Journal of Computational Methods in Engineering, 2025, 44(1), 43-61; DOI: 10.47176/jcme.44.1.1045

Journal of Computational Methods in Engineering

Journal homepage: https://jcme.iut.ac.ir/

ISSN: 2228-7698 EISSN: 2423-5741

Original Article

Meshless Local Exponential Basis Functions with Up-To-Desired Continuity Order for Bending of Laminated Composite Plates

Ali Reza Motamedi, Nima Noormohammadi* and Bijan Boroomand

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran

Abstract: This paper presents a meshless local method based on Trefftz formulation for bending analysis of laminated composite plates regardless of the lamination scheme. The plates are modelled based on Mindlin's first order shear deformation theory. In the proposed method, the solution domain is discretized by two sets of point grids, namely the nodal grid that contain the degrees of freedom (DOFs), and the intermediate point grid that have no DOFs, but are only used for imposition of the governing equations and the boundary conditions. A subdomain, named cloud, is considered corresponding to every node, which contains a definite number of its adjacent nodes. The problem solution is constituted of homogeneous and particular parts within the cloud, where exponential basis functions are used to interpolate each part. The implemented formulation is capable of extending continuity of the DOFs up to desired order of derivatives, by only interpolating the intended DOF by means of its corresponding DOFs from the nodes in its close neighborhood within the cloud in a weighted residual approach, without introducing extra DOFs. The overlap of adjacent clouds integrates the solution function over the entire domain. To investigate the applicability and accuracy of the proposed method, numerical examples will compare the extracted solutions by their exact counterparts or available data in the literature, which reflect perfect performance of the method.

Keywords: Composite plate, Mindlin's theory, Trefftz, Meshless method, Exponential basis functions

Received: Feb. 13, 2025; Revised: Mar. 30, 2025; Accepted: Apr. 13, 2025; Published Online: Jun. 23, 2025.

* Corresponding Author: noormohammadi@iut.ac.ir

How to Cite: Motamedi Ali Reza, Noormohammadi Nima and Boroomand Bijan, Meshless Local Exponential basis functions with up-to-desired continuity order for bending of laminated composite plates, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 44(1), 43-61; DOI: 10.47176/jcme.44.1.1045.

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۴، شماره ۱، ۱۴۰۴، ص. ۶۱–۴۳، DOI: 10.47176/jcme.44.1.1045

نشریه روش‌های عددی در مهندسی
صفحه خانگی نشریه: https://jcme.iut.ac.ir/
شاپا: ۷۶۹۸–۲۲۲۸ شاپا الکترونیکی: ۵۷۴۱–۲۴۲۳

مقاله پژوهشی

روش بدون شبکه توابع پایه نمایی با مرتبه پیوستگی دلخواه برای خمش صفحات مرکب لایه‌ای

علیرضا معتمدی، نیما نورمحمدی* و بیژن برومند
دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده– در این مقاله یک روش بدون شبکه محلی براساس فرمول‌بندی ترفتز به منظور تحلیل رفتار خمشی ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای بدون محدودیت در آرایش لایه‌ها توسعه داده شده است. مدل‌سازی صفحات با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول (میندلین) صورت گرفته است. در روش پیشنهادی دامنه حل شامل ناحیه داخل و مرزهای دامنه به وسیله دو مجموعه از شبکه نقاط گسسته‌سازی می‌شود. نقاطی که حاوی مجهولات درجات آزادی هستند نقاط گره‌ای، و نقاط شبکه دوم که به منظور تشکیل معادلات تعریف می‌شوند نقاط واسطه نامیده می‌شوند. متناظر با هر یک از این نقاط یک زیردامنه به نام ابر حاوی تعدادی از نقاط گره‌ای مجاور در نظر گرفته می‌شود. در این روش، جواب مسئله از مجموع دو بخش همگن و خصوصی حاصل شده و برای درون‌یابی هر کدام از یک سری متشکل از توابع پایه نمایی استفاده می‌شود. فرمول‌بندی این روش قابلیت ایجاد پیوستگی با مراتب دلخواه میان زیرناحیه‌ها بدون اضافه نمودن هرگونه درجه آزادی را دارا است، به این صورت که مقادیر درجات آزادی و یا مشتقات آن‌ها تا مرتبه دلخواه در هر نقطه گره‌ای توسط مقادیر متناظر از نقاط گره‌ای مجاور همان ابر درونیابی می‌شوند، سپس همپوشانی ابرها این پیوستگی را به کل دامنه سرایت می‌دهد. برای بررسی کارایی و دقت روش، نتایج حاصل با حل دقیق مسئله در صورت وجود، و یا با سایر مراجع مقایسه می‌شوند که همگی بیانگر عملکرد بسیار خوب روش هستند.

واژه‌های کلیدی: ورق کامپوزیت، تئوری میندلین، ترفتز، روش بدون شبکه، توابع پایه‌نمایی.

دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۱۱/۲۵، بازنگری: ۱۴۰۴/۰۱/۱۰، پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۲۴، اولین انتشار: ۱۴۰۴/۰۴/۰۲

*: نویسنده مسئول، رایانامه: noormohammadi@iut.ac.ir

فهرست علائم

E	مدول الاستیسیته	$\mathbf{L}$	اپراتور ماتریسی معادلات حاکم بر خمش
$\mathbf{F}_\mathrm{D}$	بردار معلومات شرایط مرزی دریشله (ضروری)	$\mathbf{L}_\mathrm{B}$	اپراتور ماتریسی متناظر با شرایط مرزی
$\mathbf{F}_\mathrm{N}$	بردار معلومات شرایط مرزی نویمان (طبیعی)	m_h	تعداد مودهای پاسخ همگن
G	مدول برشی	m^p	تعداد مودهای پاسخ خصوصی
h	ضخامت ورق	n^i	تعداد نقاط گره‌ای موجود در ابر i
$\mathbf{i}$	نشانگر عدد موهومی	n^m	تعداد نقاط واسطه
k_s	ضریب تصحیح انرژی برشی در تئوری میندلین	$\mathbf{q}$	بردار بارگذاری
Q_{ij}	ضرایب سختی هر لایه در مختصات محلی	$\mathbf{u}_h$	پاسخ همگن
$\bar{Q}_{ij}$	ضرایب سختی تبدیل‌یافته هر لایه در مختصات کلی	$\mathbf{u}_p$	پاسخ خصوصی
$\mathbf{u}_0$	بردار حاوی درجات آزادی (مولفه‌های تغییرشکل)	ν	نسبت پواسون
$\mathbf{u}_h^R$	بخش همگن درجات آزادی در نقاط مجاور هر ابر	$\mathbf{\Psi}_h^R$	ماتریس مقادیر توابع پایه در نقاط مجاور هر ابر
$\nabla\mathbf{u}$	گرادیان مولفه‌های بردار $\mathbf{u}$	θ_k	زاویه انحراف الیاف لایه k با محور طولی دستگاه مختصات کلی
Ω	سطح میانی صفحه	R_i^Ω	عبارت باقیمانده وزنی هرکدام از نقاط واسطه واقع بر دامنه
Γ	مرزها	R_i^Γ	عبارت باقیمانده وزنی هرکدام از نقاط واسطه واقع بر مرز
δV	تغییرات کار مجازی سیستم نیروهای خارجی	(α_i, β_i)	ضرایب توان تابع نمایی متناظر با x و y
δU	تغییرات مجازی انرژی ارتجاعی	$\mathbf{h}(\alpha_i, \beta_i)$	بردار ویژه متناظر با هر مود همگن

۱ – مقدمه

امروزه ورق‌های کامپوزیت به دلیل نسبت بالای مقاومت به وزن کاربرد فراوانی در حوزه‌های مختلف صنعت پیدا کرده‌اند. از این‌رو محققان بسیاری به مطالعه پیرامون تحلیل این‌گونه ورق‌ها به منظور بدست آوردن نتایج دقیق‌تر با روند حل سریع‌تر یا قابلیت حل طیف وسیع‌تری از مسائل علاقمند شده‌اند. با توجه به پیچیدگی‌های حل مسائل به صورت سه‌بعدی، همواره ایده توسعه تئوری‌هایی برای تبدیل آن‌ها به مسائل ساده‌تر دوبعدی همواره یکی از حوزه‌های پرچالش بوده است و در این راستا، تئوری استفاده شده در روند حل را می‌توان یکی از عوامل موثر بر دقت نتایج دانست. در این تحقیق تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول [۱] که قابلیت حل طیف گسترده صفحات در محدوده ضخامت کم تا نسبتاً ضخیم را داراست استفاده شده است. از جمله تئوری‌های دیگر ورق که محققان استفاده می‌کنند می‌توان تئوری‌های با مرتبه بالاتر [۶-۲] را مطرح کرد. پاسخ دقیق این معادلات در برخی از مسائل موجود بوده و در بیشتر مواقع یافت نمی‌شود و یا بسیار پیچیده است.

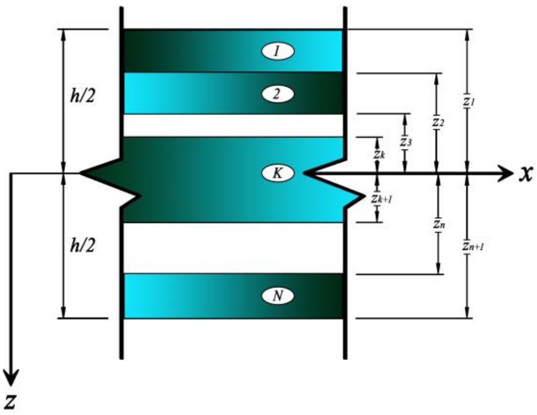
در دهه‌های اخیر روش‌های عددی با هدف حل طیف وسیع‌تری از مسائل ورق جایگزین روش‌های تحلیلی شده‌اند. از جمله این روش‌ها می‌توان روش اجزای محدود[1] را نام برد. اخیرا بررسی جامعی در ارتباط با پیشرفت‌های این روش در حوزه

ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای صورت گرفته است [۹-۷]. با این وجود برخی خصوصیات ذاتی این روش از جمله نیاز به یک شبکه المان در سرتاسر دامنه حل، به‌خصوص در مسائلی که بازسازی شبکه مذکور در روند حل لازم باشد، ذهن محققان را برای برطرف کردن این محدودیت با محوریت حذف شبکه المان به خود مشغول کرده است. روش‌های بدون شبکه[۲] سابقه نسبتا طولانی در علم محاسبات و حل معادلات دیفرانسیل دارند، اما استفاده گسترده از آن‌ها در مسائل مهندسی با رشد دستگاه‌های محاسبه‌گر پرقدرت شتاب قابل ملاحظه‌ای یافته است. بسته به کاربردهای مورد انتظار، خصوصیات متنوعی در آن‌ها ایجاد شده و روزبه‌روز بر قدرت حل آن‌ها افزوده می‌شود. از جمله مزایای روش‌های بدون شبکه می‌توان به سادگی گسسته‌سازی دامنه حل، بهره‌گیری از توابع پایه غنی‌تر، برخورداری از نرخ‌های بالاتر همگرایی و توانایی ایجاد پیوستگی مراتب بالاتر اشاره کرد.

