اول برای ورق مرکب بدون لایه‌های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف الف (VS-1 ب) VS-2 ج) VS-3 د)

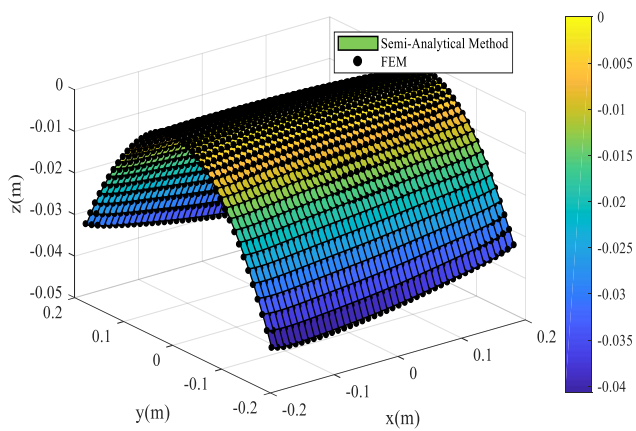
VS-4 هـ) VS-5



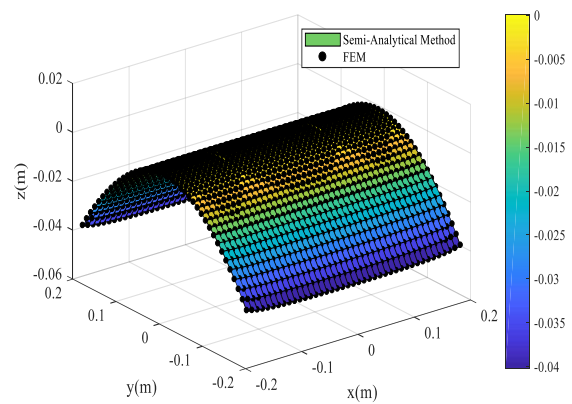
(ب)



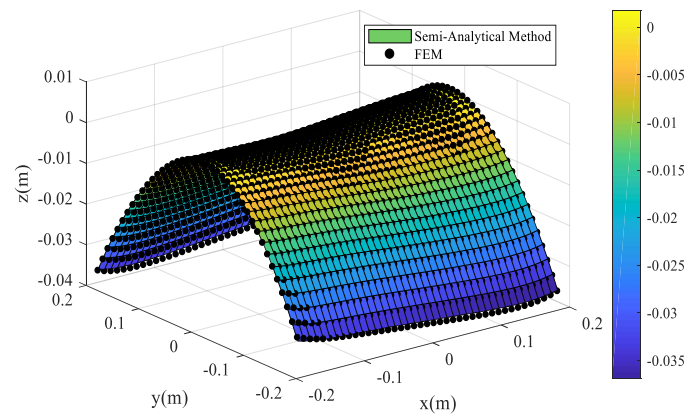
(الف)



(د)

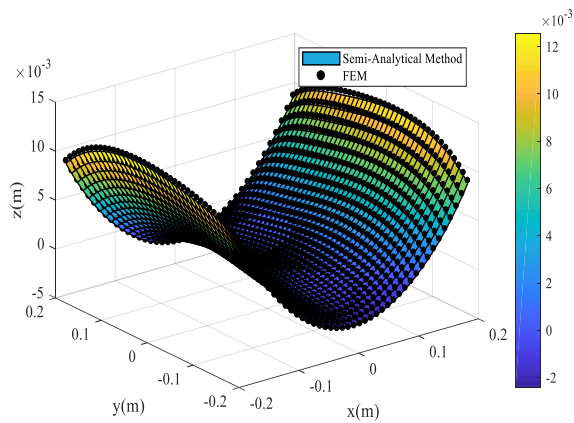


(ج)

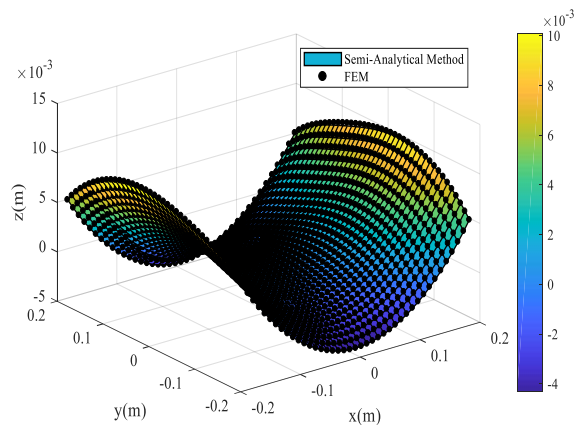


(هـ)

