Journal of Computational Methods in Engineering, 2025, 44(1), 63-83; DOI: 10.47176/jcme.44.1.1043

Journal of Computational Methods in Engineering

Journal homepage: https://jcme.iut.ac.ir/

ISSN: 2228-7698 EISSN: 2423-5741

Original Article

Modeling Anisotropic Hyperelastic Behavior of Soft Tissues Using the Smoothed Particle Hydrodynamics Method

Ali Nikpour and Hojjat Badnava *

Behbahan Khatam Alanbia University of Technology, Behbahan, Khuzestan, 63616-63973, Iran

Abstract: Modeling the mechanical behavior of many soft tissues and certain man-made synthetic materials requires accurate representation of their complex and anisotropic nature. In this research, we implement the anisotropic hyperelastic Holzapfel-Gasser-Ogden (HGO) model using the meshless smoothed particle hydrodynamics (SPH) method. To overcome the challenges of incompressibility, inherent in this class of materials and the associated difficulties of the numerical solution, mixed formulations are employed. Accordingly, the SPH model is developed within a total Lagrangian framework, utilizing first-order conservation laws for linear momentum, the deformation gradient tensor, surface mapping and volume mapping. The accuracy of the implementation is demonstrated by solving several well-known benchmarks in the dynamic behavior of solids undergoing large deformations. Additionally, the results of the hyperelastic model are compared with those obtained from the finite element software Abaqus. Furthermore, the behavior of human skin as an anisotropic soft tissue reinforced with collagen fibers is simulated and compared with available experimental results. The comparisons show that the SPH model effectively simulates the anisotropic behavior of soft tissues under large deformations. The findings of this research indicate that the meshless SPH method can be utilized as a framework for modeling the behavior of soft tissues with complex deformations.

Keywords: Anisotropic hyperelasticity, SPH, Meshfree, Soft tissue, Incompressibility.

Received: Jan. 27, 2025; Revised: Feb. 27, 2025; Accepted: Apr. 23, 2025; Published Online: Jun 23, 2025.

* Corresponding Author: badnava@bkatu.ac.ir

How to Cite: Nikpour Ali and Badnava Hojjat, Modeling anisotropic hyperelastic behavior of soft tissues using the smoothed particle hydrodynamics method, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 44(1), 63-83; DOI: 10.47176/jcme.44.1.1043.

نشریه روش‌های عددی در مهندسی، سال ۴۴، شماره ۱، ۱۴۰۴، ص. ۸۳-۶۳، DOI: 10.47176/jcme.44.1.1043

نشریه روش‌های عددی در مهندسی
صفحه خانگی نشریه: https://jcme.iut.ac.ir/
شاپا: ۷۶۹۸-۲۲۲۸ شاپا الکترونیکی: ۵۷۴۱-۲۴۲۳

مقاله پژوهشی

مدل‌سازی رفتار ناهمسانگرد بافت‌های نرم با روش بدون شبکه هیدرودینامیک هموار ذرات

علی نیکپور و حجت بادنوا*

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خاتم الانبیاء بهبهان، بهبهان، خوزستان، ایران

چکیده– مدل‌سازی رفتار مکانیکی بسیاری از بافت‌های نرم و برخی مواد مصنوعی ساخته‌شده توسط انسان نیازمند نمایش دقیق طبیعت پیچیده و ناهمسانگرد آن‌ها است. در این پژوهش، مدل هایپرالاستیک ناهمسانگرد هولتزاپفل-گاسر-اوگدن (HGO) با استفاده از روش بدون شبکه هیدرودینامیک هموار ذرات (SPH) پیاده‌سازی شده است. برای غلبه بر چالش‌های ناشی از تراکم‌ناپذیری در این دسته از مواد و دشواری‌های عددی مرتبط، از روابط ترکیبی استفاده شده است. بر این اساس، مدل SPH در چارچوب تمام لاگرانژی توسعه داده شده که در آن از قوانین بقای مرتبه اول برای مومنتوم خطی، تانسور گرادیان تغییر شکل، تانسور نگاشت سطح و نگاشت حجم بهره گرفته شده است. دقت این پیاده‌سازی با حل چندین مثال استاندارد در رفتار دینامیکی جامدات تحت تغییر شکل‌های بزرگ بررسی شده است. همچنین، نتایج مدل هایپرالاستیک با نتایج حاصل از نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس مقایسه شده است. علاوه بر این، رفتار پوست انسان به‌عنوان یک بافت نرم ناهمسانگرد تقویت‌شده با الیاف‌های کلاژن شبیه‌سازی و با نتایج تجربی موجود مقایسه شده است. مقایسه‌ها نشان می‌دهد که مدل SPH به‌طور مؤثری رفتار ناهمسانگرد بافت‌های نرم تحت تغییر شکل‌های بزرگ را شبیه‌سازی می‌کند. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که روش بدون شبکه SPH می‌تواند به‌عنوان یک چارچوب برای مدل‌سازی رفتار بافت‌های نرم با تغییر شکل‌های پیچیده مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: روش بدون شبکه، هیدرودینامیک هموار ذرات، بافت نرم، هایپرالاستیک ناهمسانگرد، تراکم‌ناپذیری.

دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۱۱/۰۸، بازنگری: ۱۴۰۳/۱۲/۰۸، پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۰۳، اولین انتشار: ۱۴۰۴/۰۴/۰۲

*: نویسنده مسئول، رایانامه: badnava@bkatu.ac.ir

فهرست علائم

c_p	سرعت موج فشاری	$\boldsymbol{t}_0$	نیروی سطحی
c_s	سرعت موج برشی	$\boldsymbol{p}$	مومنتوم خطی
C	ثابت ماده HGO	$\boldsymbol{P}$	تنش اول پیولا-کیرشوف
$\tilde{\boldsymbol{C}}$	بخش هم‌حجم تانسور راست کوشی-گرین	$\boldsymbol{S}_{ab}^{\boldsymbol{p}}$ ،$\boldsymbol{S}_{ab}^{\boldsymbol{P}}$	ماتریس‌های پایداری
D	ثابت ماده HGO	$\boldsymbol{T}_a$	نیروی داخلی
$\boldsymbol{e}$	مختصات محلی	$\boldsymbol{u}$	بردار جابجایی
$\boldsymbol{E}$	بردار واحد در مختصات کارتزین	$\boldsymbol{v}$	بردار سرعت
$\tilde{E}_\alpha$	کرنش الیاف	V	حجم
$\boldsymbol{E}_a$	نیروی خارجی	W	تابع هسته
$\boldsymbol{F}$	تانسور گرادیان تغییر شکل	$\boldsymbol{X}$	بردار موقعیت اولیه
$\boldsymbol{f}$	نیروی حجمی	μ	مدول برشی
$\boldsymbol{H}$	تانسور نگاشت سطح	ψ	انرژی کرنشی
$\boldsymbol{I}$	ماتریس همانی	κ	ضریب پخش الیاف
$\tilde{I}_1$	نامتغیر اول هم‌حجم	α_{CFL}	متغیر پایداری
h	فاصله بین ذرات	ρ_R	چگالی مرجع
J	ژاکوبین	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	مزدوج مجازی متغیر بقا
k	مدول حجمی	$\boldsymbol{S}$	مولفه منبع
K_1 ،K_2	خواص ماده HGO	$\boldsymbol{\mathcal{U}}$	متغیر بقا
n	گام حل	$\boldsymbol{\mathcal{F}}_N$	بردار شار
$\boldsymbol{n}$	بردار عمود در پیکربندی کنونی	ϕ	نگاشت حرکت
$\boldsymbol{N}$	بردار عمود در پیکربندی مرجع	t	زمان

۱- مقدمه

رفتار بسیاری از مواد طبیعی و همچنین مواد مصنوعی طراحی‌شده توسط انسان اغلب ناهمسانگرد است. در این مواد، ریزساختار به‌گونه‌ای چیده شده که ماده را در جهت‌های خاصی تقویت می‌کند. بسیاری از مواد مهندسی‌شده، مانند کامپوزیت‌های تقویت‌شده با الیاف و پلیمرهای تقویت‌شده، در این دسته قرار می‌گیرند. علاوه بر این، بسیاری از مواد طبیعی، از جمله چوب و بافت‌های نرم در موجودات زنده، رفتار ناهمسانگرد از خود نشان می‌دهند. برای مثال، الیاف‌های کلاژن در پوست به‌عنوان تقویت‌کننده‌هایی درون بستر عمل کرده و مقاومت پوست را در برابر بارگذاری در جهت‌های مشخص افزایش می‌دهند. مدل‌سازی رفتار این مواد تحت تغییرشکل‌های بزرگ نیازمند پیاده‌سازی و گسترش مدل‌های ساختاری هایپرالاستیک است.

شرودر و نف [۱] یک مدل هایپرالاستیک ناهمسانگرد برای تغییرشکل‌های بزرگ پیشنهاد کردند. هدف اصلی آن‌ها توسعه چارچوبی برای معادلات رفتاری هایپرالاستیک بود که شرایط چندتحدبی را ارضا کند. شرودر و همکاران [۲] بعدها یک مدل ماده ناهمسانگرد پایدار بر پایه یک رویکرد حساب تغییرات

معرفی کردند و یک تابع انرژی کرنشی مناسب برای بافت‌های زیستی نرم ارائه دادند و نشان دادند که این چارچوب، سرعت موج مثبت درون ماده را تضمین می‌کند که به طور مستقیم با پایداری مرتبط است. شرودر و همکاران [۳] یک چارچوب عمومی برای استخراج رفتار ماده هایپرالاستیک ناهمسانگرد توسعه دادند و یک تانسور مرتبه دوم معرفی کردند که ناهمسانگردی را در ساختار بلوری ماده توصیف می‌کند. مدل‌های دیگری که چندتحدبی را در نظر می‌گیرند شامل مدل‌های پیشنهادی از سوی ایستکو و آکسل [۴] و بالزانی و همکاران [۵] می‌شوند.