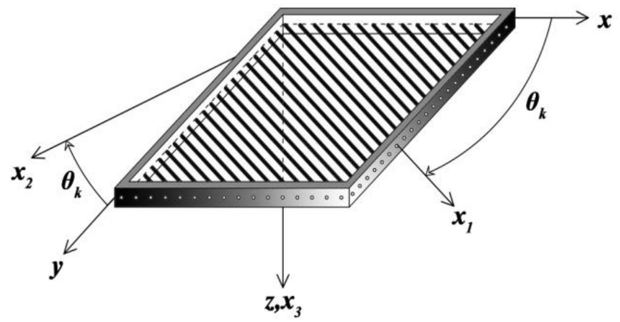
تاریخچه روش‌های بدون شبکه به حدود پنج دهه پیش باز می‌گردد، زمانی که روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده[۳] توسط لوسی [۱۰] وگینگلد و موناگان [۱۱] با هدف کاربرد در حل مسائل نجومی همانند انفجارهای ستاره‌ای مطرح گردید. این شیوه یک روش بدون شبکه لاگرانژی است که امروزه عمدتا برای حل مسائل مکانیک سیالات به کار می‌رود. روش المان‌های پراکنده[۴] توسط نیرولز و همکاران در ۱۹۹۲ با حذف شبکه المان و جایگزینی تقریب با روش حداقل مربعات توسعه یافت [۱۲]. سپس در ۱۹۹۴ روش بدون شبکه گالرکین[۵] توسط بلیچکو و همکاران با بهبود نسبی تقریب و افزودن برخی عبارات مشتق محذوف از روش المان پراکنده، و نیز اعمال شرایط مرزی ضروری به روش ضرایب لاگرانژی توسعه یافت [۱۳]. در هر دو روش مذکور لزوم استفاده از شبکه المان پس‌زمینه برای محاسبه انتگرال عددی از سرعت و سهولت کار می‌کاهد. روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین[۶] در ۱۹۹۸ میلادی با ایده اعمال فرم ضعیف انتگرالی معادلات دیفرانسیل به صورت محلی به جای اعمال در سرتاسر دامنه، توسط آتلوری و همکاران ارائه گردید [۶] که نتیجه آن، حذف شبکه المان پس‌زمینه برای انتگرال‌گیری است [۱۴].

روش بدون شبکه مرزی توابع پایه نمایی نخستین بار توسط برومند و همکاران برای حل مسائل الاستودینامیک پیشنهاد گردید [۱۵]. مبنای روش بر ایده ترفتز استوار است که به معنای تقسیم پاسخ به دو بخش همگن و خصوصی، و تقریب بخش همگن با سری متشکل از توابع پایه نمایی است، به طوری که با تنظیم نمای این توابع آن‌ها را قادر به ارضای دقیق صورت همگن معادله نمایند. تاکنون توسعه این ایده در زمینه‌های مختلف مورد توجه قرار گرفته است. از جمله می‌توان تحلیل مسائل دینامیک سیالات [۱۶]، انتشار موج در سازه‌ها [۱۷]، ورق‌های کامپوزیت [۱۸ و ۱۹]، تئوری الاستیسیته غیرمحلی [۲۰] و موارد دیگر را نام برد. از جمله تلاش‌های صورت گرفته برای افزایش انعطاف‌پذیری این شیوه، بازنویسی آن به صورت بدون شبکه محلی بوده که نخستین بار توسط مسیبی انجام گرفت [۲۱]. معتمدی و همکاران روش بدون شبکه مذکور را برای تحلیل خمش، کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای در تئوری‌های مختلف توسعه دادند [۲۲]. در شکل اولیه، این روش تنها به برقراری پیوستگی بین مقادیر درجات آزادی در گره‌های مجاور می‌پرداخت، بنابراین بعضا در مواجهه با نامنظمی شبکه دچار حساسیت و افت دقت می‌گشت. برای رفع این مشکل سلیمانی‌فر و برومند [۲۳] با برقراری پیوستگی بین مشتقات جابجایی تا مراتب دلخواه، پایداری و همگرایی روش در شبکه‌های نامنظم را بهبود بخشیدند. در تحقیق حاضر این روش با پیوستگی تا مرتبه اول مشتقات درجات آزادی در تئوری میندلین برای تحلیل خمش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای توسعه یافته و عدم محدودیت روش به آرایش لایه‌ای ورق، هندسه و شرایط مرزی مورد بررسی قرار گیرد.

در بخش دوم، پس از ارائه مفاهیم کلی صفحات مرکب لایه‌ای و میدان جابجایی تئوری مورد نظر، به استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی آن پرداخته می‌شود. در بخش سوم، به تشریح جزئیات روش پیشنهادی شامل چگونگی



(الف)



(ب)

شکل ۱. آرایش لایه‌ای صفحات مرکب لایه‌ای: الف) سطح مقطع، ب) سیستم مختصات محلی و کلی در هر لایه.

استخراج پاسخ همگن و خصوصی و نیز تشکیل معادلات مربوطه و ارتباط بین درجات آزادی پرداخته می‌شود. در بخش چهارم به منظور بررسی کارایی روش پیشنهادی، نتایج مطالعات عددی ارائه شده‌اند. سرانجام بخش پنجم به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری مطالب پرداخته است.

۲ – مدل‌سازی صفحات مرکب

یک صفحه مرکب لایه‌ای با ضخامت h متشکل از N لایه دلخواه همانند شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. به منظور تعریف پارامترهای سینماتیک صفحه از یک دستگاه مختصات کارتزین کلی (x,y,z) منطبق بر میانه ضخامت استفاده شده است. صفحه متناسب با میانه ضخامت، میان‌صفحه نام دارد. جهت الیاف در لایه kام به اندازه زاویه θ_k نسبت به محور طولی مختصات کلی انحراف دارد که با دستگاه مختصات محلی (x_1,x_2,x_3) قابل تعریف است.

۲-۱- میدان جابجایی، کرنش‌ها و تنش‌ها

میدان جابجایی ورق در تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت روابط (۱-۳) تعریف می‌شود،

$$u(x,y,z)=u_0(x,y)+z\phi_x(x,y) \tag{۱}$$

$$v(x,y,z)=v_0(x,y)+z\,\phi_y(x,y) \tag{۲}$$

$$w(x,y,z)=w_0(x,y) \tag{۳}$$

u، v و w به ترتیب مولفه‌های میدان جابجایی در راستای x و y و z دستگاه مختصات کلی، u_0، v_0، w_0 مولفه‌های تغییرمکان یک نقطه دلخواه از میان‌صفحه و ϕ_x، ϕ_y به ترتیب چرخش‌های مستقل یک المان خطی عمود بر میان‌صفحه حول محورهای x و y هستند. با استفاده از میدان جابجایی، مولفه‌های کرنش مطابق رابطه (۴) به دست می‌آیند،

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}{}^{(0)}\\ \varepsilon_{yy}{}^{(0)}\\ \gamma_{xy}{}^{(0)}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}{}^{(I)}\\ \varepsilon_{yy}{}^{(I)}\\ \gamma_{xy}{}^{(I)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_{0,x}\\ v_{0,y}\\ u_{0,y}+v_{0,x}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\phi_{x,x}\\ \phi_{y,y}\\ \phi_{x,y}+\phi_{y,x}\end{Bmatrix}, \tag{۴}$$
$$\gamma=\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\phi_x+w_{0,x}\\ \phi_y+w_{0,y}\end{Bmatrix}$$

با استفاده از روابط بنیادی می‌توان رابطه تنش و کرنش را در دستگاه مختصات کلی برای هرلایه مطابق رابطه‌ی (۵) بدست آورد،

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}^k\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}^k \quad (۵)$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45}\\ \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55}\end{bmatrix}^k\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}^k$$

مولفه‌های سختی انتقال یافته $\bar{Q}_{ij}^k$ به صورت رابطه‌ی (۶) قابل محاسبه هستند،

$$\begin{aligned}
&\bar{Q}_{11}=Q_{11}c^4+2(Q_{12}+2Q_{66})s^2c^2+Q_{22}s^4\\
&\bar{Q}_{12}=(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})s^2c^2+Q_{12}(s^4+c^4)\\
&\bar{Q}_{22}=Q_{11}s^4+2(Q_{12}+2Q_{66})s^2c^2+Q_{22}c^4\\
&\bar{Q}_{16}=(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})sc^3+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})s^3c\\
&\bar{Q}_{26}=(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})s^3c+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})sc^3\\
&\bar{Q}_{66}=(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})s^2c^2+Q_{66}(s^4+c^4)\\
&\bar{Q}_{44}=Q_{44}c^2+Q_{55}s^2,\ \ \bar{Q}_{45}=(Q_{55}-Q_{44})cs\\
&\bar{Q}_{55}=Q_{44}s^2+Q_{55}c^2\\
&s^k=\sin^k\theta,\ \ c^n=\cos^n\theta
\end{aligned} \quad (۶)$$

در این رابطه $\bar{Q}_{ij}$ ضرایب سختی تبدیل‌یافته در حالت تنش‌مستوی بوده و بر اساس زاویه ارتوتروپی لایه kام ورق و Q_{ij} قابل حصول هستند [۵]. با توجه به ارتوتروپیک بودن هر لایه می‌توان ضرایب سختی آن را در دستگاه محلی مربوطه از رابطه‌ی (۷) بدست آورد،

$$\begin{aligned}
&Q_{11}=\frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})},\ Q_{12}=\frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})},\ Q_{44}=G_{23},\\
&Q_{22}=\frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})},\ Q_{66}=G_{12},\ \ Q_{55}=G_{13}
\end{aligned} \quad (۷)$$

۲-۲- معادلات حاکم، شرایط مرزی و منتجه‌های تنش

معادلات حاکم بر تعادل ورق با استفاده از اصل کار مجازی مطابق رابطه‌ی (۸) قابل استخراج است،

$$\delta\Pi=\delta U+\delta V=0 \quad (۸)$$

که δU تغییرات انرژی ارتجاعی و δV کار مجازی انجام‌یافته توسط سیستم نیروهای خارجی مطابق روابط (۹) و (۱۰) هستند،

$$\begin{aligned}
\delta U=\int_{\Omega_0}\Bigg\{\int_{-h/2}^{+h/2}\Big(&\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+\sigma_{xy}\delta\gamma_{xy}+\sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}\\
&+\sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}\Big)dz\Bigg\}d\Omega
\end{aligned} \quad (۹)$$

$$\delta V=-\int_{\Gamma_\sigma}\left\{\int_{-h/2}^{+h/2}\left[\hat{\sigma}_{nn}\delta u_n+\hat{\sigma}_{ns}\delta u_s+\hat{\sigma}_{nz}\delta w\right]dz\right\}ds \quad (۱۰)$$

در روابط فوق Ω_0 دامنه میان‌صفحه ورق در صفحه x-y، Γ_σ سهمی از مرز Γ ورق که تنش‌ها در آن تعریف شده‌اند، و $(\hat{\sigma}_{nn},\hat{\sigma}_{ns},\hat{\sigma}_{nz})$ تنش‌های تعریف‌شده بر روی مرز Γ_σ هستند. با محاسبه کرنش‌های مجازی بر حسب جابجایی‌های مجازی با استفاده از رابطه (۵) و جایگذاری آن‌ها در روابط قبل، δU و δV بر حسب جابجایی‌های مجازی به‌دست می‌آیند. به منظور استخراج معادلات حاکم بر دامنه ورق، ابتدا نیاز به انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء برای آزاد کردن پارامترهای جابجایی مجازی δu_0، δv_0 و δw_0 است. سپس عباراتی شامل دو بخش انتگرال بر روی دامنه و در امتداد مرز حاصل می‌شود. معادلات حاکم بر تعادل دامنه ورق با صفر قرار دادن عبارات مضروب در تغییرشکل‌های مجازی انتگرال دامنه به شکل روابط (۱۱–۱۵) حاصل می‌گردند،

$$\delta u_0:\quad \frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0 \quad (۱۱)$$

$$\delta v_0:\quad \frac{\partial N_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=0 \quad (۱۲)$$

$$\delta w_0:\quad \frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0 \quad (۱۳)$$

$$\delta\varphi_x:\quad \frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0 \quad (۱۴)$$

$$\delta\varphi_y:\quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}-Q_y=0 \quad (۱۵)$$

که N_{ij} و M_{ij} به ترتیب نیروها و لنگرهای منتجه تنش‌های درون‌صفحه‌ای و Q_i منتجه تنش‌های برشی عرضی هستند که

با انتگرال‌گیری لایه‌به‌لایه از تنش‌های متناسب در راستای ضخامت ورق به صورت روابط (۱۶–۱۸) بر حسب مولفه‌های کرنش در رابطه (۵) به دست می‌آیند،

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (۱۶)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (۱۷)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (۱۸)$$

توجه شود که به دلیل تاثیر همزمان معادلات تعادل درون–صفحه و خمشی، آرایش لایه‌بندی ورق در ضخامت می‌تواند وضعیتی دلخواه داشته باشد. ضرایب A_{ij}، B_{ij} و D_{ij} به ترتیب ضرایب سختی محوری، خمشی– محوری و خمشی نامیده می‌شوند که به صورت روابط (۱۹) و (۲۰) محاسبه می‌شوند،

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \{1, z, z^2\} dz \quad (i,j = 1,2,6) \quad (۱۹)$$

$$A_{ij} = k_s \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \quad (i,j = 4,5) \quad (۲۰)$$

که در آن z_k و z_{k+1} به ترتیب ارتفاع سطوح بالایی و پایینی لایه kام مطابق شکل ۱ هستند. با جایگزینی میدان جابجایی در تئوری مورد نظر برای برآورد کرنش‌ها و استفاده در رابطه کار مجازی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر خمش ورق لایه‌ای تحت بار عرضی $q(x,y)$ مطابق رابطه‌ی (۲۱) خواهند بود،

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_0 = \mathbf{q} \qquad \mathbf{u}_0 = \{u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y\}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{q} = \{0, 0, q(x,y), 0, 0\}^{\mathrm{T}} \quad (۲۱)$$

$\mathbf{L}$ ماتریسی ۵×۵ شامل اپراتورهای دیفرانسیلی تعادل ورق است که در ضمیمه مقاله تعریف شده‌اند. همچنین با بررسی انتگرال‌های ایجاد شده بر روی مرز، حاصل از اعمال انتگرال جزء‌به‌جزء در عبارت کار مجازی، می‌توان شرایط مرزی را استخراج نمود. در تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول بر روی هر لبه ورق پنج شرط مرزی باید ارضاء شود که برای حالت‌های مختلف در جدول ۱ تنظیم شده‌اند. شایان ذکر است که شرایط مرزی مفصلی در دو دسته S و S2 تعریف شده است که به ترتیب برای آرایش‌های لایه‌ای متعامد و زاویه‌ای در ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای استفاده می‌شوند.