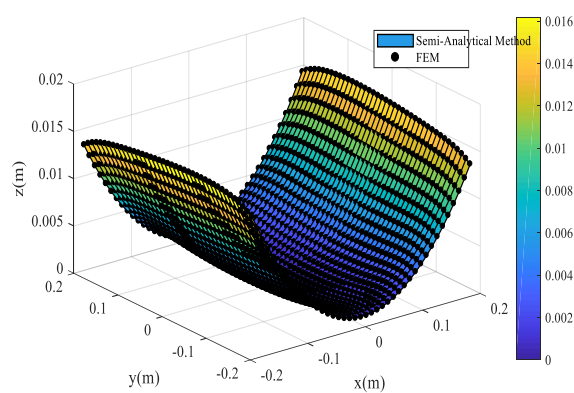
شکل ۶. مقایسه حالت پایدار دوم برای ورق مرکب بدون لایه‌های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف (الف) VS-1 (ب) VS-2 (ج) VS-3 (د) VS-4 (هـ) VS-5



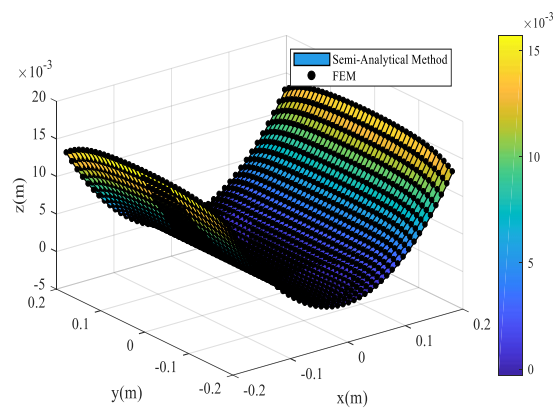
(ب)



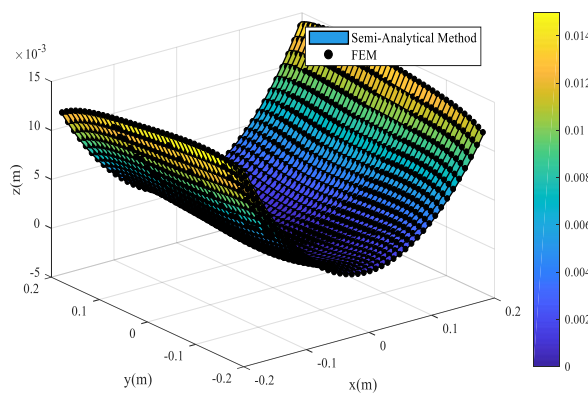
(الف)



(د)



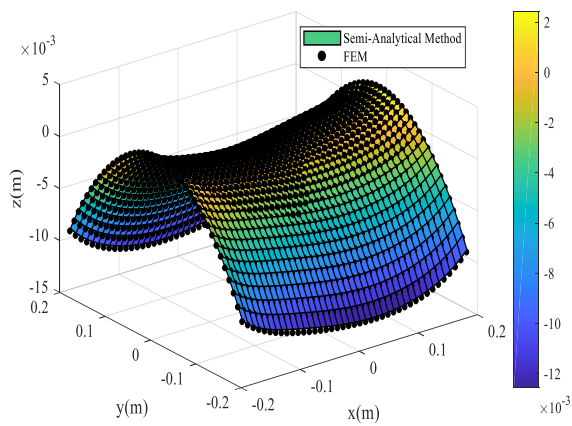
(ج)



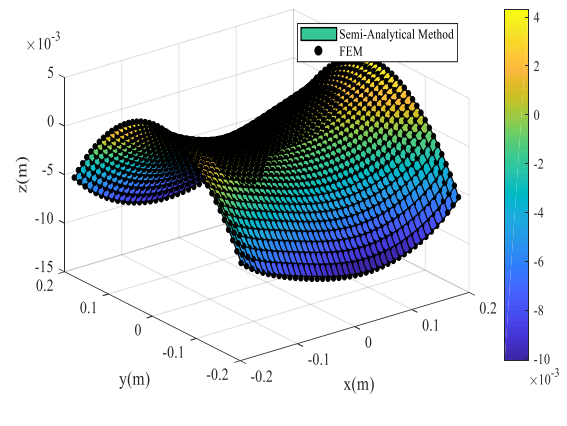
(ه)