در بافت‌های نرم زیستی، الیاف‌های کلاژن نقش حیاتی در تعیین اثرات ناهمسانگرد در رفتار مکانیکی ایفا می‌کنند [۶]. تحقیقات گسترده‌ای برای توسعه مدل‌های ماده که اثر تقویت‌کنندگی الیاف‌ها را در نظر بگیرند انجام شده است. بسیاری از این مدل‌ها بر پایه نظریه‌های مکانیک محیط پیوسته برای کامپوزیت‌های تقویت‌شده با الیاف هستند. در این رویکرد مدل‌سازی، فرض می‌شود که تابع انرژی کرنشی نه تنها به تغییرشکل، بلکه به جهت‌گیری الیاف‌ها نیز وابسته است. یکی از این مدل‌ها، مدل هولتزاپفل–گاسر–اگدن یا HGO است [۷]. هدف اصلی مدل HGO نمایش رفتاری است که می‌تواند پراکندگی الیاف‌های کلاژن را در نظر بگیرد. گریتز و مشکه [۸] رویکردی ریزساختاری برای توسعه یک مدل به منظور توصیف رفتار الیاف‌های کلاژن در بافت‌های نرم پیشنهاد کردند. به‌طور مشابه، رن تأثیر پراکندگی الیاف‌های کلاژن بر خواص مکانیکی دیواره‌های شریانی را بررسی کرد [۹].

نولان و همکاران [۱۰] نشان دادند که مدل HGO نیاز به اصلاحاتی برای مدل‌سازی مواد تراکم‌پذیر دارد، زیرا بخش ناهمسانگرد مدل HGO نسبت به تغییرشکل حجمی در مواد تراکم‌پذیر حساسیت ندارد. برای حل این مسئله، آن‌ها پیشنهاد کردند که از نامتغیرهای کامل به‌جای نامتغیرهای هم حجم استفاده شود. اسکاتسل و بورسا [۱۱] یک مرور جامع از مدل‌های رفتاری مواد برای شبیه‌سازی رفتار لایه‌های شریانی به‌ویژه با در نظر گرفتن اثرات تقویت‌کنندگی الیاف‌های کلاژن، انجام دادند. تمرکز اصلی آن‌ها بر تأثیر پراکندگی الیاف‌ها بر پاسخ تنش–کرنش لایه‌های شریانی بوده است. وایسبکر و همکاران [۱۲] یک مدل چندمقیاسی برای شبیه‌سازی اثرات الیاف‌های کلاژن در بافت شریانی پیشنهاد کردند، در حالی که پراناوی و همکاران [۱۳] یک مدل میدان فاز برای پیش‌بینی شکست در مواد نرم ناهمسانگرد تحت تغییرشکل‌های بزرگ ارائه دادند. فرآیندهای آسیب در بافت‌های نرم به طور مفصل در [۱۴] مورد بحث قرار گرفته است.

شبیه‌سازی پاسخ‌های مواد تحت شرایط تغییرشکل‌های بزرگ اغلب نیازمند در نظر گرفتن تراکم‌ناپذیری است. این شامل مدل‌سازی عددی مواد هایپرالاستیک و جامدات در حال تغییرشکل پلاستیک است. روابط سنتی مبتنی بر جابه‌جایی به طور گسترده‌ای برای مدل‌سازی جامدات استفاده می‌شوند؛ با این حال، این روش‌ها تحت شرایط تراکم‌ناپذیری تمایل به نشان دادن قفل‌شدگی حجمی دارند [۱۵]. برای حل این مسئله، رویکردهای مختلفی توسعه داده شده‌اند، از جمله روش انتگرال‌گیری کاهش‌یافته [۱۶]، روش‌های مبتنی بر روابط ترکیبی از جمله روش کرنش مفروض [۱۷]، روش B-bar [۱۸] و روابط ترکیبی فشار–جابجایی که توسط ساسمن و باته معرفی شد [۱۹] و بعدها به شرایط غیرخطی هندسی گسترش یافت [۲۰]. روش‌های دیگر شامل روش F-bar [۲۱، ۲۲] و المان‌های با انتگرال‌گیری طبیعی که توسط بونه و همکاران پیشنهاد شدند [۲۳] هستند. برای کاهش قفل‌شدگی حجمی در شرایط تراکم‌ناپذیری، روش‌شناسی مبتنی بر روابط ترکیبی با استفاده از تقریب‌های مختلف برای تانسورهای تغییرشکل، راه‌حلی ارائه می‌دهند. این رویکرد در توسعه المان‌های بدون قفل‌شدگی با عملکرد خمشی عالی نقش مؤثری ایفا کرده است [۲۴]. بونه و همکاران [۲۵] این مفهوم را در زمینه الاستیسیته چندتحدبی با کرنش بزرگ توسعه دادند. این روش‌ها در زمینه‌های مختلفی مانند روش‌های میدان فاز و مدل‌سازی پیزوالکتریک کاربرد یافته‌اند [۲۵, ۲۶]. با استفاده از روابطی که به طور همزمان تکانه خطی، تانسور گرادیان تغییرشکل، تانسور نگاشت سطح و ژاکوبین را حل می‌کند، این

رویکرد ترکیبی در شبیه‌سازی تغییر شکل دینامیکی جامدات تراکم‌ناپذیر موفقیت‌آمیز بوده است [۲۷، ۲۸].

روش SPH یک روش عددی بدون شبکه قدرتمند است که برای شبیه‌سازی مسائل مختلف مکانیک سیالات و جامدات استفاده می‌شود. با این حال، روابط سنتی SPH، مبتنی بر انتگرال‌گیری گالرکین در ذرات، تمایل به مشکلاتی مانند مدهای انرژی صفر کاذب دارد [۲۹]. علاوه بر این، بی‌ثباتی‌های کششی، از دست رفتن پایستگی و همگرایی مرتبه پایین برای تنش و کرنش از چالش‌های رایج در SPH سنتی هستند. برای حل این مشکلات، روش‌های پایداری مختلفی توسعه داده شده است. برای نمونه، ویدال و همکاران [۲۹] یک مجموعه روابط SPH لاگرانژی به‌روزشده پایدار برای حذف مدهای بدون انرژی کاذب، معرفی کردند. در ادامه، لی و همکاران [۳۰، ۳۱] یک سیستم ترکیبی از معادلات را معرفی کردند که تکانه خطی، تانسور گرادیان تغییرشکل و انرژی کل را به عنوان متغیرهای پایستگی در نظر می‌گیرد. آن‌ها یک روش پایدارسازی پتروف-گالرکین برای دینامیک جامدات صریح ارائه دادند و از تقریب‌های اجزای محدود با مرتبه پایین و المان‌های چهاروجهی استفاده کردند. در سال ۲۰۱۶، لی و همکاران [۳۲] مجموعه روابط ترکیبی مبتنی بر شیوه تمام لاگرانژی ارائه دادند که قوانین پایستگی تکانه خطی ($\boldsymbol{p}$)، تانسور گرادیان تغییرشکل ($\boldsymbol{F}$)، نگاشت سطح ($\boldsymbol{H}$) و ژاکوبین (J) را حل می‌کرد. برای مقابله با مدهای انرژی صفر در شبیه‌سازی‌های SPH، آن‌ها یک روش پایدارسازی جیمسون-اشمیت-تورکل را اجرا کردند. علاوه بر این، یک روش پایدارسازی سازگار با حساب تغییرات پتروف-گالرکین در [۳۳، ۳۴] به کار برده شده است. در مطالعه‌ای در سال ۲۰۱۹، لی و همکاران روش‌های مختلف پایدارسازی از جمله پتروف-گالرکین، جیمسون-اشمیت-تورکل و روش‌های مبتنی بر حل‌کننده ریمان را در چارچوب SPH مقایسه کرده‌اند [۳۵]. بادنوا و همکاران [۳۶] یک چارچوب تمام لاگرانژی پایدار برای شبیه‌سازی پاسخ‌های دینامیکی جامدات تراکم‌ناپذیر توسعه دادند. آن‌ها از روش بدون شبکه گالرکین برای نمایش کاربرد و اثربخشی چارچوب ترکیبی در زمینه دینامیک جامدات استفاده کردند. روابط ترکیبی $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, J\}$ در سال‌های اخیر نیز گسترش یافته است. دو کومپز و همکاران [۳۷] نسخه‌ای لاگرانژی به‌روزشده برای مدل‌سازی الاستیسیته و پلاستیسیته با کرنش بزرگ در حالت هم‌دما ارائه دادند و از روش انتگرال‌گیری زمانی صریح رانگ-کوتا سه‌مرحله‌ای برای بهبود پایداری استفاده کردند. به تازگی، این سیستم برای در نظر گرفتن پایستگی انرژی کل برای رفتار ترمو-مکانیکی مواد هایپرالاستیک، گسترش یافته است [۳۸]. در این توسعه، یک قانون پایستگی اضافی بر حسب چگالی آنتروپی معرفی شده است. سیستم اصلاح‌شده با موفقیت در چارچوب SPH پیاده‌سازی شده است. بادنوا [۳۹] کاربرد چارچوب SPH لاگرانژی به‌روزشده را در مدل‌سازی تغییرشکل پلاستیک پیچیده در فرآیندهای شکل‌دهی فلزات نشان داده است. در دهه‌های اخیر، روش‌های بدون شبکه متفاوتی گسترش داده شده که در کاربردهای متفاوتی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. مقایسه روش‌های مختلف تصویر در روش هیدرودینامیک هموار ذرات تراکم ناپذیر برای مدل‌سازی جریان اطراف دریچه‌ها و تعیین دقیق وضعیت جریان در اطراف سازه‌های هیدرولیکی توسط قدم پور و همکاران [۴۰] صورت گرفته است. عدالتی و سلطانی [۴۱] از بدون شبکه گالرکین برای تحلیل استاتیکی ورق‌های نازک با اشکال هندسی گوناگون بر مبنای تئوری های کلاسیک میندلین بهره گرفته‌اند. تحلیل کمانشی ستون‌های نامنشوری با بار محوری غیریکنواخت با روش بدون شبکه پتروف گالرکین توسط حیدرقیطاقی و همکاران [۴۲] صورت گرفته است.