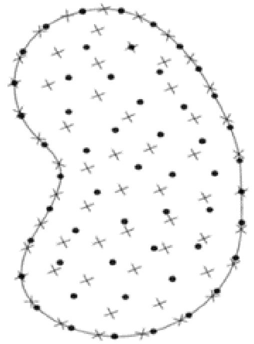
۳ - روش بدون شبکه محلی توابع پایه نمایی

پس از استخراج دستگاه معادلات حاکم، از یک روش بدون شبکه محلی برای تقریب پاسخ‌های آن استفاده می‌شود. در این روش ابتدا دامنه حل به وسیله مجموعه‌ای از نقاط گره‌ای واقع در داخل دامنه و بر روی مرزهای آن گسسته‌سازی می‌شود. متناسب با هر نقطه یک زیردامنه به نام ابر شامل تعدادی از نقاط گره‌ای مجاور در نظر گرفته می‌شود. مجهولات در نظر گرفته شده در این مجموعه همان درجات آزادی هستند. علاوه بر شبکه نقاط گره‌ای، از شبکه نقاط دیگری به نام نقاط واسطه که در سرتاسر دامنه حل پراکنده شده‌اند به منظور تشکیل معادلات لازم استفاده شده است (شکل ۲). در نقاط واسطه هیچ‌گونه درجه آزادی در نظر گرفته نشده و صرفاً محل تشکیل معادلات نهایی هستند، به گونه‌ای که موجب پیوستگی درجات آزادی ابرهای مجاور در نقاط واسطه داخل دامنه و نیز ارضای شرایط مرزی برای نقاط واسطه واقع بر مرز شوند. بدین منظور در هریک از نقاط واسطه نیز یک ابر شامل تعدادی از نقاط گره‌ای مجاور در نظر گرفته می‌شود. در ابتدا پاسخ معادله دیفرانسیل در مختصات محلی هر ابر به صورت مجموع دو بخش پاسخ همگن و خصوصی مطابق رابطه (۲۲) نوشته می‌شود،

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p \quad (۲۲)$$

جدول ۱- مقادیر معلوم شرایط مرزی مختلف در تحقیق حاضر.

نوع لبه	مشخصه	مولفه‌های معلوم
مفصلی (آرایش متعامد)	S	$u_s, N_{nn}, w_0, \phi_s, M_{nn}$
مفصلی (آرایش زاویه‌ای)	S۲	$u_n, N_{ns}, w_0, \phi_s, M_{nn}$
گیردار	C	$u_s, u_n, w_0, \phi_s, \phi_n$
آزاد	F	$N_{ns}, N_{nn}, Q_n, M_{ns}, M_{nn}$



شکل ۲- نمایش دامنه حل، نقاط واسطه و گره‌ای.

با قرار دادن رابطه (۲۲) در رابطه (۲۱) می‌توان نوشت،

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u}_h = \mathbf{0} \quad \text{in}\,\Omega \tag{۲۳}$$

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u}_p = \mathbf{q} \quad \text{in}\,\Omega \tag{۲۴}$$

$$\mathbf{L}_{\mathrm{B}}\mathbf{u}_h = \mathbf{u}'_h \quad \text{on}\ \partial\Omega \quad (\mathbf{u}'_h = \mathbf{u}'_{\mathrm{B}} - \mathbf{u}'_p), \tag{۲۵}$$
$$(\mathbf{L}_{\mathrm{B}} = \mathbf{L}_{\mathrm{N}}\ \text{or}\ \mathbf{L}_{\mathrm{D}})$$

اندیس p مربوط به بخش خصوصی و اندیس h مربوط به بخش همگن است. $\mathbf{L}_{\mathrm{B}}$ عملگر شرایط مرزی به صورت نویمان $(\mathbf{L}_{\mathrm{N}})$ یا دریشله $(\mathbf{L}_{\mathrm{D}})$ و یا ترکیبی از هر دو مطابق جدول ۱ است. $\mathbf{u}'_{\mathrm{B}}$ مقادیر معلوم شرایط مرزی بوده و $\mathbf{u}'_p$ مقادیر متناظر شرایط مرزی حاصل از جواب خصوصی است، که اختلاف آن‌ها $(\mathbf{u}'_h)$ باید توسط پاسخ همگن ارضا شود. پاسخ خصوصی با حل معادله (۲۴) و پاسخ همگن نیز با حل معادلات (۲۳) و (۲۵) حاصل می‌شود.

۳-۱- استخراج پاسخ همگن

با توجه به ثابت بودن ضرایب عملگر مشتق در معادلات حاکم می‌توان ادعا نمود که توابع نمایی مناسبی قابل یافتن هستند که در دستگاه معادله همگن (۲۳) صدق کنند. بنابراین پاسخ همگن به صورت یک سری متشکل از توابع پایه نمایی در محدوده هر ابر با ضرایب منحصر به فرد مطابق رابطه (۲۶) در نظر گرفته می‌شود،

$$\mathbf{u}_h(x,y) = \sum_{i=1}^{m_h} c_i\ \mathbf{h}(\alpha_i\,,\beta_i\,)\,e^{\alpha_i\,x+\beta_i\,y} \tag{۲۶}$$

که اندیس i شمارنده مودها و m_h تعداد مودهای همگن مورد نیاز هستند، به طوری‌که مود iام حل را تشکیل دهد. c_i ضریب این مود بوده و مقدار آن برای ابرهای مختلف متفاوت است. α_i و β_i اعداد مختلط هستند. با جایگذاری $\mathbf{u}_h$ در معادله (۲۳) رابطه (۲۷) به دست می‌آید،

$$\mathbf{\Lambda}(\alpha_i\,,\beta_i\,)\mathbf{h}(\alpha_i\,,\beta_i\,) = \mathbf{0} \tag{۲۷}$$

برای بدست آوردن جواب‌های غیربدیهی رابطه‌ی (۲۷) باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر قرار داده شود، یا به عبارتی دستگاه از مرتبه کامل برخوردار نباشد. بنابراین معادله مشخصه مطابق رابطه (۲۸) به دست می‌آید،

$$\det(\mathbf{\Lambda}(\alpha_i\,,\beta_i\,)) = 0 \tag{۲۸}$$

با این کار معادله مشخصه‌ای به صورت چندجمله‌ای بر حسب α_i و β_i حاصل می‌گردد. با محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه، ضرایب α_i برحسب β_i و یا بالعکس، ضرایب β_i برحسب α_i بدست می‌آیند، به طوری‌که بردار $\mathbf{h}(\alpha_i\,,\beta_i\,)$ جواب غیربدیهی دستگاه معادلات همگن (۲۷) باشد یا به عبارت دیگر در فضای پوچ ماتریس ضرایب $\mathbf{\Lambda}(\alpha_i\,,\beta_i\,)$ قرار گیرد. همچنین می‌توان گفت بردار $\mathbf{h}(\alpha_i\,,\beta_i\,)$ در رابطه (۲۷) نقشی مشابه یک بردار ویژه[۷] ایفا می‌کند. لازم به ذکر است که از میان هر جفت از ضرایب α_i و β_i، تنها یکی از آن‌ها اختیاری بوده و ضریب دیگر طبق روابط (۲۹) و (۳۰) با حل معادله مشخصه محاسبه می‌گردد،

$$\alpha_l = f_l(\beta_i) \qquad l = 1,\ldots,r \tag{۲۹}$$

$$\beta_l = g_l(\alpha_i) \qquad l = 1,...,r \tag{30}$$

در این رابطه r برابر تعداد ریشه‌های معادله مشخصه بوده که با مرتبه این معادله یکسان است. شایان ذکر است در ورق‌های همسانگرد معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف بوده و از این رو بعضی از مودها با یکدیگر یکسان و منجر به تشکیل مودهای تکراری می‌شوند. به عبارت دیگر برخی از مودها اصطلاحاً مفقود گردیده‌اند. در تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول با بدست آوردن معادله مشخصه و حل آن، روابط (۳۱) حاصل می‌شود،

$$\begin{cases} \alpha_i = +\mathbf{i}\beta_i\,, \ \text{(Folded root)}, & \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \{-1, +\mathbf{i}\beta_i\,, \beta_i\}^T, \\ \alpha_i = -\mathbf{i}\beta_i\,, \ \text{(Folded root)}, & \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \{-1, -\mathbf{i}\beta_i\,, \beta_i\}^T, \\ \alpha_i = +\dfrac{\zeta}{h}, \ \text{(Simple root)}, & \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \{0, -\bar{\beta}_i\,, \zeta\}^T, \\ \alpha_i = -\dfrac{\zeta}{h}, \ \text{(Simple root)}, & \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \{0, \bar{\beta}_i\,, \zeta\}^T, \\ \bar{\beta}_i = h\beta_i\,, \ \zeta = \sqrt{-\bar{\beta}_i^2 + 12k_s}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_i = +\mathbf{i}\alpha_i\,, \ \text{(Folded root)}, & \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \{+\mathbf{i}, -\mathbf{i}\alpha_i\,, \alpha_i\}^T, \\ \beta_i = -\mathbf{i}\alpha_i\,, \ \text{(Folded root)}, & \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \{-\mathbf{i}, +\mathbf{i}\alpha_i\,, \alpha_i\}^T, \\ \beta_i = +\dfrac{\eta}{h}, \ \text{(Simple root)}, & \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \{0, -\eta, \bar{\alpha}_i\}^T, \\ \beta_i = -\dfrac{\eta}{h}, \ \text{(Simple root)}, & \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \{0, +\eta, \bar{\alpha}_i\}^T, \\ \bar{\alpha}_i = h\alpha_i\,, \ \eta = \sqrt{-\bar{\alpha}_i^2 + 12k_s}\,, \end{cases} \tag{31}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود به ازای انتخاب α_i یا β_i تنها چهار مود مستقل به دست می‌آید. به منظور یافتن مودهای گمشده از ترکیب توابع چندجمله‌ای و توابع نمایی برای ساختن مودهایی مستقل مطابق رابطه (۳۲) استفاده می‌شود،

$$\mathbf{u}_h^i = \left[\begin{Bmatrix} f_i^w \\ f_i^{\phi_x} \\ f_i^{\phi_y} \end{Bmatrix} x + \begin{Bmatrix} g_i^w \\ g_i^{\phi_x} \\ g_i^{\phi_y} \end{Bmatrix} y + \begin{Bmatrix} d_i^w \\ d_i^{\phi_x} \\ d_i^{\phi_y} \end{Bmatrix} \right] e^{\alpha_i x + \beta_i y} \tag{32}$$