شکل ۷. مقایسه حالت پایدار اول برای ورق مرکب با لایه‌های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف (الف) VS-1 (ب) VS-2 (ج) VS-3 (د) VS-4

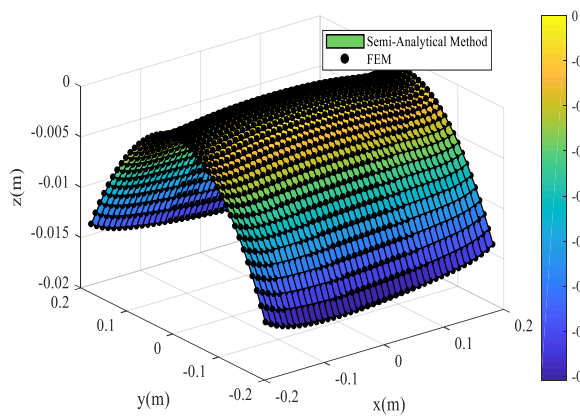
VS-5 (ه) 4



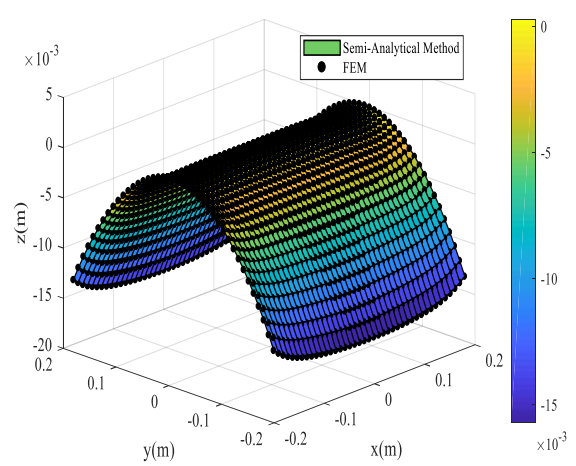
(ب)



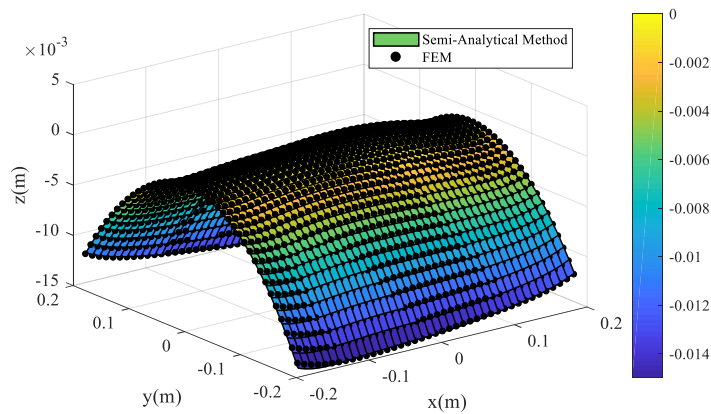
(الف)



(د)

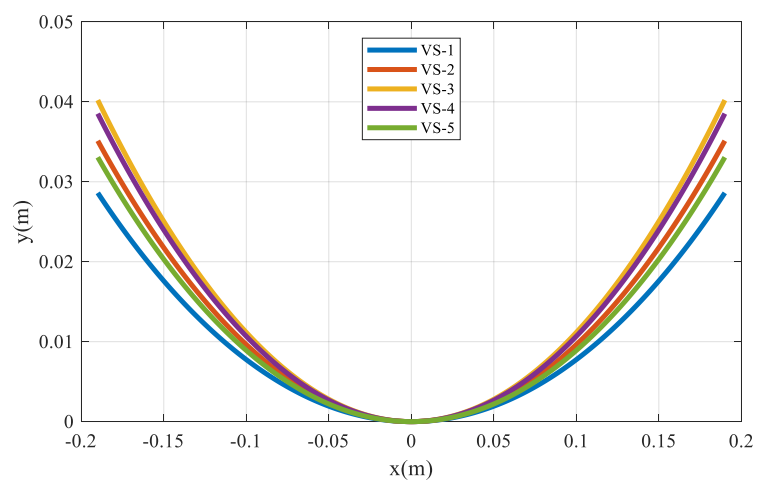


(ج)