در حالی که مدل‌های هایپرالاستیک مذکور در شبیه‌سازی رفتار ناهمسانگرد موفق بوده‌اند، چالش‌هایی همچنان در شبیه‌سازی دقیق هندسه‌های پیچیده و تغییرشکل‌های بزرگ در زمینه بافت‌های نرم، به ویژه در روش‌های بدون شبکه مانند SPH باقی مانده است. برای غلبه بر این محدودیت‌ها، این مطالعه از روش SPH با استفاده از شیوه روابط ترکیبی بهره می‌برد. با حذف نیاز به تولید شبکه، SPH انعطاف‌پذیری بیشتری در شبیه‌سازی

مواد ناهمسانگرد فراهم می‌کند و آن را به گزینه‌ای ایده‌آل برای مدل‌سازی بافت‌های نرم مانند دیواره‌های شریانی تبدیل می‌کند. بنابراین، این مطالعه پیاده‌سازی مدل HGO را در چارچوب SPH ارائه می‌دهد که هدف آن رسیدگی به چالش‌هایی مانند تراکم‌ناپذیری، پراکندگی الیاف و تغییرشکل بزرگ در شبیه‌سازی بافت‌های نرم است. برای این منظور، روابط ترکیبی $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, J\}$ توسعه داده شده است و جزئیات گسسته‌سازی با استفاده از روش SPH و سپس انتگرال‌گیری زمانی صریح با روش رانگ-کوتا دو مرحله‌ای ارائه شده است. در نهایت، با پیاده‌سازی مدل هایپرالاستیک همسانگرد و مدل ناهمسانگرد HGO، قابلیت روش پیشنهادی در شبیه‌سازی رفتار مواد مختلف، از جمله بافت‌های نرم، ارزیابی شده است.

۲- معادلات حاکم

۲-۱- حرکت یک جسم تغییرشکل‌پذیر

تغییرشکل یک جسم سه‌بعدی و هم‌دما از پیکربندی اولیه با چگالی ρ_R، حجم V و مرز ∂V به پیکربندی تغییرشکل‌یافته با حجم v و مرز ∂v در طول زمان t مورد بررسی قرار می‌گیرد. حرکت جسم توسط نگاشت $\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{X}, t)$ از پیکربندی اولیه به پیکربندی کنونی توصیف می‌شود. بنابراین، جابه‌جایی و سرعت به صورت روابط (۱) و (۲) تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t) = \phi(\boldsymbol{X}, t) - \phi(\boldsymbol{X}, 0) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} \tag{۱}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} \tag{۲}$$

تانسور گرادیان تغییرشکل، که یک تانسور دو نقطه‌ای است و جسم را از پیکربندی اولیه به پیکربندی کنونی آن مرتبط می‌کند، به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{X}, t)}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\nabla}_0 \boldsymbol{u} \tag{۳}$$

که در آن عملگر $\boldsymbol{\nabla}_0$ گرادیان ماده را نشان می‌دهد و $\boldsymbol{I}$ ماتریس همانی است.

۲-۲- قانون بقای تکانه خطی

معادله تکانه خطی بر اساس قانون دوم نیوتن استخراج می‌شود. در این زمینه، مجموع همه نیروها (نیروهای سطحی و حجمی) برابر با نرخ تغییرات تکانه خطی است:

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{p} dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{t}_0 dA + \int_V \boldsymbol{f}_0\, dV = \int_V (\mathrm{DIV}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{f}_0)\, dV \tag{۴}$$

در روابط فوق $\boldsymbol{p} = \rho_R \boldsymbol{v}$ نشان‌دهنده تکانه خطی است، $\boldsymbol{f}_0$ نیروهای حجمی بر واحد حجم اولیه را نشان می‌دهد و $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{PN}$ بردار تنش است که با ضرب تانسور تنش پیولا-کیرشهف اول $\boldsymbol{P}$ در بردار عمود به سمت بیرون $\boldsymbol{N}$ به دست می‌آید. معادله تکانه خطی به صورت محلی به شکل رابطه (۵) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} = \mathrm{DIV}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{f}_0 \tag{۵}$$

۲-۳- قانون بقای تانسور گرادیان تغییرشکل

با معرفی قانون بقای جدید برای تانسور گرادیان تغییرشکل، انعطاف‌پذیری روابط بیشتر می‌شود. با در نظر گرفتن تانسور گرادیان تغییرشکل به‌عنوان یک متغیر مستقل، شکل انتگرالی قانون بقای گرادیان تغییرشکل به صورت رابطه (۶) بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{F} dV = \int_{\partial V} \frac{1}{\rho_R} \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{N}\, dA \tag{۶}$$

که به شکل محلی زیر منجر می‌شود:

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} = \mathrm{DIV}\left(\frac{1}{\rho_R} \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{I}\right) \tag{۷}$$

تانسور گرادیان تغییرشکل با پیشرفت زمان باید شرط سازگاری (۸) را ارضا کند:

$$\mathrm{CURL}\boldsymbol{F} = 0 \tag{۸}$$

۲-۴- قانون بقای تانسور نگاشت سطح

کو-فاکتور تانسور گرادیان تغییرشکل، $\boldsymbol{H}$، با استفاده از ضرب خارجی تانسوری به صورت رابطه (۹) بیان می‌شود [۴۳]:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2} \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{2} \mathrm{CURL}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}) \tag{۹}$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان و سپس انتگرال‌گیری، معادله (۱۰) به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{H} dV = \int_V \mathrm{CURL}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{F}) dV \tag{۱۰}$$

بنابراین، با ساده‌سازی رابطه (۱۰)، شکل محلی معادله بقای تانسور نگاشت سطح به صورت رابطه (۱۱) است:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \mathrm{CURL}\left(\frac{1}{\rho_R} \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{F}\right) \tag{۱۱}$$

کو-فاکتور تانسور گرادیان تغییرشکل باید شرایط سازگاری رابطه (۱۲) را برآورده کند:

$$\mathrm{DIV}\boldsymbol{H}=0 \quad (۱۲)$$

۲-۵- قانون بقای ژاکوبین

ژاکوبین تانسور گرادیان تغییرشکل به صورت رابطه (۱۳) استخراج می‌شود:

$$J=\det(\boldsymbol{F})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{H}:\boldsymbol{F})=\frac{1}{3}\mathrm{DIV}(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{x}) \quad (۱۳)$$

سپس با مشتق‌گیری نسبت به زمان و انتگرال‌گیری، رابطه (۱۴) به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dt}\int_V J dV=\int_V \mathrm{DIV}\left(\boldsymbol{H}^T\frac{\boldsymbol{p}}{\rho_R}\right)dV \quad (۱۴)$$

پس از ساده‌سازی، معادله بقای ژاکوبین به صورت محلی به شکل رابطه (۱۵) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\mathrm{DIV}\left(\boldsymbol{H}^T\frac{\boldsymbol{p}}{\rho_R}\right) \quad (۱۵)$$

۲-۶- معادلات بقایی در شکل فشرده

به طور کلی، شکل انتگرالی معادلات بقا به صورت رابطه (۱۶) بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{\mathcal{U}}\, dV+\int_{\partial V}\boldsymbol{\mathcal{F}}_N\, dA=\int_V \boldsymbol{\mathcal{S}}\, dV \quad (۱۶)$$

در رابطه فوق $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ نشان‌دهنده متغیرهای بقا است، $\boldsymbol{\mathcal{F}}_N=\boldsymbol{\mathcal{F}}_I\boldsymbol{N}_I$ بردارهای شار معادلات بقا در راستای کارتزین و $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ مولفه منبع است. با این تعریف، مجموعه معادلات به صورت رابطه (۱۷) ارائه می‌شود:

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{H}\\ J\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{\mathcal{F}}_I=-\begin{bmatrix}\boldsymbol{PE}_I\\ \frac{1}{\rho_R}\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{E}_I\\ \boldsymbol{F}\times\left(\frac{1}{\rho_R}\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{E}_I\right)\\ \boldsymbol{H}:\left(\frac{1}{\rho_R}\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{E}_I\right)\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f_0}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

در این روابط $\boldsymbol{E}_I$ بردار واحد در مختصات کارتزین است که به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

در نهایت، مجموعه معادلات بقا به صورت رابطه (۱۹) خلاصه می‌شود:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{U}}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}}_I}{\partial X_I}=\boldsymbol{\mathcal{S}};\qquad \forall I=1,2,3 \quad (۱۹)$$