با قرار دادن مود همگن بالا در معادله همگن و صفر قرار دادن دترمینان ضرایب، مجهولات مطابق رابطه (۳۳) بدست می‌آیند،

$$\begin{cases} \alpha_i = +\mathbf{i}\beta_i\,, \quad \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ +\mathbf{i}\beta_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}(x+y) + \begin{Bmatrix} \beta_i \\ +\xi_i(1-\mathbf{i}) + (1-\mathbf{i}\beta_i^2) \\ -\xi_i(1+\mathbf{i}) - (\beta_i^2 - 1) \end{Bmatrix}, \\ \alpha_i = -\mathbf{i}\beta_i\,, \quad \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -\mathbf{i}\beta_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}(x+y) + \begin{Bmatrix} \beta_i \\ \xi_i(1+\mathbf{i}) + (1+\mathbf{i}\beta_i^2) \\ \xi_i(-1+\mathbf{i}) - (\beta_i^2 - 1) \end{Bmatrix}, \end{cases}$$

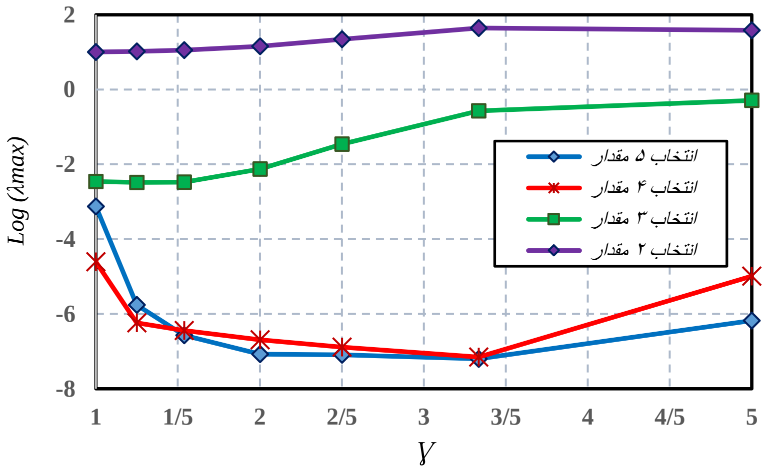
$$\begin{cases} \beta_i = +\mathbf{i}\alpha_i\,, \quad \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ -\mathbf{i}\alpha_i \\ \alpha_i \end{Bmatrix}(x+y) + \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ +\varsigma_i(\mathbf{i}-1) - (\alpha_i^2 + \mathbf{i}) \\ -\varsigma_i(\mathbf{i}+1) - \mathbf{i}(\alpha_i^2 + 1) \end{Bmatrix}, \\ \beta_i = -\mathbf{i}\alpha_i\,, \quad \mathbf{h}_{(\alpha_i,\beta_i)} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{i} \\ \mathbf{i}\alpha_i \\ \alpha_i \end{Bmatrix}(x+y) + \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ -\varsigma_i(\mathbf{i}+1) - (\alpha_i^2 - \mathbf{i}) \\ +\varsigma_i(\mathbf{i}-1) + \mathbf{i}(\alpha_i^2 + 1) \end{Bmatrix}, \end{cases}$$

$$\lambda = 1/(3k_s(\nu - 1)), \quad \xi_i = h^2\beta_i^2\lambda, \quad \varsigma_i = h^2\alpha_i^2\lambda. \tag{33}$$

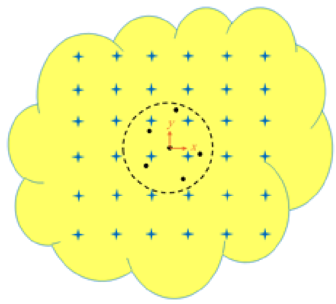
پس از محاسبه مقادیر α بر حسب β و بالعکس، اکنون انتخاب مقادیر عددی مناسب برای هرکدام نقش مهمی در تقریب صحیح پاسخ همگن ایفا می‌کند. برای این منظور از یک آزمایش تعمیم‌یافته[8] برای تنظیم و ارزیابی عملکرد روش عددی استفاده می‌شود [۲۶]. در این آزمایش چند تابع چندجمله‌ای با درجات مختلف (در اینجا تا مرتبه ۷) انتخاب شده و با استفاده از روش بدون شبکه پیشنهادی نسبت به بازتولید آن‌ها اقدام می‌شود. با این روش می‌توان پارامترهای مذکور را تعیین نمود و همچنین کارایی روش را نمایش داد. در شکل ۳ انتخاب مقادیری برای α (یا β) همزمان با تغییر تعداد مقادیر انتخابی مورد بررسی قرار گرفته است. محور قائم نشان‌گر دقت پاسخ و محور افقی بیان‌گر مقادیر انتخابی است. مشاهده می‌گردد که انتخاب ۴ مقدار مختلف برای هر پارامتر، بهینه‌ترین گزینه است. بر طبق نمودار، با انتخاب به صورت $\alpha\ (or\ \beta) = \gamma\pi/20 \times \{-1 \quad -1/2 \quad 1/2 \quad 1\}$ به طوری که $3/5 \le \gamma \le 1/5$ باشد، می‌توان توابع شکل همگن مناسب را استخراج نمود.

۳-۲- استخراج پاسخ خصوصی

بخش خصوصی معادله دیفرانسیل ($\mathbf{u}_p$) صرفاً به منظور ارضای معادله با تاثیر بارگذاری در داخل دامنه حل اضافه می‌شود،



شکل ۳. بررسی تعداد و مقادیر α و β برای بازتولید توابع نمایی در آزمایش زیرناحیه تعمیم‌یافته.



شکل ۴. شبکه نقاط محلی برای برآورد حل خصوصی در هر ابر.

بنابراین یکتا نبوده و هر تابعی که معادله خصوصی را ارضا کند می‌تواند به عنوان جواب خصوصی ایفای نقش کند. پاسخ خصوصی در محدوده هر ابر و در دستگاه محلی آن به صورت رابطه (۳۴) با یک ترکیب خطی از تعدادی تابع پایه نمایی بیان می‌شود،

$$\mathbf{u}_p(x,y)=\sum_{k=1}^{m^p}\mathbf{h}_k^{\mathrm{P}}\, e^{\bar{\alpha}_k x+\bar{\beta}_k y}=\sum_{k=1}^{m^p}\left\{h_k^{pu},h_k^{pv},h_k^{pw},h_k^{p\phi_x},h_k^{p\phi_y}\right\}^T e^{\bar{\alpha}_k x+\bar{\beta}_k y},\quad \forall(x,y)\in\Omega \qquad (۳۴)$$

برای بدست آوردن ضرایب $\mathbf{h}_k^{\mathrm{P}}$ از یک شبکه نقاط محلی همانند شکل ۴ با آرایش مستطیلی در اطراف نقطه مرکزی ابر مورد نظر استفاده می‌شود. بر اساس تجربه‌های عددی محدوده مناسب این شبکه بین ۱/۵ تا ۲ برابر شعاع ابر پیشنهاد می‌شود [۲۳]. ضرایب $\mathbf{h}_k^{\mathrm{P}}$ با ارضاء نمودن معادله دیفرانسیل (۲۴) در نقاط مربوط به حل خصوصی در اطراف هر ابر به صورت منحصر به فرد از رابطه (۳۵) بدست می‌آید،

$$\mathbf{V}^{\mathrm{P}}\mathbf{h}^{\mathrm{P}}=\mathbf{f}^{\mathrm{P}} \qquad (۳۵)$$

در این صورت ضرایب با استفاده از رابطه (۳۵) و به کمک وارون تعمیم‌یافته مور- پنروز مطابق رابطه (۳۶) تعیین می‌گردند،

$$\mathbf{h}^{\mathrm{P}}=(\mathbf{V}^{\mathrm{P}})^{-1}\mathbf{f}^{\mathrm{P}} \qquad (۳۶)$$

شایان ذکر است در روش‌های ترفتز، استخراج پاسخ خصوصی پیچیدگی به مراتب کمتری نسبت به پاسخ همگن دارد. همچنین پاسخ خصوصی یکتا نبوده و هر تابعی با توانایی ارضای معادله می‌تواند انتخاب گردد. نتایج عددی نشان از کفایت انتخاب ۹ تابع شکل مستقل، که توان آن‌ها در معادله مشخصه صدق نکند، برای تقریب دقیق تابع یک‌بعدی دارد. از این‌رو برای حل مسائل دوبعدی صفحات، انتخاب ۸۱ مود کافی است. نحوه انتخاب مودهای حل خصوصی نیز به صورت $\left\{h_k^{pu},h_k^{pv},h_k^{pw},h_k^{p\phi_x},h_k^{p\phi_y}\right\}^T e^{\lambda_p(r+si)x+\lambda_p(k+ti)y}$ است، به طوری که پارامترهای r,s,k,t اعدادی از مجموعه $\{-۱,۰,۱\}$ را داشته باشند. همچنین باید $\pi/۸\le\lambda_p\le\pi/۴$ باشد.

۳-۳- فرمول‌بندی روش

با تکمیل روند استخراج توابع پایه همگن و خصوصی، آخرین مرحله به توسعه فرمول‌بندی روش حل اختصاص خواهد داشت. دیدگاه پیشنهادی مبنی بر تفکیک ابرهای تشکیل‌شده بر اساس موقعیت نقطه مرکزی آن‌ها است، به طوری‌که ابرهای داخلی (نقطه مرکزی درون دامنه) وظیفه ایجاد ارتباط میان درجات آزادی را بر عهده داشته و در ابرهای مرزی (نقطه مرکزی واقع بر مرز) به ارضای شرایط مرزی پرداخته خواهد شد. برای تشکیل ابر نقاط و انتخاب نقاط همسایگی آن، علاوه بر فاصله نقاط مجاور از نقطه مرکزی، تعداد این نقاط نیز مورد توجه است. در روش حاضر نقاط ابر به صورت شمارشی و از نزدیکترین نقاط همسایه به گونه‌ای گزینش می‌شوند که توسط گره مرکزی ابر قابل مشاهده بوده و هیچ‌گونه ناپیوستگی یا مرزی میان آن‌ها وجود نداشته باشد. تجارب حاضر حاکی از کفایت ۱۸ گره در هر ابر است. در ادامه روابط متناظر با هر نوع ابر ارائه می‌شود.