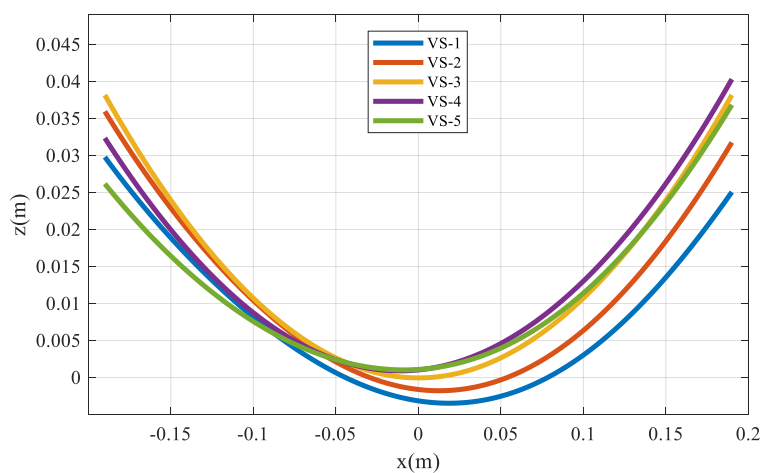


(ه)

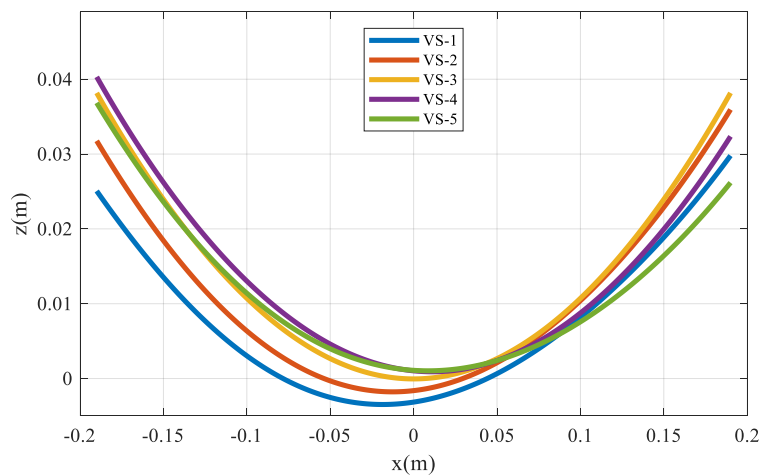
شکل ۸. مقایسه حالت پایدار دوم برای ورق مرکب با لایه‌های پیزوالکتریک مرکب ماکروالیاف (الف) VS-1 (ب) VS-2 (ج) VS-3 (د) VS-4 (ه) VS-5



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۹. مقایسه جابه‌جایی‌های گوشه‌های ورق بدون لایه‌های پیزوالکتریک در حالت‌های مختلف الف) $w(x,0)$ ب) $w(x,Ly-2)$

ج) $w(x,-Ly-2)$

لایه‌های پیزوالکتریک به ترتیب مربوط به چینش VS-1 و VS-3 است که به ترتیب مناسب برای کاربرد برداشت انرژی و مورفینگ هستند. افزودن لایه‌های پیزوالکتریک ماکروالیاف سختی ورق را افزایش می‌دهد و منجر به کاهش جابجایی‌ها ورق می‌شود. به طور کلی با استفاده از نتایج ارائه شده در این مقاله می‌توان متناسب با نوع کاربرد مورد انتظار چینش مطلوب را انتخاب کرد. البته به منظور انتخاب چینش مناسب پیشنهاد می‌شود به کمک معادلات استخراج شده، مساله بهینه‌سازی با تابع هدف مورد نظر به کار گرفته شود.