۳-گسسته‌سازی فضایی SPH

به طور کلی شکل ضعیف مجموعه معادلات ترکیبی $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{F},\boldsymbol{H},J\}$ با ضرب کردن روابط عمومی بقا (۱۹) در مزدوج مجازی $\delta\boldsymbol{\mathcal{V}}=\{\delta\boldsymbol{v},\delta\sum_{\boldsymbol{F}}\delta\sum_{\boldsymbol{H}},\delta\sum_J\}$ و انتگرال‌گیری روی حجم، به صورت رابطه (۲۰) بیان می‌شود:

$$\int_V\delta\boldsymbol{\mathcal{V}}\bullet\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{U}}}{\partial t}dV-\int_V\delta\boldsymbol{\mathcal{V}}\bullet\boldsymbol{\mathcal{S}}\, dV+\int_V\delta\boldsymbol{\mathcal{V}}\bullet\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{F}}_I}{\partial t}dV=0 \quad (۲۰)$$

که در اینجا نماد • نشان‌دهنده حاصل‌ضرب داخلی است. با اعمال قضیه گاوس بر قسمت آخر معادله (۲۰)، شکل ضعیف زیر به دست می‌آید:

$$\int_V\delta\boldsymbol{\mathcal{V}}\bullet\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{U}}}{\partial t}dV-\int_V\delta\boldsymbol{\mathcal{V}}\bullet\boldsymbol{\mathcal{S}}\, dV-\int_V\boldsymbol{\mathcal{F}_I}\bullet\frac{\partial\delta\boldsymbol{\mathcal{V}}}{\partial X_I}dV+\int_{\partial V}\delta\boldsymbol{\mathcal{V}}\bullet\boldsymbol{\mathcal{F}}_N\, dA=0 \quad (۲۱)$$

با استفاده از معادله کلی بالا، شکل ضعیف معادلات حاکم با روابط (۲۲) تا (۲۵) بیان می‌شود:

$$\int_V\delta\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial t}dV+\int_V\boldsymbol{P}:\boldsymbol{\nabla}_0\delta\boldsymbol{v}dV-\int_V\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f_0}dV-\int_{\partial V}\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t_0}\, dA=0 \quad (۲۲)$$

$$\int_V\delta\textstyle\sum_{\boldsymbol{F}}:\left[\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}-\boldsymbol{\nabla}_0\left(\frac{\boldsymbol{p}}{\rho_R}\right)\right]dV=0 \quad (۲۳)$$

$$\int_V\delta\textstyle\sum_H:\left[\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}-\mathbf{F}\times\boldsymbol{\nabla}_0\left(\frac{\boldsymbol{p}}{\rho_R}\right)\right]dV=0 \quad (۲۴)$$

$$\int_V\delta\textstyle\sum_J\left[\frac{\partial J}{\partial t}-\mathbf{H}:\boldsymbol{\nabla}_0\left(\frac{\boldsymbol{p}}{\rho_R}\right)\right]dV=0 \quad (۲۵)$$

لازم به ذکر است که فرآیند اعمال شده برای تبدیل رابطه (۲۰) به (۲۱) در معادله مومنتوم خطی برای اعمال شرط مرزی کشش سطحی ضروری است اما در دیگر معادلات بقا از آن برای سادگی صرف‌نظر می‌شود. روش SPH یک محیط پیوسته را با مجموعه‌ای از ذرات پراکنده تقریب می‌زند. توزیع ذرات می‌تواند منظم یا نامنظم باشد. برای محاسبه گرادیان مادی از هر تابع برداری دلخواه $\boldsymbol{f}$، با تقریب گرادیان در یکی از ذرات با استفاده از روشSPH، ذرات اطراف در یک محدوده خاص (که توسط کاربر

تعیین می‌شود) در نظر گرفته می‌شوند و تابع در ذره مرکزی انتخاب شده به صورت رابطه (۲۶) ارزیابی می‌شود:

$$\boldsymbol{\nabla}_0 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_a) \approx \sum_{b\in\Lambda_a^b} \boldsymbol{f}_b \otimes \boldsymbol{G}_b(\boldsymbol{X}_a); \quad \boldsymbol{G}_b(\boldsymbol{X}_a) := V_b \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_0 \widetilde{W}_b(\boldsymbol{X}_a) \tag{۲۶}$$

که در آن Λ_a^b بیانگر مجموعه‌ای از ذرات b است که در داخل یک کره با شعاع مشخص $2h$ در اطراف $\boldsymbol{X}_a$ قرار دارند. با این تعریف، برای تخمین مقدار یک تابع، مقادیر وزن داده شده تابع در نقاط اطراف در نظر گرفته می‌شود و مقدار در نقطه هدف a محاسبه می‌شود. اندازه منطقه اطراف ذره باید به گونه‌ای باشد که در هر جهت حداقل یک ذره وجود داشته باشد. همچنین W به عنوان تابع وزن یا کرنل شناخته می‌شود. با استفاده از این تعریف، شکل گسسته روابط به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\boldsymbol{p}_a}{dt} = \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{T}_a + \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{p}_a) \tag{۲۷}$$

$$\frac{d\boldsymbol{F}_a}{dt} = \sum_{b\in\Lambda_a^b} 2\left(\frac{\boldsymbol{p}^{Ave}}{\rho_R}\right) \otimes \boldsymbol{G}_b(\boldsymbol{X}_a) \tag{۲۸}$$

$$\frac{d\boldsymbol{H}_a}{dt} = \boldsymbol{F}_a \times \sum_{b\in\Lambda_a^b} 2\left(\frac{\boldsymbol{p}^{Ave}}{\rho_R}\right) \otimes \boldsymbol{G}_b(\boldsymbol{X}_a) \tag{۲۹}$$

$$\frac{dJ_a}{dt} = \boldsymbol{H}_a : \sum_{b\in\Lambda_a^b} 2\left(\frac{\boldsymbol{p}^{Ave}}{\rho_R}\right) \otimes \boldsymbol{G}_b(\boldsymbol{X}_a) + \mathcal{D}(J_a) \tag{۳۰}$$

$$E_a = \frac{A_a}{V_a} \boldsymbol{t}_B^a + \boldsymbol{f}_0^a \tag{۳۱}$$

$$\boldsymbol{T}_a = \sum_{b\in\Lambda_a^b} V_b \left(\boldsymbol{P}_b \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_0 \widetilde{W}_a(\boldsymbol{X}_b) - P_a \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_0 \widetilde{W}_b(\boldsymbol{X}_a)\right) \tag{۳۲}$$

در روابط بالا $\boldsymbol{p}^{Ave} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{p}_b)$، زیر نویس B نشان‌دهنده ذره‌ای واقع در مرز است و A_a ناحیه مرتبط را نشان می‌دهد. در معادله (۳۱)، برای ذراتی که در مرز خارجی قرار ندارند، $A_a = 0$ است. علاوه بر آن E_a نیروی خارجی و $\boldsymbol{T}_a$ نیروی داخلی را نشان می‌دهند. همچنین $\widetilde{W}$ و $\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_0 \widetilde{W}$ به ترتیب کرنل تصحیح‌شده و گرادیان تصحیح‌شده کرنل تصحیح‌شده هستند [۴۴].

در روابط فوق عبارات $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{p}_a)$ و $\mathcal{D}(J_a)$ مولفه‌های اتلافی هستند که توسط حل‌کننده ریمان به دست می‌آیند. با توجه به حضور عوامل ناپایدارکننده عددی مانند مودهای بدون انرژی ساعت شنی، از حل‌کننده ریمان در حل‌های صریح، برای کنترل ناپایداری و قفل شدگی حجمی با ایجاد مقداری اتلاف انرژی مصنوعی به مدل، استفاده می‌شود. اتلاف انرژی فقط در حل معادلات گسسته مومنتوم و ژاکوبین اعمال می‌شود. برای بخش ژاکوبین، این اتلاف زمانی وارد می‌شود که هدف تحلیل مدل‌های کاملاً تراکم‌ناپذیر باشد، زیرا مواد تراکم‌ناپذیر ممکن است قفل حجمی نشان می‌دهند. بنابراین، اتلاف انرژی برای رفع این مشکل و تثبیت راه‌حل وارد می‌شود. مولفه‌های اتلاف بر اساس حلگر ریمن با روابط (۳۳) و (۳۴) تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{p}_a) = \sum_{b\in\Lambda_a^b} V_b \boldsymbol{p}_{ab}^{stab}\left(\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_0 \widetilde{W}_b(\boldsymbol{X}_a) - \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_0 \widetilde{W}_a(\boldsymbol{X}_b)\right) \tag{۳۳}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(J_a) = \sum_{b\in\Lambda_a^b} V_b \frac{\boldsymbol{p}^{stab}}{\rho_R} \cdot \left[\boldsymbol{H}_a \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_0 \widetilde{W}_b(\boldsymbol{X}_a) - \boldsymbol{H}_b \widetilde{\boldsymbol{\nabla}}_0 \widetilde{W}_a(\boldsymbol{X}_b)\right] \tag{۳۴}$$

رابطه (۳۳) برای حذف مودهای بدون انرژی و تثبیت راه‌حل استفاده شده است، در حالی که رابطه (۳۴) برای جلوگیری از قفل حجمی به کار می‌رود. تنش پایدار پیولا-کیرشهف اول و مومنتوم خطی پایدار به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\boldsymbol{P}^{stab} := \boldsymbol{S}_{ab}^{\boldsymbol{p}}\left[\left(\boldsymbol{p}_f^+ - \boldsymbol{p}_f^-\right) \otimes \boldsymbol{N}_{ab}\right] \tag{۳۵}$$

$$\boldsymbol{p}^{stab} := \boldsymbol{S}_{ab}^{\boldsymbol{P}}\left[\left(\boldsymbol{P}_f^+ - \boldsymbol{P}_f^-\right)\boldsymbol{N}_{ab}\right] \tag{۳۶}$$