۳-۳-۱- ابرهای داخلی

در این ابرها برای تشکیل معادلات، ابتدا پاسخ همگن (۲۶) به فرم ماتریسی بازنویسی می‌شود،

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{\Psi}_h \mathbf{c}_h \tag{۳۷}$$

با نوشتن رابطه‌ی (۳۷) برای نقاط مجاور داخل ابر (به جز نقطه مرکزی) رابطه ماتریسی زیر حاصل می‌شود،

$$\mathbf{u}_h^R = \mathbf{\Psi}_h^R \mathbf{c}_h \tag{۳۸}$$

در اینجا $\mathbf{u}_h^R$ بیانگر بخش همگن درجات آزادی در نقاط مجاور و $\mathbf{\Psi}_h^R$ یک ماتریس مستطیلی با ابعاد $\mathrm{n} \times \mathrm{m}_h$ بوده که n تعداد نقاط مجاور در هر ابر و m_h تعداد پایه‌های حل همگن هستند. با استخراج بردار ضرایب توابع پایه‌نمایی از رابطه (۳۸) و قرار دادن در رابطه (۳۷) می‌توان نوشت [۲۲]،

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{\Psi}_h \ (\mathbf{\Psi}_h^R)^{-1} \ \mathbf{u}_h^R \tag{۳۹}$$

$$\mathbf{\Phi}_h = \mathbf{\Psi}_h \ (\mathbf{\Psi}_h^R)^{-1} \tag{۴۰}$$

از این‌رو می‌توان مطابق رابطه (۴۱) پاسخ همگن در نقطه مرکزی هر ابر ($\mathbf{u}_h$) را بر حسب مقادیر نقاط مجاورش($\mathbf{u}_h^R$) بدست آورد،

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{\Phi}_h \ \mathbf{u}_h^R \tag{۴۱}$$

با توجه به تشکیل پاسخ کلی از دو بخش همگن و خصوصی $(\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p)$ باید در رابطه فوق پاسخ کل را جایگزین پاسخ همگن کرد تا رابطه (۴۲) بدست آید،

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}_h \ (\mathbf{u}^R - \mathbf{u}_p^R) + \mathbf{u}_p \tag{۴۲}$$

لازم به ذکر است در رابطه (۴۲)، $\mathbf{u}^R$ و $\mathbf{u}_p^R$ به ترتیب بیانگر جواب کلی و جواب خصوصی نقاط مجاور (به جز نقطه مرکزی) در هر ابر هستند. حال به منظور برقراری ارتباط بین نقاط مجاور و مرکزی ابر، از ایده حداقل مربعات استفاده شده است، به این صورت که برای نقاط واسطه واقع بر مرز شرایط مرزی ارضاء شده و برای نقاط واسطه داخل دامنه، حل به گونه‌ای تنظیم گردد که پاسخ معادله دیفرانسیل حاصل از ابرهای مجاور تا حد امکان به یکدیگر نزدیک شود. این کار با تشکیل یک عبارت باقیمانده وزنی مطابق رابطه (۴۳) در هر یک از نقاط واسطه در داخل دامنه حل (غیرواقع بر مرز) بر اساس روابط پیوستگی صورت می‌گیرد [۲۳]،

$$R_i^{\Omega} = \sum_{j=1}^{n^i} \| \mathbf{w}_u^i (\mathbf{u}^i \big|_{x_i} - \mathbf{u}^j \big|_{x_i}) \|^2 + \sum_{j=1}^{n^i} \| \mathbf{w}_\theta^i (\nabla \mathbf{u}^i \big|_{x_i} - \nabla \mathbf{u}^j \big|_{x_i}) \|^2 \tag{۴۳}$$

$\mathbf{u}^i \big|_{x_i}$ بیانگر حل مربوط به ابر نقطه واسطه i ام در نقطه مرکزی ابر (x_i) و $\mathbf{u}^j \big|_{x_i}$ حل مربوط به ابر نقطه گره‌ای j ام در محل x_i است. همچنین نماد $\|.\|$ معرف طول بردار و n^i تعداد نقاط گره‌ای موجود در ابر i ام می‌باشد. منظور از $\nabla \mathbf{u}$ گرادیان تک‌تک مولفه‌های بردار $\mathbf{u}$ است که خود به صورت یک بردار نوشته شده است، در حالی که مولفه‌های بردار $\mathbf{u}$ همان درجات آزادی در هر نقطه هستند. بنابراین اجزای مذکور مطابق رابطه (۴۴) خواهند بود،

$$\mathbf{u}=\left\{u_0\,,v_0\,,w_0\,,\phi_x\,,\phi_y\right\}^{\mathrm{T}},\ \nabla\mathbf{u}=$$
$$\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x},\frac{\partial u_0}{\partial y},\frac{\partial v_0}{\partial x},\frac{\partial v_0}{\partial y},\frac{\partial w_0}{\partial x},\frac{\partial w_0}{\partial y},\frac{\partial \phi_x}{\partial x},\frac{\partial \phi_x}{\partial y},\frac{\partial \phi_y}{\partial x},\frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۴۴}$$

در رابطه (۴۳)، ضرایب وزنی $\mathbf{w}_u^i$ و $\mathbf{w}_\theta^i$ به شکل دو ماتریس قطری هستند که ابعادشان باتوجه به بعد بردار مربوطه از رابطه (۴۵) تعیین می‌شوند،

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_u^i &= \text{Diagonal Matrix}[\{w_{u_0}, w_{v_0}, w_{w_0}, w_{\phi_x}, w_{\phi_y}\}]\\ \mathbf{w}_\theta^i &= \text{Diagonal Matrix}[\{w_{u_0,x}, w_{u_0,y}, w_{v_0,x}, w_{v_0,y},\\ & w_{w_0,x}, w_{w_0,y}, w_{\phi_x,x}, w_{\phi_x,y}, w_{\phi_y,x}, w_{\phi_y,y}\}]\end{aligned} \tag{۴۵}$$

منظور از Diagonal Matrix[{}] یک ماتریس قطری با مولفه‌های واقع در داخل گیومه و صرفاً به منظور خلاصه‌نویسی است. با جایگذاری رابطه (۴۲) در رابطه (۴۳) یک عبارت باقیمانده وزنی بر حسب درجات آزادی متناظر با هر ابر بدست می‌آید. بنابراین می‌توان رابطه (۴۶) را نوشت،

$$\begin{aligned}R_i^\Omega &= \sum_{j=1}^{n^i}\left\|\mathbf{w}_u^i\left(\mathbf{\Phi}_h{}^i\Big|_{x_i}\mathbf{u}^{R,i}-\mathbf{\Phi}_h{}^j\Big|_{x_i}\mathbf{u}^{R,j}\right)+\mathbf{w}_u^i\,\mathbf{a}_u^{i,j}\right\|^2+\\ &\sum_{j=1}^{n^i}\left\|\mathbf{w}_\theta^i\left(\nabla\mathbf{\Phi}_h{}^i\Big|_{x_i}\mathbf{u}^{R,i}-\nabla\mathbf{\Phi}_h{}^j\Big|_{x_i}\mathbf{u}^{R,i}\right)+\mathbf{w}_\theta^i\,\mathbf{a}_\theta^{i,j}\right\|^2,\end{aligned} \tag{۴۶}$$

$$\begin{cases}\mathbf{a}_u^{i,j}=\left(\mathbf{u}_p^i\Big|_{x_i}-\mathbf{u}_p^j\Big|_{x_i}\right)-\left(\mathbf{\Phi}_h{}^i\Big|_{x_i}\mathbf{u}_p^{R,i}-\mathbf{\Phi}_h{}^j\Big|_{x_i}\mathbf{u}_p^{R,j}\right)\\ \mathbf{a}_\theta^{i,j}=\left(\nabla\mathbf{u}_p^i\Big|_{x_i}-\nabla\mathbf{u}_p^j\Big|_{x_i}\right)-\left(\nabla\mathbf{\Phi}_h{}^i\Big|_{x_i}\mathbf{u}_p^{R,i}-\nabla\mathbf{\Phi}_h{}^j\Big|_{x_i}\mathbf{u}_p^{R,j}\right)\end{cases}$$

۳-۲-۲- ابرهای مرزی (ارضای شرایط مرزی)

در مسائل ورق شرایط مرزی می‌تواند به صورت دریشله یا نویمان و یا ترکیبی از هر دو باشد. بنابراین جملات مربوط به هر دو نوع شرایط مطابق رابطه (۴۷) در نظر گرفته شده و در صورت غیبت هر نوع، جمله متناظر با آن حذف می‌شود [۲۳]،

$$\begin{aligned}R_i^\Gamma &= \left\|\mathbf{w}_\mathrm{N}^i\left(\left[\mathbf{L}_\mathrm{N}\,\mathbf{u}^i\right]\Big|_{x_i}-\mathbf{F}_\mathrm{N}\right)\right\|^2+\\ &\left\|\mathbf{w}_D^i\left(\left[\mathbf{L}_\mathrm{D}\,\mathbf{u}^i\right]\Big|_{x_i}-\mathbf{F}_\mathrm{D}\right)\right\|^2\end{aligned} \tag{۴۷}$$

در اینجا نیز با استفاده از رابطه (۴۲) و جایگذاری در رابطه (۴۷)، عبارت باقیمانده وزنی (۴۸) برای هرکدام از نقاط واسطه واقع بر مرز بر حسب درجات آزادی متناظر استخراج می‌شود،

$$\begin{aligned}R_i^\Gamma &= \left\|\mathbf{w}_\mathrm{N}^i\left(\left[\mathbf{L}_\mathrm{N}\mathbf{\Phi}_h{}^i\right]\Big|_{x_i}\mathbf{u}_i^R+\mathbf{a}_\mathrm{N}^i\right)\right\|^2+\\ &\left\|\mathbf{w}_\mathrm{D}^i\left(\left[\mathbf{L}_\mathrm{D}\mathbf{\Phi}_h{}^i\right]\Big|_{x_i}\mathbf{u}_i^R+\mathbf{a}_\mathrm{D}^i\right)\right\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\mathbf{a}_\mathrm{N}^i=\left[\mathbf{L}_\mathrm{N}\mathbf{u}_p^i\right]\Big|_{x_i}-\left[\mathbf{L}_\mathrm{N}\mathbf{\Phi}_h{}^i\right]\Big|_{x_i}\mathbf{u}_p^{R,i}-\mathbf{F}_\mathrm{N}\\ \mathbf{a}_\mathrm{D}^i=\left[\mathbf{L}_\mathrm{D}\mathbf{u}_p^i\right]\Big|_{x_i}-\left[\mathbf{L}_\mathrm{D}\mathbf{\Phi}_h{}^i\right]\Big|_{x_i}\mathbf{u}_p^{R,i}-\mathbf{F}_\mathrm{D}\end{cases} \tag{۴۸}$$

$\mathbf{L}_\mathrm{N}$ نشان‌دهنده عملگر شرایط مرزی نویمان و $\mathbf{L}_\mathrm{D}$ نشان دهنده عملگر شرایط مرزی دریشله است. $\mathbf{F}_\mathrm{N}$ و $\mathbf{F}_\mathrm{D}$ نیز به ترتیب نشانگر بردار مقادیر معلوم برای شرایط نویمان و دریشله هستند. نهایتاً تمامی باقیمانده‌ها با هم جمع شده و همچون رابطه (۴۹)، یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر از درجات آزادی حاصل می‌شود،

$$R^T=\sum_{i=1}^{n^m}\left(R_i^\Gamma+R_i^\Omega\right) \tag{۴۹}$$

n^m در رابطه بالا تعداد نقاط واسطه است. با مشتق‌گیری از R^T نسبت به درجات آزادی و برابر صفر قرار دادن حاصل آن، معادلات متناظر استخراج گشته و به این ترتیب دستگاه معادلات نهایی رابطه (۵۰) به دست می‌آید،

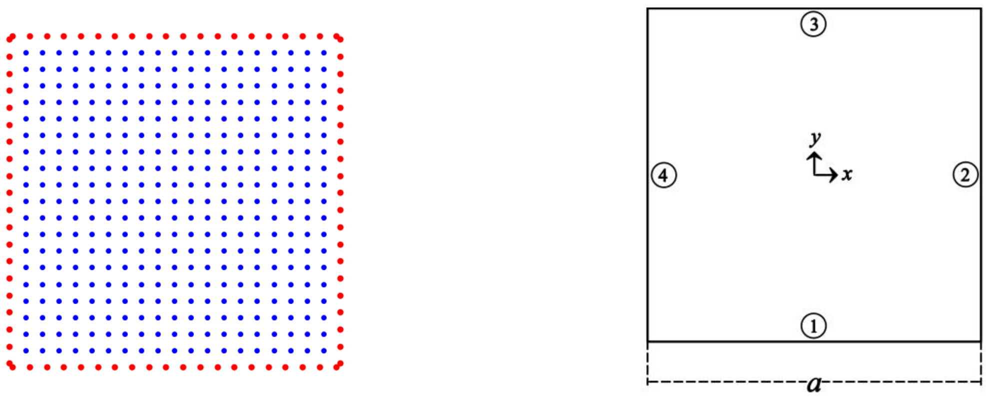
$$\mathbf{KU}=\mathbf{F} \tag{۵۰}$$

بردار $\mathbf{U}$ شامل تمامی درجات آزادی است و با حل نمودن معادله، مقادیر آن بدست آمده و سازه تحلیل می‌شود. نحوه محاسبه ضرایب وزنی $\mathbf{w}_u$، $\mathbf{w}_\theta$، $\mathbf{w}_\mathrm{N}$ و $\mathbf{w}_\mathrm{D}$ در مرجع [۲۳] تشریح شده و از توضیح مجدد آن در این مقاله پرهیز می‌شود.