قسمت‌های مختلف ورق محاسبه و با نتایج شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده‌اند. همچنین برای میدان جابه‌جایی از تابع‌های شکل مرتبه هفت استفاده شده‌است. در نهایت، جابه‌جایی‌های قسمت‌های مختلف ورق به همراه حالت‌های پایدار آن برای پنج حالت مختلف چینش الیاف منحنی شکل استخراج شده‌اند و با مدل اجزای محدود مقایسه شده‌اند. مدل توسعه‌یافته مرتبه هفت میدان جابجایی سازگاری بسیار خوبی با نتایج بدست آمده از روش اجزای محدود دارد. بر اساس نتایج حاصل شده بیشترین و کمترین جابه‌جایی مرکز ورق بدون

۸- پیوست

محاسبه انتگرال‌ها در رابطه‌های (۱۴) تا (۱۶) در راستای z به در ادامه آمده است.

$$\begin{aligned}
 U_{VS} = & \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{-L_y/2} \left(-A_{11}\Delta T \epsilon_{xx0} \bar{\alpha}_{xx} - A_{16}\Delta T \gamma_{xy0} \bar{\alpha}_{xx} - A_{12}\Delta T \epsilon_{yy0} \bar{\alpha}_{xx} - A_{16}\Delta T \epsilon_{xx0} \bar{\alpha}_{xy} - A_{12}\Delta T \epsilon_{xx0} \bar{\alpha}_{yy} \right. \\
 & - A_{66}\Delta T \gamma_{xy0} \bar{\alpha}_{xy} - A_{26}\Delta T \epsilon_{yy0} \bar{\alpha}_{xy} - A_{26}\Delta T \gamma_{xy0} \bar{\alpha}_{yy} - A_{22}\Delta T \epsilon_{yy0} \bar{\alpha}_{yy} - B_{11}\Delta T k_{xx0} \bar{\alpha}_{xx} \\
 & - B_{16}\Delta T k_{xy0} \bar{\alpha}_{xx} - B_{12}\Delta T k_{yy0} \bar{\alpha}_{xx} - B_{16}\Delta T k_{xx0} \bar{\alpha}_{xy} - B_{12}\Delta T k_{xx0} \bar{\alpha}_{yy} - B_{66}\Delta T k_{xy0} \bar{\alpha}_{xy} \\
 & - B_{26}\Delta T k_{yy0} \bar{\alpha}_{xy} - B_{26}\Delta T k_{xy0} \bar{\alpha}_{yy} - B_{22}\Delta T k_{yy0} \bar{\alpha}_{yy} + A_{16}\epsilon_{xx0} \gamma_{xy0} + A_{12}\epsilon_{xx0} \epsilon_{yy0} \\
 & + \frac{1}{2} A_{11} \epsilon_{xx0}^2 + \frac{1}{2} A_{66} \gamma_{xy0}^2 + A_{26} \gamma_{xy0} \epsilon_{yy0} + \frac{1}{2} A_{22} \epsilon_{yy0}^2 + B_{16} k_{xx0} \gamma_{xy0} + B_{16} k_{xy0} \epsilon_{xx0} \\
 & + B_{12} k_{xx0} \epsilon_{yy0} + B_{12} k_{yy0} \epsilon_{xx0} + B_{11} k_{xx0} \epsilon_{xx0} + B_{66} k_{xy0} \gamma_{xy0} + B_{26} k_{yy0} \gamma_{xy0} + B_{26} k_{xy0} \epsilon_{yy0} \\