در روابط بالا $\boldsymbol{S}_{ab}^{\boldsymbol{p}}$ و $\boldsymbol{S}_{ab}^{\boldsymbol{P}}$ ماتریس‌های پایداری هستند که با روابط (۳۷) و (۳۸) تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{S}_{ab}^{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2}\left[c_p(\boldsymbol{n}_{ab} \otimes \boldsymbol{n}_{ab}) + c_s(I - \boldsymbol{n}_{ab} \otimes \boldsymbol{n}_{ab})\right] \tag{۳۷}$$

$$\boldsymbol{S}_{ab}^{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{2c_p}(\boldsymbol{n}_{ab} \otimes \boldsymbol{n}_{ab}) \tag{۳۸}$$

در روابط فوق $\boldsymbol{N}_{ab}$ بردار عمود واحد و $\{\boldsymbol{P}_f^{\pm}, \boldsymbol{p}_f^{\pm}\}$ نشان‌دهنده مقادیر چپ و راست $\{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{p}\}$ روی سطح مشترک متصل‌کننده ذرات هستند. علاوه بر این c_p سرعت موج فشاری در ماده و c_s سرعت موج برشی در ماده هستند که از ویژگی‌های ماده محسوب می‌شوند. بردار نرمال فضایی بین ذرات a و b به صورت $\boldsymbol{n}_{ab} := \frac{\boldsymbol{x_b} - \boldsymbol{x_a}}{||\boldsymbol{x_b} - \boldsymbol{x_a}||}$ تعریف می‌شود.

۴- انتگرال گیری زمانی

از آنجا که مجموعه معادلات نیمه‌گسسته نسبتاً بزرگ است، از یک انتگرال‌گیری زمانی صریح استفاده شده است. برای این منظور، از روش انتگرال‌گیری زمانی دو مرحله‌ای رانگه-کوتا صریح، که به آن TVD-RK گفته می‌شود، استفاده شده است

[۴۵]. فرض می‌شود مقدار متغیر $\boldsymbol{u}$ برای نقطه a در گام $n+1$ یعنی گام بعدی حل مورد نیاز است و اطلاعات در گام n موجود است. در آن صورت، انتگرال گیری زمانی دو مرحله به شکل روابط (۳۹) تا (۴۲) قابل بیان است:

$$\boldsymbol{u}_a^* = \boldsymbol{u}_a^n + \Delta t \dot{\boldsymbol{u}}_a^n(\boldsymbol{u}_a^n, t^n) \quad (۳۹)$$

$$\boldsymbol{u}_a^{**} = \boldsymbol{u}_a^* + \Delta t \dot{\boldsymbol{u}}_a^*(\boldsymbol{u}_a^*, t^{n+1}) \quad (۴۰)$$

$$\boldsymbol{u}_a^{n+1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_a^n + \boldsymbol{u}_a^{**}) \quad (۴۱)$$

متغیرهای روابط بقا $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, J\}$ و موقعیت $\boldsymbol{x}$ با استفاده از انتگرال گیری زمانی فوق، به‌روزرسانی شده‌اند. گام زمانی انتخاب‌شده $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ باید طبق معیار پایداری بر اساس شرط کورانت–فریدریش–لوئی(CFL) به صورت رابطه (۴۲) محاسبه شود:

$$\Delta t = \alpha_{CFL} \frac{h_{min}}{c_{p,max}} \quad (۴۲)$$

که در آن $c_{p,max}$ سرعت حداکثری انتشار موج فشاری در ماده بوده و h_{min} بیانگر حداقل فاصله بین ذرات است. از این معادله برای تنظیم خودکار گام زمانی استفاده شده است. در این تحقیق α_{CFL} متغیر پایداری است که مقدار ۰/۳ برای آن انتخاب شده است به نحوی که دقت و پایداری کافی را تضمین کند.

۵- روابط **رفتار ماده**

۵-۱- مدل ماده هایپرالاستیک همسانگرد

شرط چند تحدبی بودن یک شرط بنیادین برای تابع انرژی کرنشی است که در شرایط کرنش‌های بزرگ استفاده می‌شود. این شرط برای اطمینان از پایداری ماده و مناسب بودن حالت معادلات حاکم مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۵]. در این تحقیق، از یک مدل نئو–هوکین تقریباً تراکم‌ناپذیر برای شبیه‌سازی پاسخ مواد همسانگرد استفاده می‌شود که در آن تنش اول پیولا– کیرشهف به‌صورت رابطه (۴۳) بیان می‌شود [۲۷]:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Sigma_F} + \Sigma_J \boldsymbol{H} \quad (۴۳)$$

که در آن تنش‌های مزدوج $\boldsymbol{\Sigma_F}$ و Σ_J در ادامه با روابط (۴۴) و (۴۵) تعریف شده‌اند:

$$\boldsymbol{\Sigma_F} = \mu J^{-2/3}\boldsymbol{F} \quad (۴۴)$$

$$\Sigma_J = \left[k(J-1) - \frac{1}{3}\mu J^{-\frac{5}{3}}(\boldsymbol{F}:\boldsymbol{F})\right] \quad (۴۵)$$

در اینجا μ و k به‌ترتیب مدول برشی و مدول حجمی هستند.

۵-۲- مدل ماده هایپرالاستیک ناهمسانگرد

رفتار سازه‌ای مواد هایپرالاستیک با استفاده از یک تابع پتانسیل انرژی کرنشی توصیف می‌شود که انرژی ذخیره‌شده در واحد حجم در پیکربندی مرجع را نشان می‌دهد. به طور کلی، تابع پتانسیل انرژی کرنشی می‌تواند به‌عنوان تابعی از کرنش، نامتغیرها یا کشیدگی‌های اصلی بیان شود. در این مطالعه، از مدل HGO برای شبیه‌سازی رفتار ناهمسانگرد مواد هایپرالاستیک استفاده شده است. انرژی کرنشی در این مدل به دو قسمت تقسیم می‌شود [۷]:

$$\psi = \widetilde{\psi}\left(\widetilde{\boldsymbol{C}}\right) + U(J) \quad (۴۶)$$

که در آن قسمت حجمی انرژی کرنشی به‌صورت رابطه (۴۷) تعریف می‌شود:

$$U(J) = \frac{1}{D}\left(\frac{J^2-1}{2} - \ln J\right) \quad (۴۷)$$

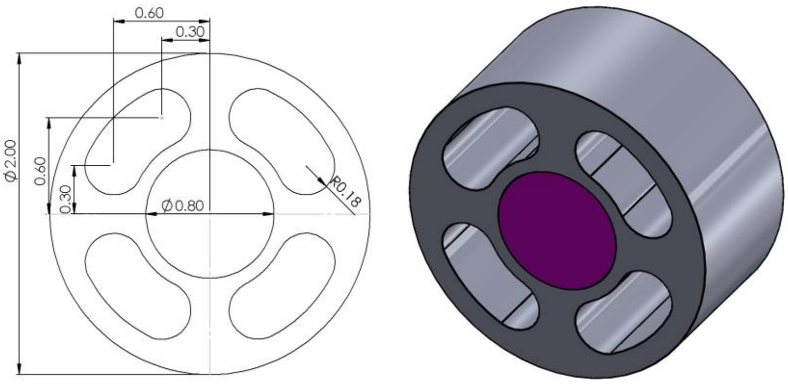
و قسمت همسانگرد انرژی کرنشی با رابطه (۴۸) داده شده است:

$$\widetilde{\psi}\left(\widetilde{\boldsymbol{C}}\right) = C(\tilde{I}_1 - 3) + \frac{K_1}{2K_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\exp\left(K_2\langle\tilde{E}_\alpha\rangle^2\right) - 1\right] \quad (۴۸)$$

که در آن کرنش الیاف، $\tilde{E}_\alpha$، به‌صورت رابطه (۴۹) تعریف می‌شود:

$$\tilde{E}_\alpha = \kappa\left(\tilde{I_1} - 3\right) + (1-3\kappa)(\tilde{I}_{4\alpha} - 1) \quad (۴۹)$$

در معادلات بالا، ψ انرژی کرنشی به ازای واحد حجم مرجع است، و κ، K_1، K_2، D و C خواص ماده هستند. علاوه بر این، $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ قسمت همسانگرد تانسور راست کوشی–گرین است و $\tilde{I_1} = tr(\widetilde{\boldsymbol{C}})$ اولین نامتغیر آن است. در این مدل، فرض بر این است که رفتار ماده به جهت‌گیری الیاف بستگی دارد. بنابراین، $\tilde{I}_{4\alpha} = \boldsymbol{a}_\alpha \cdot \widetilde{\boldsymbol{C}} \cdot \boldsymbol{a}_\alpha$ جایی که $\boldsymbol{a}_\alpha$ دو مجموعه بردار هستند که جهت‌های الیاف را در سیستم مختصات محلی $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ نمایش می‌دهند. این دو بردار زاویه‌ای به اندازه$\pm\gamma$ با جهت $\boldsymbol{e}_1$ می‌سازند. در این مطالعه، فرض شده است که هر گروه الیاف به‌طور مشابه عمل می‌کند. متغیر κ سطح و شکل پخش الیاف را برای هر گروه الیاف کنترل می‌کند.