۴- نتایج عددی

۴-۱- اعتبارسنجی نتایج حاصل با حل دقیق

یک ورق مربعی چهار طرف مفصل یک بار با آرایش لایه‌ای متعامد $(0^\circ,90^\circ)$ و بار دیگر با آرایش لایه‌ای زاویه‌ای $(-45^\circ,45^\circ)$ با طول وجه a و ضخامت h تحت بارگذاری کسینوسی مطابق شکل ۵ در نظر گرفته شده است.



(ب) (الف)

شکل ۵ . الف) هندسه ورق مربعی به ضلع a ، ب) – آرایش شبکه نقاط گره‌ای و واسطه.

خواص مکانیکی هر لایه و تابع بارگذاری مطابق روابط (۵۱) و (۵۲) هستند،

$$E_{۲}=E_{۳}=۱۰Gpa;\ E_{۱}=۲۵E_{۲};\ G_{۱۲}=G_{۱۳}=۰/۵E_{۲} \quad (۵۱)$$
$$G_{۲۳}=۰/۲E_{۲};\ \nu_{۱۲}=\nu_{۱۳}=\nu_{۲۳}=۰/۲۵$$

$$q(x,y)=q_{۰}\cos(\pi x/a)\cos(\pi y/b) \quad (۵۲)$$
$$q_{۰}=۱۰۰kN/m^{۲}$$

مقادیر بدون بعد تغییرمکان برون‌صفحه و تنش‌های نرمال و برشی در نقاط مختلف ورق نسبت به دستگاه مختصات شکل ۵ از روابط (۵۳) محاسبه می‌شوند،

$$\bar{w}_{۰}=\frac{۱۰۰h^{۳}E_{۲}}{q_{۰}a^{۴}}w(۰,۰)$$

$$\sigma_{xy}^{(k)}=\frac{h^{۲}}{q_{۰}a^{۲}}\sigma_{xy}(\frac{a}{۲},\frac{a}{۲},z)$$

$$(\sigma_{xx}^{(k)},\sigma_{yy}^{(k)})=\frac{h^{۲}}{q_{۰}a^{۲}}\left(\sigma_{xx}(۰,۰,z),\sigma_{yy}(۰,۰,z)\right) \quad (۵۳)$$

$$(\sigma_{xz}^{(k)},\sigma_{yz}^{(k)})=\frac{h}{q_{۰}a}\left(\sigma_{xz}(-\frac{a}{۲},۰,z),\sigma_{yz}(۰,-\frac{a}{۲},z)\right)$$

در رابطه (۵۳) اندیس k شماره لایه مورد نظر را مشخص می‌کند. مطابق شکل ۵ –ب دامنه حل با یک شبکه منظم از نقاط با فاصله یکسان $a/۲۰$ گسسته‌سازی شده است که برای تعریف نقاط واسطه و گره‌ای استفاده می‌شود. در ابتدا به منظور ارزیابی دقت روش پیشنهادی، از حل دقیق مسئله ورق مفصلی به روش ناویر استفاده می‌شود. برای ارضای شرایط مرزی مفصلی در حالت آرایش لایه‌ای متعامد از نوع S و برای آرایش زاویه‌ای از نوع S۲ ، ارائه شده در جدول ۱، استفاده می‌شود. جدول ۲ مقادیر یکه‌شده تغییرمکان عرضی و تنش‌های نرمال و برشی را برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت (a/h) ارائه و با مقادیر بدست آمده از حل ناویر [5] مقایسه می‌کند. همانگونه که مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده از دقت بسیار مناسبی برخوردار بوده و قابلیت روش پیشنهادی در حل مسائل ورق بدون محدودیت به آرایش لایه‌ای و نسبت‌های ضخامت به بعد به وضوح مشخص است.

۲-۴- صفحات با شرایط مرزی مختلف

در بخش دوم این مسئله، ورق مربعی با آرایش لایه‌ای $(۰^{\circ},۹۰^{\circ})$ و سپس ورق ده‌لایه با آرایش لایه‌ای $(۰^{\circ},۹۰^{\circ})_{۵}$ تحت بارگذاری کسینوسی و با شرایط مرزی مختلف بررسی خواهند شد. ضخامت همه لایه‌ها یکسان بوده و مشخصات هندسی و مادی ورق مشابه با مثال قبل است. حروف F و C و S به ترتیب نشان دهنده شرایط مرزی آزاد، گیردار و شرایط مفصلی می‌باشند. برای مثال منظور از SFSC ورقی است که مطابق با شکل ۵– الف مرز اول، دوم، سوم و چهارم آن به ترتیب مفصلی، آزاد، مفصلی و گیردار باشد. جداول ۳، ۴ و ۵ به ترتیب نشانگر مقادیریکه‌شده تغییرمکان برون‌صفحه، تنش نرمال $\bar{\sigma}_{xx}^{(۱)}(-h/۲)$ و همچنین تنش برشی عرضی $\bar{\sigma}_{yz}^{(۲)}(۰)$ با استفاده از روش پیشنهادی

جدول ۲. مقادیر تغییرمکان برون‌صفحه و تنش‌های بدون بعد ورق چهار طرف مفصل تحت بارگذاری کسینوسی.

a/h	آرایش لایه‌ای	$\bar{w}_0$	$\sigma_{xx}^{(4)}(h/2)$	$\sigma_{yy}^{(2)}(h/2)$	$\sigma_{xy}^{(1)}(-h/2)$	$\sigma_{yz}^{(2)}(h/4)$	$\sigma_{xz}^{(1)}(h/4)$
۱۰	$(-45^\circ, 45^\circ)$	۰/۸۲۸۴۲۳	۰/۲۴۹۷۸۱	۰/۲۴۹۷۸۱	۰/۲۳۳۵۹۴	۰/۱۹۰۹۸۸	۰/۱۹۰۹۹۳
		(۰/۸۲۸۴۰۲)	(۰/۲۴۹۷۷۳)	(۰/۲۴۹۷۷۳)	(۰/۲۳۳۵۷۹)	(۰/۱۹۰۹۸۶)	(۰/۱۹۰۹۸۶)
	$(0^\circ, 90^\circ)$	۱/۲۳۷۲۷	۰/۰۸۴۳۴۱۹	۰/۷۱۵۷۴۶	۰/۰۵۲۴۸۶۲	۰/۲۷۲۸۳۸	۰/۱۰۹۱۳۶
		(۱/۲۳۷۲۷)	(۰/۰۸۴۳۴۱۹)	(۰/۷۱۵۷۴۵)	(۰/۰۵۲۴۸۵۴)	(۰/۲۷۲۸۳۷)	(۰/۱۰۹۱۳۵)
۲۰	$(-45^\circ, 45^\circ)$	۰/۶۹۸۱۳۶	۰/۲۴۹۷۷۶	۰/۲۴۹۷۷۶	۰/۲۳۳۵۷۷	۰/۱۹۰۹۸۷	۰/۱۹۰۹۸۷
		(۰/۶۹۸۱۳۲)	(۰/۲۴۹۷۷۳)	(۰/۲۴۹۷۷۳)	(۰/۲۳۳۵۷۹)	(۰/۱۹۰۹۸۶)	(۰/۱۹۰۹۸۶)
	$(0^\circ, 90^\circ)$	۱/۱۰۷۰	۰/۰۸۴۳۴۱۵	۰/۷۱۵۷۴۱	۰/۰۵۲۴۸۵۲	۰/۲۷۲۸۳۷	۰/۱۰۹۱۳۵
		(۱/۱۰۷۰)	(۰/۰۸۴۳۴۱۹)	(۰/۷۱۵۷۴۵)	(۰/۰۵۲۴۸۵۴)	(۰/۲۷۲۸۳۷)	(۰/۱۰۹۱۳۵)
۱۰۰	$(-45^\circ, 45^\circ)$	۰/۶۵۶۴۳۸	۰/۲۴۹۷۶۶	۰/۲۴۹۷۶۸	۰/۲۳۳۵۹۵	۰/۱۹۰۹۸۴	۰/۱۹۰۹۸۰
		(۰/۶۵۶۴۴۶)	(۰/۲۴۹۷۷۳)	(۰/۲۴۹۷۷۳)	(۰/۲۳۳۵۷۹)	(۰/۱۹۰۹۸۶)	(۰/۱۹۰۹۸۶)
	$(0^\circ, 90^\circ)$	۱/۰۶۵۳۰	۰/۰۸۴۳۴۰۹	۰/۷۱۵۷۴۷	۰/۰۵۲۵۳۳۶	۰/۲۷۲۷۸۱	۰/۱۰۹۱۰۵
		(۱/۰۶۵۳۱)	(۰/۰۸۴۳۴۱۹)	(۰/۷۱۵۷۴۵)	(۰/۰۵۲۴۸۵۴)	(۰/۲۷۲۸۳۷)	(۰/۱۰۹۱۳۵)

مقادیر داخل پرانتز از مرجع [۵] بر اساس حل دقیق مسئله ارائه شده است.

جدول ۳. مقادیر تغییر مکان برون‌صفحه بی‌بعد در مرکز ورق مربعی تحت بارکسینوسی.

n_k	a/h	روش	SSSS	SSSC	SCSC	SFSF	SFSS	SFSC
۲	۵	روش حاضر	۱/۷۵۸۳۵	۱/۴۷۷۰۴	۱/۲۵۶۵۳	۲/۷۷۶۶۴	۲/۳۳۴۵۲	۱/۸۹۷۱۱
		مرجع [۲۴]	۱/۷۵۸	۱/۴۷۷	۱/۲۵۷	۲/۷۷۷	۲/۳۳۵	۱/۸۹۷
	۱۰	روش حاضر	۱/۲۳۷۲۷	۰/۸۸۲۸۷	۰/۶۵۶۲۷	۲/۰۲۷۹	۱/۶۸۷۱۹	۱/۲۲۲۶۱
		مرجع[۲۴]	۱/۲۳۷	۰/۸۸۳	۰/۶۵۶	۲/۰۲۸	۱/۶۸۷	۱/۲۲۳
۱۰	۵	روش حاضر	۱/۱۳۶۵۲	۱/۰۴۴۹۲	۰/۹۴۴۶۶	۱/۶۶۲۷۶	۱/۴۵۹۷۳	۱/۲۵۷۸۱
		مرجع[۲۴]	۱/۱۳۷	۱/۰۴۵	۰/۹۴۵	۱/۶۶۳	۱/۴۶۰	۱/۲۵۸
	۱۰	روش حاضر	۰/۶۱۵۴۵	۰/۴۷۹۶۶	۰/۳۸۵۲۳	۰/۹۱۴۷۴	۰/۸۰۰۹۷	۰/۶۱۲۱۹
		مرجع[۲۴]	۰/۶۱۵	۰/۴۸۰	۰/۳۸۵	۰/۹۱۵	۰/۸۰۰	۰/۶۱۲

هستند. ضمنا مقادیری که از مرجع [۲۴] نقل شده است با استفاده از روش لوی بدست آمده‌اند. مشاهده می‌گردد که نتایج حل حاضر دقت بالایی دارند، از این‌رو روش پیشنهادی از قابلیت حل مسائل با شرایط مرزی متنوع نیز برخوردار است.