 & + B_{22} k_{yy0} \epsilon_{yy0} + D_{16} k_{xx0} k_{xy0} + D_{12} k_{xx0} k_{yy0} + \frac{1}{2} D_{11} k_{xx0}^2 + D_{26} k_{xy0} k_{yy0} + \frac{1}{2} D_{66} k_{xy0}^2 \\
 & \left. + \frac{1}{2} D_{22} k_{yy0}^2 \right) dx dy \\
 U_{MFC} = & \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{-L_y/2} \left(A_{16}^p \epsilon_{xx0} \gamma_{xy0} + A_{12}^p \epsilon_{xx0} \epsilon_{yy0} + \frac{1}{2} A_{11}^p \epsilon_{xx0}^2 + \frac{1}{2} A_{66}^p \gamma_{xy0}^2 + A_{26}^p \gamma_{xy0} \epsilon_{yy0} + \frac{1}{2} A_{22}^p \epsilon_{yy0}^2 \right. \\
 & + B_{16}^p k_{xx0} \gamma_{xy0} + B_{16}^p k_{xy0} \epsilon_{xx0} + B_{12}^p k_{xx0} \epsilon_{yy0} + B_{12}^p k_{yy0} \epsilon_{xx0} + B_{11}^p k_{xx0} \epsilon_{xx0} + B_{66}^p k_{xy0} \gamma_{xy0} \\
 & + B_{26}^p k_{yy0} \gamma_{xy0} + B_{26}^p k_{xy0} \epsilon_{yy0} + B_{22}^p k_{yy0} \epsilon_{yy0} + D_{16}^p k_{xx0} k_{xy0} + D_{12}^p k_{xx0} k_{yy0} + \frac{1}{2} D_{11}^p k_{xx0}^2 \\
 & + D_{26}^p k_{xy0} k_{yy0} + \frac{1}{2} D_{66}^p k_{xy0}^2 + \frac{1}{2} D_{22}^p k_{yy0}^2 - \frac{1}{2} (A_{11}^p d_{31} + A_{12}^p d_{32}) \epsilon_{xx0} E_3 \\
 & - \frac{1}{2} (B_{11}^p d_{31} + B_{12}^p d_{32}) k_{xx0} E_3 - \frac{1}{2} (A_{12}^p d_{31} + A_{22}^p d_{32}) \epsilon_{yy0} E_3 \\
 & - \frac{1}{2} (B_{12}^p d_{31} + B_{22}^p d_{32}) k_{yy0} E_3 - \frac{1}{2} (A_{16}^p d_{31} + A_{26}^p d_{32}) \gamma_{xy0} E_3 \\
 & \left. - \frac{1}{2} (B_{16}^p d_{31} + B_{26}^p d_{32}) k_{xy0} E_3 \right) dx dy \\
 W_{MFC} = & \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_x/2} \left(\frac{1}{2} (A_{11}^p d_{31} + A_{12}^p d_{32}) \epsilon_{xx0} E_3 + \frac{1}{2} (B_{11}^p d_{31} + B_{12}^p d_{32}) k_{xx0} E_3 \right. \\
 & + \frac{1}{2} (A_{12}^p d_{31} + A_{22}^p d_{32}) \epsilon_{yy0} E_3 + \frac{1}{2} (B_{12}^p d_{31} + B_{22}^p d_{32}) k_{yy0} E_3 \\
 & \left. + \frac{1}{2} (A_{16}^p d_{31} + A_{26}^p d_{32}) \gamma_{xy0} E_3 + \frac{1}{2} (B_{16}^p d_{31} + B_{26}^p d_{32}) k_{xy0} E_3 + \frac{1}{2} T_{33} E_3^2 \right) dx dy
 \end{aligned}$$