(ب) (الف)

شکل ۱. (الف)ابعاد نمونه استفاده‌شده در آزمایش پانچ بر حسب متر و (ب) نمای سه‌بعدی از نمونه که در آن ناحیه‌ای که سرعت اولیه اعمال شده است با رنگ متفاوت نشان داده شده است

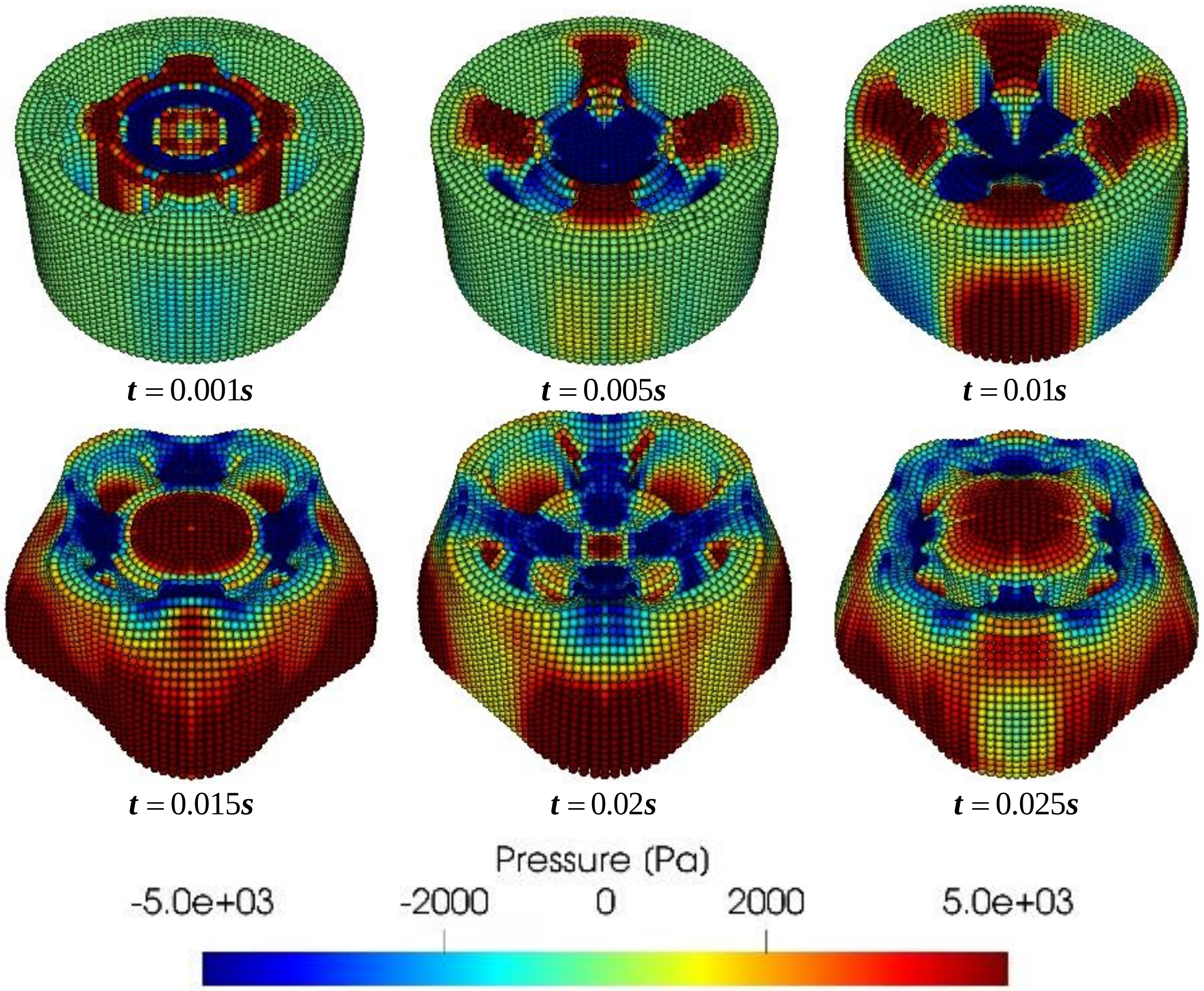
این متغیر به‌صورت $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{3}$ تعریف می‌شود، جایی که $\kappa = 0$ به معنی عدم پخش (الیاف هم‌راستا) و $\kappa = \frac{1}{3}$ به الیاف تصادفی پخش‌شده اشاره دارد که منجر به رفتار همسانگرد ماده می‌شود [۴۶, ۴۷].

در این مدل، فرض بر این است که تقویت‌کننده‌های الیاف تنها تحت بارهای کششی عمل می‌کنند، به همین دلیل از براکت مک‌کولی $\langle \tilde{E}_\alpha \rangle$ استفاده شده تا اطمینان حاصل شود که کرنش الیاف تنها برای مقادیر مثبت، غیر صفر است.

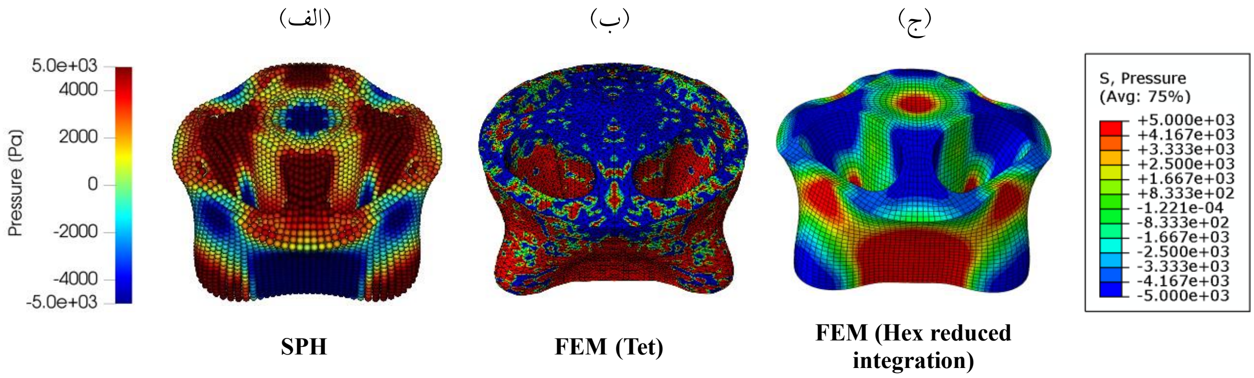
۶- مثال‌های عددی

۶-۱- رفتارهای هایپرالاستیک همسانگرد: آزمون پانچ

این مثال به‌طور گسترده‌ای برای ارزیابی توانایی روابط و پیاده‌سازی آن‌ها در مقابله با قفل‌شدگی حجمی، ناپایداری فشاری و مشکلات ناشی از آن‌ها در شرایط تراکم‌ناپذیر استفاده می‌شود [۳۸]. در این مطالعه، از یک نمونه با هندسه نشان داده شده در شکل ۱ استفاده شده است. نمونه استوانه‌ای با چهار حفره متقارن، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، تحت تأثیر سرعت اولیه متقارن قرار می‌گیرد که در مرکز نمونه در دایره‌ای با شعاع ۰/۴ متر اعمال می‌شود. پایین نمونه در جهت عمودی محدود شده است. برای ایجاد سرعت اولیه متناسب با شرایط مرزی، توزیع سرعت به‌عنوان تابعی از ارتفاع با استفاده از رابطه $-10\frac{Z}{H}$ اعمال می‌شود. رفتار ماده نئوهوکین با مدول یانگ ۵۰/۰۵ کیلو پاسکال و نسبت پواسون ۰/۴۹۹ برای دستیابی به شرایط تقریباً تراکم ناپذیر استفاده می‌شود. علاوه بر این، چگالی اولیه جسم ۱۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب است. با توجه به تقارن هندسه و بارگذاری، تنها یک‌چهارم نمونه شبیه‌سازی شده و شرایط مرزی مناسب برای حفظ تقارن اعمال شده است. مراحل مختلف تغییر شکل نمونه همراه با توزیع فشار در شکل ۲ نشان داده شده است. واضح است که توزیع فشار یکنواخت است و با کمک پایدارکننده‌ای که در رابطه نگاشت حجم استفاده شده است، از ناپایداری فشار جلوگیری شده است. برای نشان دادن اثرات ناپایداری، نتایج به‌دست‌آمده از مدل پیشنهادی در کنار نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود مبتنی بر روابط سنتی جابه‌جایی با استفاده از المان‌های تتراهدرال خطی در پایان تغییر شکل، در شکل ۳ نشان داده شده است. تحلیل اجزای محدود به‌صورت صریح انجام شده و ناپایداری در توزیع فشار در روابط مبتنی بر جابه‌جایی (بدون روابط ترکیبی فشار–جابجایی در نرم‌افزار آباکوس یا بدون استفاده از المان‌های مرتبه بالا و انتگرال‌گیری کاهش‌یافته) را به وضوح نشان می‌دهد. برای بهبود نتایج حل به



شکل ۲. تغییر شکل نمونه پانچ در مراحل مختلف شبیه‌سازی به همراه کانتور فشار



شکل ۳. مقایسه توزیع فشار در نمونه پانچ. (الف) تحلیل با روش SPH (ب) تحلیل اجزای محدود مبتنی بر روابط جابجایی با المان‌های چهاروجهی خطی (ج) تحلیل اجزای محدود با المان‌های مکعبی با انتگرال‌گیری کاهش یافته