۴-۳- صفحات با هندسه‌های مختلف

یکی از چالش‌های روش‌های بدون شبکه حساسیت به نامنظمی هندسه است، به طوری که کیفیت و کارایی روش به شدت تحت تاثیر قرار می‌گیرد. در این مثال حل ورق‌های همسانگرد با اشکال هندسی بیضوی و مثلثی تحت بارگذاری گسترده ثابت q_0 بررسی می‌شود. مدول الاستیسیته ۲۰۰ گیگاپاسکال و نسبت پواسون ۰/۳ است. نتایج سپس با جواب دقیق از مرجع [۲۷]

جدول ۴ - مقادیر تنش نرمال $-\bar{\sigma}_{xx}^{(1)}(-h/2)$ در مرکز ورق مربعی تحت بارکسینوسی.

n_k	a/h	روش	SSSS	SSSC	SCSC	SFSF	SFSS	SFSC
۲	۵	روش حاضر	۰/۷۱۵۷۴۳	۰/۵۳۳۸۰۲	۰/۳۹۱۰۵	۰/۲۴۶۹۱۹	۰/۴۴۲۹۸۶	۰/۲۴۳۳۸۸
		مرجع [۲۴]	۰/۷۱۵۷	۰/۵۳۳۸	۰/۳۹۱۱	۰/۲۴۶۹	۰/۴۴۳۰	۰/۲۴۳۴
	۱۰	روش حاضر	۰/۷۱۵۷۴۴	۰/۵۴۹۳۸۸	۰/۴۵۵۰۴۷	۰/۲۴۴۲۶۵	۰/۴۴۳۵۱۲	۰/۲۷۸۹۸۵
		مرجع [۲۴]	۰/۷۱۵۷	۰/۵۴۹۴	۰/۴۴۵۰	۰/۲۴۴۲	۰/۴۴۳۵	۰/۲۷۹۰
۱۰	۵	روش حاضر	۰/۵۰۰۹۴۱	۰/۳۷۰۷۵۳	۰/۲۲۷۵۱۷	۰/۱۷۱۲۱۸	۰/۲۹۵۷۲۸	۰/۱۳۴۲۸۴
		مرجع [۲۴]	۰/۵۰۰۹	۰/۳۷۰۷	۰/۲۲۷۵	۰/۱۷۱۲	۰/۲۹۵۷	۰/۱۳۴۳
	۱۰	روش حاضر	۰/۵۰۰۹۱۹	۰/۳۶۴۱۸۸	۰/۲۶۹۱۷۵	۰/۱۷۲۳۰۴	۰/۲۹۶۷۳۸	۰/۱۵۹۳۶۱
		مرجع [۲۴]	۰/۵۰۰۹	۰/۳۶۴۲	۰/۲۶۹۲	۰/۱۷۲۳	۰/۲۹۶۸	۰/۱۵۹۴

جدول ۵ - مقادیر تنش برشی عرضی $\bar{\sigma}_{yz}^{(2)}(0)$ در مرکز ورق مربعی تحت بارکسینوسی.

n_k	a/h	روش	SSSS	SSSC	SCSC	SFSF	SFSS	SFSC
۲	۵	روش حاضر	۰/۲۷۲۸۳۷	۰/۲۲۹۶۵۳	۰/۱۹۵۸	۰/۳۹۰۰۵	۰/۳۳۹۰۲۶	۰/۲۷۴۷۸۵
		مرجع[۲۴]	۰/۲۷۲۹	۰/۲۲۹۷	۰/۱۹۵۸	۰/۳۹۰۱	۰/۳۳۹۰	۰/۲۷۴۸
	۱۰	روش حاضر	۰/۲۷۲۸۳۸	۰/۱۹۹۲۶۹	۰/۱۵۲۲۹۶	۰/۳۸۸۱۸	۰/۳۳۸۲۷	۰/۲۴۴۹۶۶
		مرجع[۲۴]	۰/۲۷۲۹	۰/۱۹۹۳	۰/۱۵۲۳	۰/۳۸۸۲	۰/۳۳۸۳	۰/۲۴۴۹
۱۰	۵	روش حاضر	۰/۲۷۲۸۴۲	۰/۲۴۹۸۶۸	۰/۲۲۴۷۲۴	۰/۳۸۸۳۶۲	۰/۳۴۳۷۵۳	۰/۲۹۵۰۴۸
		مرجع[۲۴]	۰/۲۷۲۹	۰/۲۴۹۸	۰/۲۲۴۸	۰/۳۸۸۳	۰/۳۴۳۷	۰/۲۹۵۱
	۱۰	روش حاضر	۰/۲۷۲۸۴	۰/۲۱۲۶۵۲	۰/۱۷۰۸	۰/۳۸۵۲۹۶	۰/۳۴۲۱۷۴	۰/۲۶۰۵۵۷
		مرجع[۲۴]	۰/۲۷۲۹	۰/۲۱۲۶	۰/۱۷۰۸	۰/۳۸۵۳	۰/۳۴۲۱	۰/۲۶۰۵

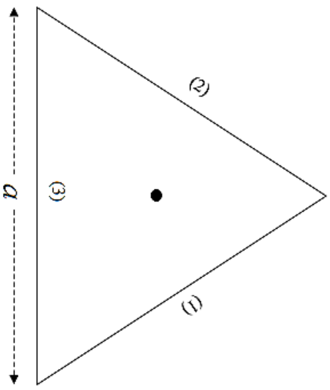
مقایسه گشته و نهایتاً روند همگرایی در شکل ۶ برای هر حالت بیان می‌گردد. در اینجا از شاخص خطای میانگین برای مقایسه نتایج حل حاضر و پاسخ دقیق استفاده شده است،

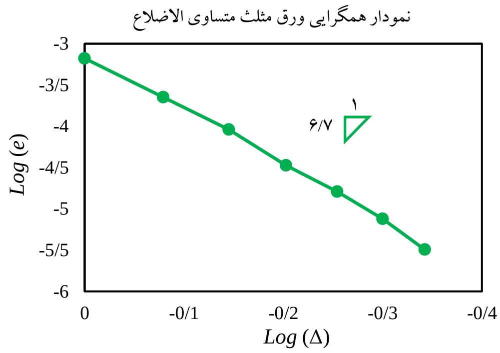
$$e = \left(\sum_{k=1}^{DP} (\hat{u}_k - u_k^{exact})^2 \Big/ \sum_{k=1}^{DP} (u_k^{exact})^2 \right)^{1/2} \qquad (۵۴)$$

u_k^{exact} بیانگر حل دقیق، $\hat{u}_k$ حل عددی بدست آمده و DP تعداد نقاط انتخاب شده بر روی دامنه و مرز برای برآورد خطا است. نمودار شاخص خطای میانگین بر حسب فاصله نقاط (Δ) با محورهایی در مقیاس لگاریتمی می‌تواند روند همگرایی حل عددی به سمت پاسخ دقیق را نشان دهد. چنانچه مشاهده می‌شود، روش پیشنهادی در مواجهه با توزیع نامنظم نقاط نیز دارای شیب همگرایی مناسبی است.

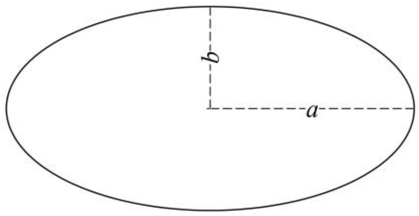
در پایان به منظور بررسی عملکرد روش حاضر در حل ورق‌هایی با اشکال نامنظم، یک ورق همسانگرد قطاعی شکل به شعاع خارجی a، شعاع داخلی b و ضخامت h مطابق با شکل ۷ - الف تحت بار گسترده یکنواخت به شدت ۵۰ کیلوپاسکال بررسی می‌گردد. مدول الاستیسیته ورق ۳۰ گیگاپاسکال و نسبت پواسون ۰/۳ است. تغییرمکان برون‌صفحه، لنگرهای خمشی و نیروهای برشی در نقاط e و d واقع در دامنه ورق مطابق شکل ۷ به صورت یکه‌شده محاسبه می‌گردند،

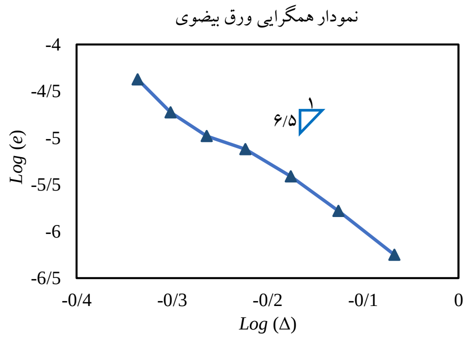
$$\begin{aligned} &\bar{w}_{.} = \left(\frac{10^3 D}{q_{.} c^4}\right) w_{.}, \quad \bar{Q}_r = \left(\frac{1}{q_{.} c}\right) Q_r \\ &\{\bar{M}_{rr}, \bar{M}_{\theta\theta}\} = \left(\frac{10^2}{q_{.} c^2}\right) \{M_{rr}, M_{\theta\theta}\} \end{aligned} \qquad (۵۵)$$





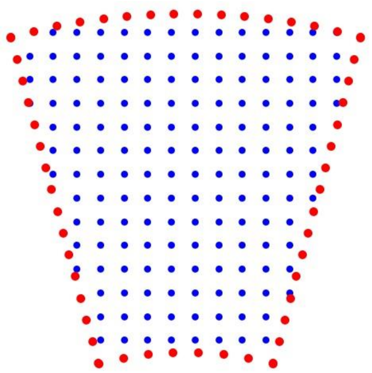
$$w_{exact}=\frac{q_{\cdot}}{۶۴Db}\left(x^{۳}-x^{۲}b-۳xy^{۲}-y^{۲}b+\frac{۴}{۲۷}b^{۳}\right)\left(\frac{۴}{۹}b^{۲}-x^{۲}-y^{۲}\right)$$



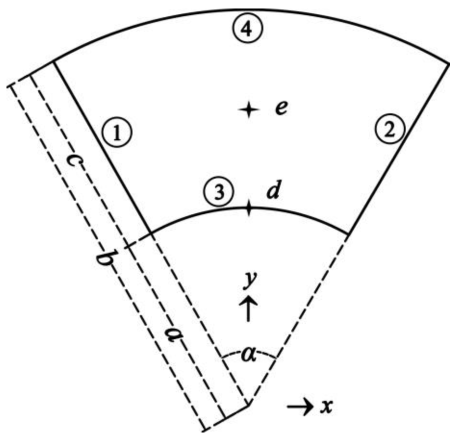


$$w_{exact}=\frac{q_{\cdot}a^{۴}b^{۴}}{۸D\left(۳(a^{۲}+b^{۲})^{۲}-(۲ab)^{۲}\right)}\left((\frac{x}{a})^{۲}+(\frac{y}{b})^{۲}-۱\right)^{۲}$$

شکل ۶. بررسی روند همگرایی صفحات همسانگرد مثلثی و بیضوی با شبکه‌ها نامنظم نقاط.



(ب)



(الف)

شکل ۷. الف) هندسه صفحه قطاع شکل همسانگرد، ب) آرایش نقاط گره‌ای در روش حاضر برای $\alpha=۳۰^{\circ}$

جدول ۶ - تغییرمکان، لنگر و نیروهای برشی بدون بعد در ورق همسانگرد قطاع با زوایای مرکزی ۳۰ و ۶۰ درجه تحت بار گسترده یکنواخت و شرایط مرزی مختلف.

h/c	روش	SSSS				SSCC			
		$\bar{w}^e$	$\bar{M}_{rr}^e$	$\bar{M}_{\theta\theta}^e$	$\bar{Q}_r^d$	$\bar{w}^e$	$\bar{M}_{rr}^e$	$\bar{M}_{\theta\theta}^e$	$\bar{Q}_r^d$
$\alpha = ۳۰^\circ$									
۰/۲	روش حاضر	۲/۹۷۶۷	۳/۱۵۳۷	۴/۰۹۰۶	۰/۲۸۶۷	۲/۲۱۲۹	۲/۵۵۷۰	۳/۰۵۰۵	۰/۴۳۲۳
	مرجع[۲۵]	۲/۹۷۶۷	۳/۱۵۳۷	۴/۰۹۰۶	۰/۲۸۶۸	۲/۲۱۲۹	۲/۵۵۷۰	۳/۰۵۰۵	۰/۴۳۲۳
۰/۱	روش حاضر	۲/۴۹۹۸	۳/۱۵۳۲	۴/۰۸۹۴	۰/۲۹۱۷	۱/۶۲۲۷	۲/۵۹۶۴	۲/۷۶۳۷	۰/۵۲۳۶
	مرجع[۲۵]	۲/۴۹۹۸	۳/۱۵۳۲	۴/۰۸۹۵	۰/۲۹۱۶	۱/۶۲۲۷	۲/۵۹۶۴	۲/۷۶۳۷	۰/۵۲۱۸
۰/۰۱	روش حاضر	۲/۳۴۲۲	۳/۱۵۳۱	۴/۰۸۸۷	۰/۲۹۶۵	۱/۴۰۵۱	۲/۶۰۴۵	۲/۶۲۳۵	۰/۶۰۵۹
	مرجع[۲۵]	۲/۳۴۲۴	۳/۱۵۳۱	۴/۰۸۸۹	۰/۲۹۶۳	۱/۴۰۵۲	۲/۶۰۴۶	۲/۶۲۳۶	۰/۶۰۰۵
$\alpha = ۶۰^\circ$									
۰/۲	روش حاضر	۹/۱۹۱۷	۸/۳۶۶۹	۴/۸۹۴۸	۰/۵۲۷۹	۳/۹۷۴۴	۴/۱۴۴۵	۲/۰۴۶۵	۰/۶۳۸۱
	مرجع[۲۵]	۹/۱۹۱۷	۸/۳۶۶۹	۴/۸۹۴۸	۰/۵۲۷۹	۳/۹۷۴۴	۴/۱۴۴۵	۲/۰۴۶۵	۰/۶۳۸۱
۰/۱	روش حاضر	۸/۲۹۹۸	۸/۳۷۱۵	۴/۸۷۷۹	۰/۵۳۲۸	۲/۸۹۵۵	۴/۱۰۸۹	۱/۸۲۶۶	۰/۶۶۰۲
	مرجع[۲۵]	۸/۲۹۹۸	۸/۳۷۱۵	۴/۸۷۷۹	۰/۵۳۲۸	۲/۸۹۵۵	۴/۱۰۸۹	۱/۸۲۶۶	۰/۶۶۰۳
۰/۰۱	روش حاضر	۸/۰۰۵۱	۸/۳۷۲۹	۴/۸۷۲۱	۰/۵۳۷۲	۲/۵۲۶۱	۴/۰۸۷۳	۱/۷۵۰۳	۰/۶۶۹۵
	مرجع[۲۵]	۸/۰۰۵۱	۸/۳۷۲۹	۴/۸۷۲۰	۰/۵۳۷۰	۲/۵۲۶۱	۴/۰۸۷۳	۱/۷۵۰۳	۰/۶۶۹۷