References

- [1] Zhang, H., Yang, D., and Sheng, Y., "Performance-driven 3D printing of continuous curved carbon fibre reinforced polymer composites: A preliminary numerical study", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 151, pp. 256-264, 2018.
- [2] Sanz-Herrera, J. A., Apolinar-Fernandez, A., Jimenez-Aires, A., Perez-Alcantara, P., Domínguez, J., and Reina-Romo, E., "Multiscale characterization of the mechanics of curved fibered structures with application to biological materials", *bioRxiv*, 2024.
- [3] Hyer, M. W., and Lee, H. H., "The use of curvilinear fiber format to improve buckling resistance of composite plates with central circular holes", *Composite Structures*, Vol. 18, No. 3, pp. 239-261, 1991.
- [4] Waldhart, C., "Analysis of tow-placed, variable-stiffness laminates", Doctoral dissertation, Virginia Tech. 1996.
- [5] Langley, P. T., "Finite element modeling of tow-placed variable-stiffness composite laminates", Doctoral dissertation, Virginia Tech. 1999.
- [6] Jegley, D. C., Tatting, B. F., and Guerdal, Z., "Automated Finite Element Analysis of Elastically-Tailored Plates" (No. NASA/CR-2003-212679). 2003.
- [7] Tatting, B. F., Gürdal, Z., and Jegley, D., "Design and manufacture of elastically tailored tow placed plates" (No. NASA/CR-2002-211919). 2002.
- [8] Senocak, E., and Tanriover, H., "Analysis of composite plates with variable stiffness using Galerkin method", *The Aeronautical Journal*, Vol. 111, No. 1118, Pp. 247-255. 2007.
- [9] Lopes, C. S., Gürdal, Z., and Camanho, P. P., "Variable-stiffness composite panels: Buckling and first-ply failure improvements over straight-fibre laminates", *Composite Structures*, Vol. 86, No. 9, pp. 897-907. 2008.
- [10] Lopes, C. S., Gürdal, Z., and Camanho, P. P., "Tailoring for strength of composite steered-fibre panels with cutouts", *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 41, No. 12, pp. 1760-1767. 2010.
- [11] Sousa, C. S., Camanho, P. P., and Suleman, A., "Analysis of multistable variable stiffness composite plates", *Composite Structures*, Vol. 98, pp. 34-46. 2013.
- [12] Halder, A., Reinoso, J., Jansen, E., and Rolfes, R., "Thermally induced multistable configurations of variable stiffness composite plates: Semi-analytical and finite element investigation", *Composite Structures*, Vol. 183, pp. 161-175. 2018.
- [13] Anilkumar, P. M., and Rao, B. N., "Impact of hygrothermal environment on the bistability of variable stiffness laminates with curvilinear fibre paths", *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics*. Vol. 13, No. 1, pp. 33-48. 2021.
- [14] Sharma, N., Swain, P. K., Maiti, D. K., and Singh, B. N., "Static and free vibration analyses and dynamic control of smart variable stiffness laminated composite plate with delamination", *Composite Structures*, Vol. 280, pp. 114793. 2022.
- [15] Shukla, R., and Pradyumna, S., "Static Response of a Variable Stiffness Composite Laminated Plate Embedded with a PFRC Layer", In *Recent Advances in Computational and Experimental Mechanics, Vol—I: Select Proceedings of ICRACEM 2020* (pp. 435-446). Springer Singapore. 2022.
- [16] Anilkumar, P. M., Scheffler, S., Halder, A., Brod, M., Rao, B. N., Jansen, E. L., and Rolfes, R., "Nonlinear dynamic modeling of bistable variable stiffness composite laminates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 545, pp. 117417. 2023.
- [17] Guo, X., Dong, T., and Guo, Z., "Study on the rectangular bistable composite laminated plate through dynamic modeling, numerical simulation and experiment." *Acta Mechanica*, Vol. 234, No. 9, pp. 4297-4313. 2023.
- [18] Lemos, D. M., Marques, F. D., and Ferreira, A. J., "A review on bistable composite laminates for aerospace applications", *Composite Structures*, pp. 117756. 2023.
- [19] Guo, X. T., Zhang, W., and Zhang, Y. F., "Experimental and numerical investigations on nonlinear snap-through vibrations of an asymmetrically composite laminated bistable thin plate simply supported at four corners", *Engineering Structures*, Vol. 296, pp. 116926. 2023.
- [20] Zhang, Z., Xu, J., Ma, Y., Sun, M., Chai, H., Wu, H., and Jiang, S., "Design and analysis of multistable curvilinear-fiber laminates based on continuous fiber 3D printing of thermosetting resin matrix", *Composite Structures*, Vol. 307, pp. 116616. 2023.
- [21] Guo, Z., Xu, J., Cao, D., Dong, T., and Ma, W., "The static and dynamic regimes of the bistable asymmetric cross-ply composite laminated plates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, pp. 1-15. 2023.
- [22] Taki, M. S., Tikani, R., and Ziaei-Rad, S., "A comprehensive formulation for determining static characteristics of mosaic multi-stable composite laminates under large deformation and large rotation", *Thin-Walled Structures*, Vol. 197, pp. 111545. 2024.
- [23] Mukherjee, P., Mukherjee, A., Arockiarajan, A., and Ali, S. F., "Dynamics of bistable composite plates", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 104767. 2024.
- [24] Sharma, N., Swain, P. K., Maiti, D. K., and Singh, B. N., "Static and free vibration analyses and dynamic

- control of smart variable stiffness laminated composite plate with delamination”, *Composite Structures*, Vol. 280, 114793.
- [25] Hashemi, S., Shahri, P. K., Beigzadeh, S., Zamani, F., Eratbeni, M. G., Mahdavi, M., Heidari, A., Khaledi, H. and Abadi, M. R. R., “Nonlinear free vibration analysis of In-plane Bi-directional functionally graded plate with porosities resting on elastic foundations”, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 14, No. 01, pp. 2150131. 2022.
- [26] Lee, A. J., and Inman, D. J., “Electromechanical modelling of a bistable plate with macro fiber composites under nonlinear vibrations”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 446, pp.326-342. 2019.
- [27] Lee, A. J., and Inman, D. J., “A multifunctional bistable laminate: Snap-through morphing enabled by broadband energy harvesting”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 29, No. 11, pp. 2528-2543, 2018.