جدول ۱. متغیرهای ماده برای نمونه‌های لایه‌های شریانی

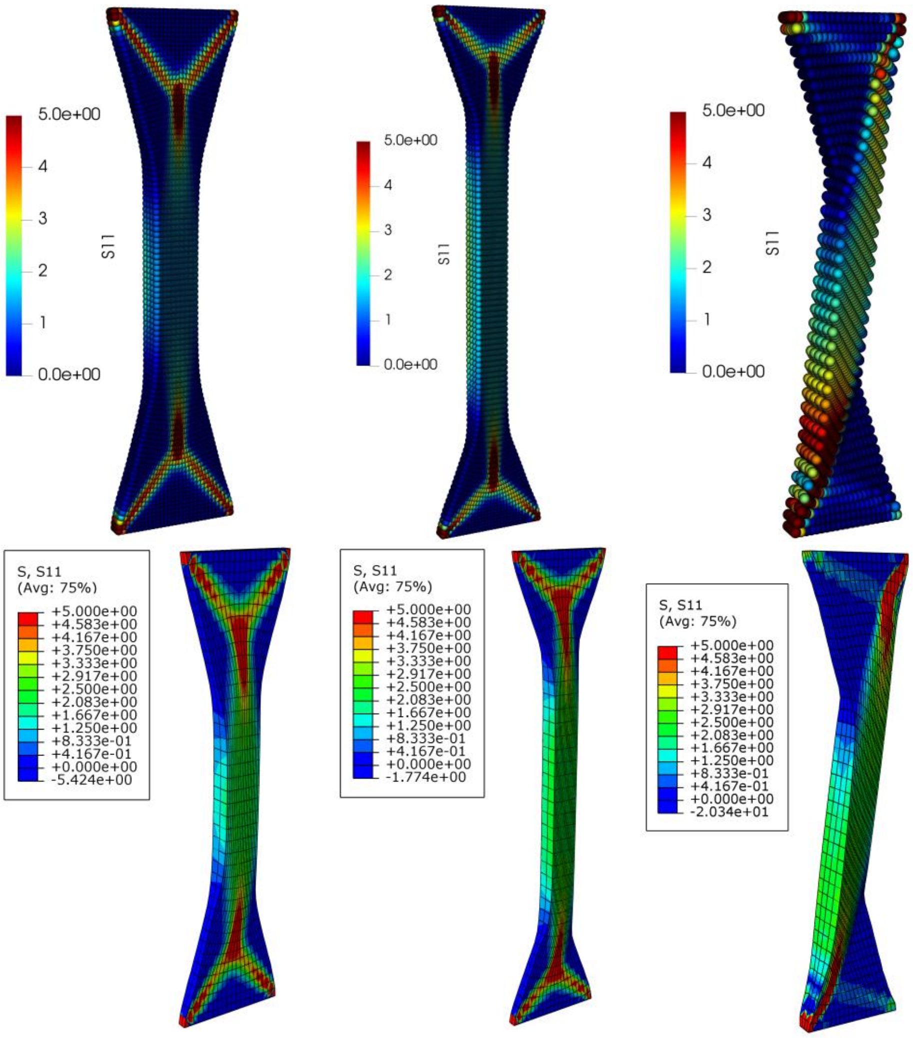
Sample	C (kPa)	K_1 (kPa)	K_2	Θ	D
محوری	۷/۶۴	۹۹۶/۶	۵۲۴/۶	۰	$۱۰^{-۷}$
محیطی	۷/۶۴	۹۹۶/۶	۵۲۴/۶	۹۰	$۱۰^{-۷}$
۱۵°	۷/۶۴	۹۹۶/۶	۵۲۴/۶	۱۵	$۱۰^{-۷}$

روش اجزای محدود با تغییر نوع المان از المان چهاروجهی هرمی با روابط بر پایه جابجایی به المان مکعبی با هشت گره با انتگرال‌گیری کاهش‌یافته، شبیه سازی مجددا تکرار شده و توزیع فشار بر روی نمونه تغییر شکل یافته در شکل ۳ آمده است. واضح است که در این حالت توزیع فشار تصحیح شده و عاری از حالت نوسانی است. البته همواره در مسائل پیچیده اولویت استفاده از المان‌های هرمی چهار وجهی است.

۶-۲- مدل‌سازی رفتار ناهمسانگرد لایه‌های شریانی

در این بخش، مدل‌سازی عددی رفتار ناهمسانگرد لایه‌های شریانی با استفاده از روش SPH و مدل ماده HGO تشریح شده است. این شبیه‌سازی توانایی رویکرد عددی پیشنهادی را برای مدل‌سازی دقیق پاسخ مکانیکی شریان‌های ایلیاک انسان نشان می‌دهد. زاویه بین جهت‌گیری الیاف و جهت محیطی برابر با ۴۹/۹۸ درجه تنظیم شده است. از این رو سه نوع آزمایش کششی برای لایه‌های شریانی شبیه‌سازی شده است که در جهت‌های محوری، محیطی و با زاویه ۱۵ درجه نسبت به جهت محیطی قرار دارند. متغیرهای رفتار ماده در جدول ۱، بر اساس مقاله مرجع [۷]، ارائه شده است. ابعاد نمونه، طبق پیشنهاد مرجع [۷] به طول ۱۰ میلی‌متر، عرض ۳ میلی‌متر و ضخامت ۰/۵ میلی‌متر تنظیم شده است. برای هر شبیه‌سازی، دو گروه الیاف در نظر گرفته شده است. برای بررسی تأثیر پخش الیاف، شبیه‌سازی‌ها برای هر نمونه با دو مقدار مختلف از متغیر پخش $\kappa = 0$ و $\kappa = 0.226$ انجام شده است. برای $\kappa = 0$ فرض می‌شود که الیاف به‌طور کامل هم‌راستا هستند. برای اعتبارسنجی نتایج عددی به‌دست‌آمده، از نرم‌افزار تجاری آباکوس در کنار شبیه‌سازی‌های SPH استفاده شده است. در تحلیل اجزای محدود با آباکوس، از المان‌های ترکیبی C3D8HR برای مدل‌سازی رفتار تراکم ناپذیر بهره گرفته شده است. این المان‌ها شامل هشت گره، انتگرال‌گیری عددی کاهش یافته با قابلیت کنترل مدهای بدون انرژی ساعت شنی و با روابط ترکیبی فشار–جابجایی هستند. در مقایسه توزیع متغیرها از دو روش عددی اجزای محدود و SPH لازم است که در نظر گرفته شود که در روش اجزای محدود متغیرهای میدان (مانند سرعت) در گره‌ها بدست می‌آیند ولی متغیرهای حالت (مانند تنش) در نقاط انتگرال‌گیری هستند. در حالی که در روش پیشنهادی تمامی متغیرهای در ذرات هستند.

شکل ۴ توزیع تنش کوشی را برای نمونه‌های قرار گرفته در جهت‌های محیطی، محوری و ۱۵ درجه تحت پخش ایده‌آل الیاف کلاژن $\kappa = 0$ نشان می‌دهد. در تمام شرایط بارگذاری، الیاف کلاژن به‌طور تدریجی با جهت بارگذاری هم‌راستا می‌شوند که باعث افزایش قابل توجه ظرفیت باربری بافت پس از هم‌راستایی می‌شود. توزیع ایده‌آل الیاف کلاژن $\kappa = 0$ نیاز به تغییرشکل بیشتر برای هم‌راستا شدن با جهت بارگذاری دارد که منجر به چرخش تدریجی الیاف به جهت بار می‌شود. در مقابل، طبیعت تراکم‌ناپذیر ماده، به همراه چرخش الیاف، منجر به افزایش ضخامت در ناحیه مرکزی نمونه و کاهش عرض آن می‌شود. در هر دو انتهای نمونه، شرایط مرزی اعمال‌شده در شبیه‌سازی از تغییرشکل جلوگیری می‌کند. نتایج نشان داده شده در شکل ۴، که از شبیه‌سازی‌های SPH و المان‌های محدود به‌دست‌آمده‌اند، تطابق خوبی دارند و دقت پیاده‌سازی و توانایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهند. نتایج با یافته‌های مرجع گزارش‌شده در [۷] مطابقت دارند. شکل ۵ توزیع تنش مؤثر را برای نمونه‌های محوری و محیطی با توزیع ایده‌آل الیاف، با استفاده از روش‌های

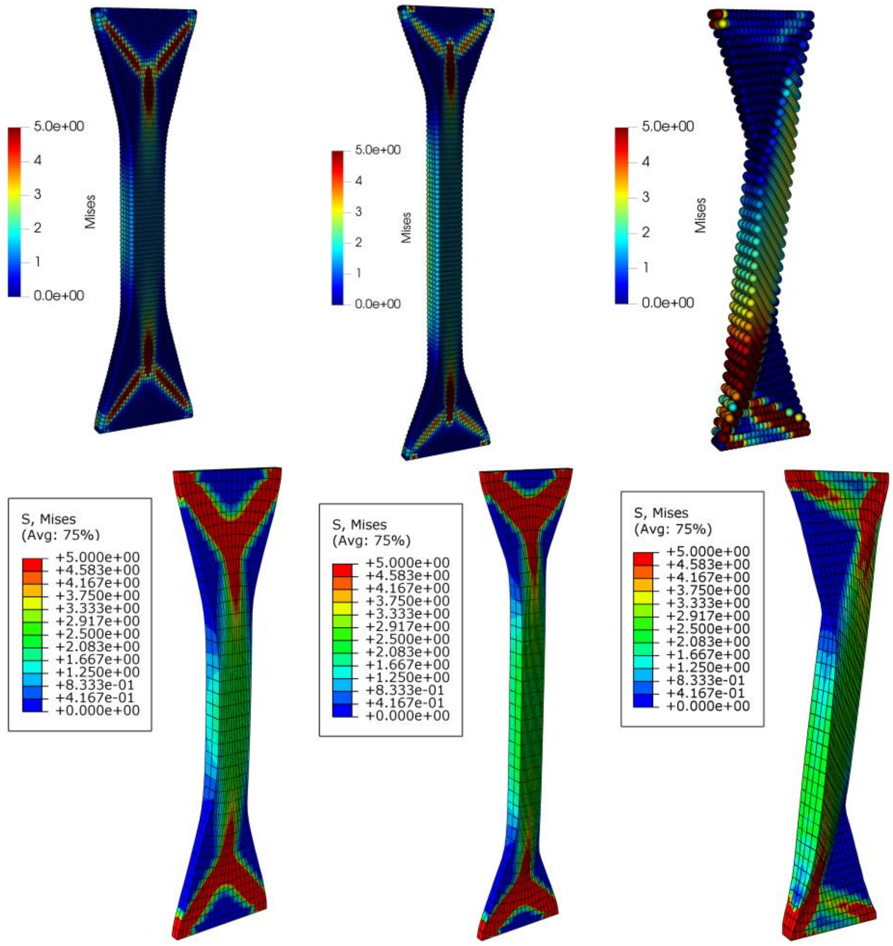


شکل ۴. توزیع تنش کوشی در نمونه‌ها با توزیع کلاژن ایده‌آل. نتایج SPH در ردیف بالایی و شبیه‌سازی‌های FE در ردیف پایینی برای نمونه‌های محوری، دوری و °۱۵ به ترتیب از چپ به راست هستند