به طور نمونه، انتخاب نقاط گره‌ای و واسطه در روند حل روش پیشنهادی برای حالت $\alpha = ۳۰^\circ$ در شکل ۷ – ب نشان داده شده است. سرانجام نتایج یکه‌شده برای صفحه همسانگرد قطاع شکل با زوایای مرکزی ۳۰ و ۶۰ درجه تحت شرایط مرزی SSSS و SSCC و نیز نسبت‌های مختلف h/c در جدول ۶ گزارش شده است. مشاهده می‌شود که نتایج از دقت بسیار خوبی برخوردار هستند. در نهایت آنچه از نتایج ارائه شده برمی‌آید، دقت بسیار بالای روش پیشنهادی در حل مسائل مختلف است.

۵ - نتیجه‌گیری

در این مقاله روش بدون شبکه توابع پایه‌نمایی با پیوستگی مرتبه بالا برای تحلیل خمش ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای مورد استفاده قرار گرفت. این روش با بهره‌گیری از توابع پایه‌نمایی به عنوان توابع شکل، قابلیت ارضای دقیق صورت همگن معادلات حاکم را دارا است. روش پیشنهادی نیازی به شبکه‌بندی دامنه حل نداشته و صرفا با تعریف درجات آزادی بر روی نقاط گره‌ای پراکنده در دامنه حل، اقدام به برقراری پیوستگی مشتقات آن‌ها در گره‌های مجاور تا مرتبه مورد نظر برای جایگزینی پیوستگی بین المانی می‌نماید. به دلیل ارضای دقیق معادله و نیز پیوستگی مرتبه بالا، نرخ همگرایی روش زیاد بوده و بدون هرگونه تاثیرپذیری از بی‌نظمی آرایش نقاط گره‌ای است. از دیگر ویژگی‌های خوب روش پیشنهادی بر مبنای مطالعات عددی صورت گرفته در مقاله می‌توان به عدم حساسیت دقت حل به هندسه، شرایط مرزی، محدوده ضخامت و همچنین آرایش لایه‌ای ورق را نام برد. عملکرد روش در تحلیل آرایش‌های لایه‌ای متقارن و پادمتقارن با زوایای ارتوتروپی مختلف در صفحات کامپوزیت سنجیده شد و نتایج حاکی از دقت و کارایی بالای روش است.

واژه نامه

1. Finite Element Method
2. Mesh-free Methods
3. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)
4. Diffuse Element Method (DEM)
5. Element Free Galerkin (EFG)
6. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)
7. Eigen Vector
8. Generalized patch test

پیوست ۱

درایه‌های عملگر ماتریسی معادلات حاکم بر ورق ($\mathbf{L}_{ij}$) در رابطه (۲۱) بر حسب مولفه‌های میدان جابجایی به شرح زیر هستند،

$$\mathrm{L}_{۱۱} = A_{۱۱} d_{۱}^{۲} + ۲A_{۱۶} d_{۱} d_{۲} + A_{۶۶} d_{۲}^{۲},$$
$$\mathrm{L}_{۱۲} = A_{۱۶} d_{۱}^{۲} + (A_{۶۶} + A_{۱۲}) d_{۱} d_{۲} + A_{۲۶} d_{۲}^{۲},$$
$$\mathrm{L}_{۱۴} = B_{۱۱} d_{۱}^{۲} + ۲B_{۱۶} d_{۱} d_{۲} + B_{۶۶} d_{۲}^{۲},$$
$$\mathrm{L}_{۲۴} = \mathrm{L}_{۱۵} = B_{۱۶} d_{۱}^{۲} + (B_{۱۲} + B_{۶۶}) d_{۱} d_{۲} + B_{۲۶} d_{۲}^{۲},$$
$$\mathrm{L}_{۲۲} = A_{۶۶} d_{۱}^{۲} + ۲A_{۲۶} d_{۱} d_{۲} + A_{۲۲} d_{۲}^{۲},$$
$$\mathrm{L}_{۲۳} = \mathrm{L}_{۱۳} = ۰,$$
$$\mathrm{L}_{۲۵} = B_{۶۶} d_{۱}^{۲} + ۲B_{۲۶} d_{۱} d_{۲} + B_{۲۲} d_{۲}^{۲},$$
$$\mathrm{L}_{۳۳} = -A_{۵۵} d_{۱}^{۲} - ۲A_{۴۵} d_{۱} d_{۲} - A_{۴۴} d_{۲}^{۲},$$
$$\mathrm{L}_{۳۴} = -A_{۵۵} d_{۱} - A_{۴۵} d_{۲},$$
$$\mathrm{L}_{۳۵} = -A_{۴۵} d_{۱} - A_{۴۴} d_{۲},$$
$$\mathrm{L}_{۴۴} = D_{۱۱} d_{۱}^{۲} + ۲D_{۱۶} d_{۱} d_{۲} + D_{۶۶} d_{۲}^{۲} - A_{۵۵},$$
$$\mathrm{L}_{۴۵} = D_{۱۶} d_{۱}^{۲} + (D_{۱۲} + D_{۶۶}) d_{۱} d_{۲} + D_{۲۶} d_{۲}^{۲} - A_{۴۵},$$
$$\mathrm{L}_{۵۵} = D_{۶۶} d_{۱}^{۲} + ۲D_{۲۶} d_{۱} d_{۲} + D_{۲۲} d_{۲}^{۲} - A_{۴۴}.$$

ضرایب سختی A_{ij}, B_{ij} و D_{ij} در مرجع [۵] تعریف شده‌اند و نیز از عبارت زیر استفاده می‌گردد،

$$d_{۱}^{m} = \partial^{m} / \partial x^{m}, \qquad d_{۲}^{m} = \partial^{m} / \partial y^{m}, \qquad k_{s} = ۵/۶$$

منابع

References

1. Mindlin, R., “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates”, *Journal of Applied Mechanic,* Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
2. Kumar, R., Lal, A., Singh, B., and Singh, J., “New transverse shear deformation theory for bending analysis of FGM plate under patch load”, *Composite Structures,* Vol. 208, pp. 91-100, 2019.
3. Grover, N., Singh, B., and Maiti, D., “New nonpolynomial shear-deformation theories for structural behavior of laminated-composite and sandwich plates”, *AIAA Journal,* Vol. 51, pp. 1861-1871, 2013.
4. Karama, M., Afaq, K., and Mistou, S., “A new theory for laminated composite plates”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications,* Vol. 223, 53-62, 2009.
5. Reddy, J. N., “Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis”, CRC Press, 2003.
6. Touratier, M., “An efficient standard plate theory”, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 29, pp. 901-916, 1991.
7. Babaei, M., Asemi, K., and Kiarasi, F., “Static response and free-vibration analysis of a functionally graded annular elliptical sector plate made of saturated porous material based on 3D finite element method”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines,* Vol. 51, pp. 1272-1296, 2023.
8. Eftekhari, S., “A simple finite element procedure for free vibration of rectangular thin and thick plates”,

Applied Mathematics and Computation, Vol. 401, pp. 126104, 2021.
9. Pramod, A., Natarajan, S., Ferreira, A., Carrera, E., and Cinefra, M., “Static and free vibration analysis of cross-ply laminated plates using the Reissner-mixed variational theorem and the cell based smoothed finite element method”, *European Journal of Mechanics-A/Solids,* Vol. 62, pp. 14-21, 2017.
10. Lucy, L. B., “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis”, *Astronomical Journal*, Vol. 82, pp. 1013-1024, 1977.
11. Gingold, R. A., and Monaghan, J. J., “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
12. Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P., “Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements”, *Computational Mechanics,* Vol. 10, pp. 307-318, 1992.
13. Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L. “Element-free Galerkin methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 37, pp. 229-256, 1994.
14. Fries, T. P., and Matthies, H., “Classification and overview of meshfree methods”, 2004.
15. Boroomand, B., Soghrati, S., and Movahedian, B., “Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 81, pp. 971-1018, 2010.
16. Boroomand, B., Bazazzadeh, S., and Zandi, S., “On the use of Laplace's equation for pressure and a mesh-free method for 3D simulation of nonlinear sloshing in tanks; Reply to the discussion”, *Ocean Engineering,* Vol. 134, pp. 176-177, 2017.
17. Movahedian, B., and Boroomand, B., “The solution of direct and inverse transient heat conduction problems with layered materials using exponential basis functions”, *International Journal of Thermal Sciences,* Vol. 77, pp. 186-198, 2014.
18. Shahbazi, M., Boroomand, B., and Soghrati, S., “A mesh-free method using exponential basis functions for laminates modeled by CLPT, FSDT and TSDT– Part I: Formulation”, *Composite Structures,* Vol. 93, pp. 3112-3119, 2011.
19. Azhari, F., Boroomand, B., and Shahbazi, M., “Exponential Basis Functions in the Solution of Laminated Plates Using a Higher-Order Zig-Zag Theory”, *Composite Structures,* Vol. 105, pp. 398-407, 2013.
20. Abdollahi, R., and Boroomand, B., “Nonlocal elasticity defined by Eringen’s integral model: introduction of a boundary layer method”, *International journal of solids and structures,* Vol. 51, pp. 1758-1780, 2014.
21. Mossaiby, F., and Boroomand, B,. “Solution of Solid Mechanics’ Problems in Bounded and Unbounded Domains Using Semi-Analytic and Finite Element Methods”, *Ph.D. Thesis, Isfahan university of technology, isfahan,* 2010.
22. Motamedi, A. R., and Boroomand, B., and Noormohammadi, N,. “On mechanical solution of composite plates and shells using smooth basis functions and mesh free methods”, *Ph.D. Thesis,* Isfahan University Of Technology, Isfahan, 2022.
23. Soleimanifar, E., Boroomand, B., and Mossaiby, F., “A meshless method using local exponential basis functions with weak continuity up to a desired order”, *Computational Mechanics,* Vol. 53, pp. 1355-1374, 2014.
24. Khdeir, A., and Reddy, J., “Analytical solutions of refined plate theories of cross-ply composite laminates”, 1991.
25. Kobayashi, H., and Turvey, G. J., “Elastic small deflection analysis of annular sector Mindlin plates”, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 36, pp. 811-827, 1994.
26. Noormohammadi, N., and Boroomand, B., “A fictitious domain method using equilibrated basis functions for harmonic and bi-harmonic problems in physics”, *Journal of Computational Physics,* Vol. 272, pp. 189-217, 2014.
27. Ugural, A. C., “Stresses in plates and shells”, *McGraw-Hill New York,* vol. 16, 1981.