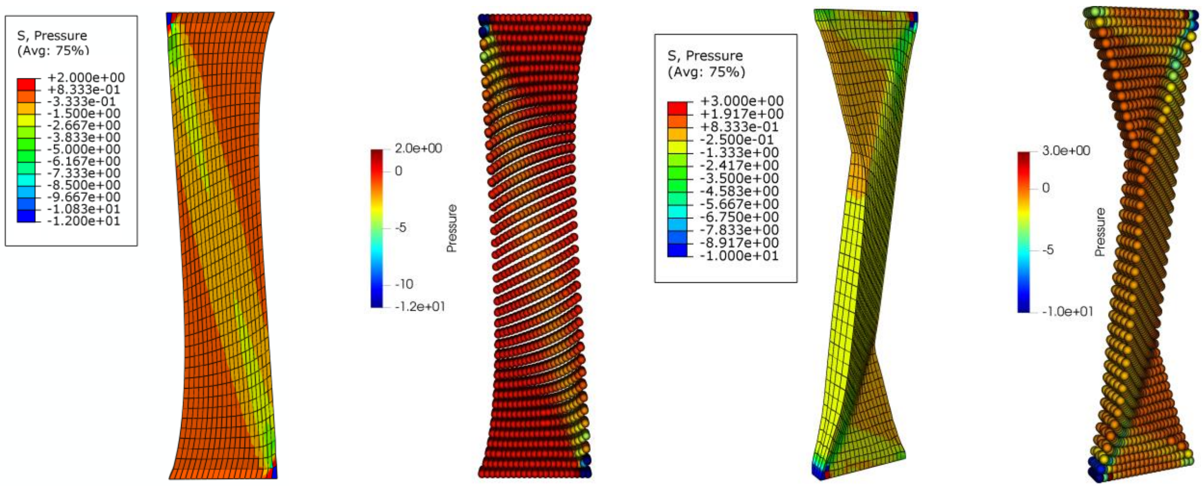
SPH و اجزای محدود مقایسه می‌کند. شکل ۶ توزیع فشار به‌دست‌آمده از هر دو روش را نشان می‌دهد. در هر دو رویکرد، توزیع فشار هموار بوده و از الگوهای شطرنجی عاری است که اثربخشی روش پیشنهادی را در شبیه‌سازی رفتار تراکم ناپذیر نشان می‌دهد.

شکل ۷ توزیع تنش مؤثر را در نمونه‌های محوری، محیطی و ۱۵ درجه برای $\kappa = 0.226$ نشان می‌دهد. برای این توزیع الیاف، هم‌راستایی الیاف با جهت بارگذاری با تغییر شکل کمتری رخ می‌دهد که منجر به توزیع ضخامت یکنواخت‌تری در سراسر نمونه‌ها و ناحیه انتقال کوچک‌تر در انتهای هر نمونه می‌شود.

نتایج تطابق خوبی را بین روش پیشنهادی و تحلیل اجزای محدود نشان می‌دهند. برای مقایسه کمی، منحنی‌های نیرو–جابجایی برای نمونه‌های محوری و محیطی با هر دو توزیع الیاف با شبیه‌سازی‌های اجزای محدود در شکل ۸ ارائه شده است. واضح است که در توزیع ایده‌آل، نمونه در ابتدا به‌طور نرم عمل می‌کند و تغییر شکل قابل توجهی قبل از افزایش نیرو به دلیل عملکرد الیاف کلاژن تجربه می‌کند. به‌طور کلی، هم‌راستایی منحنی‌های نیرو–جابجایی به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی با نتایج تحلیل اجزای محدود استفاده شده در نرم‌افزار آباکوس و مقالات

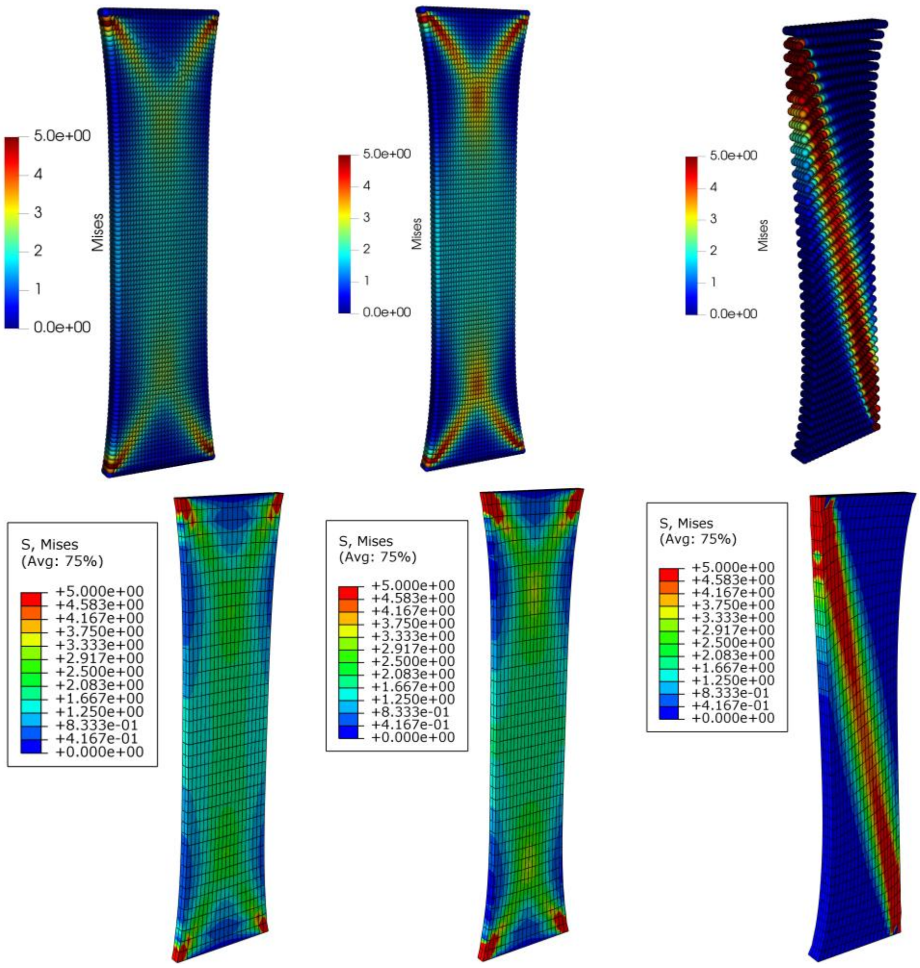


شکل ۵. توزیع تنش مؤثر در نمونه‌ها با توزیع کلاژن ایده‌آل $\kappa = 0$ نتایج SPH در ردیف بالایی و شبیه‌سازی‌های FE در ردیف پایینی برای نمونه‌های محوری، دوری و °۱۵ ، به ترتیب از چپ به راست هستند

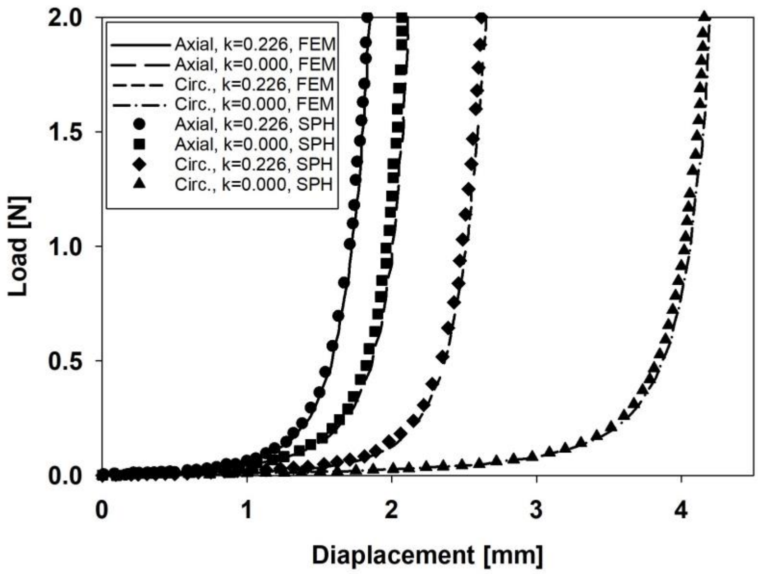


(الف) (ب) (ج) (د)

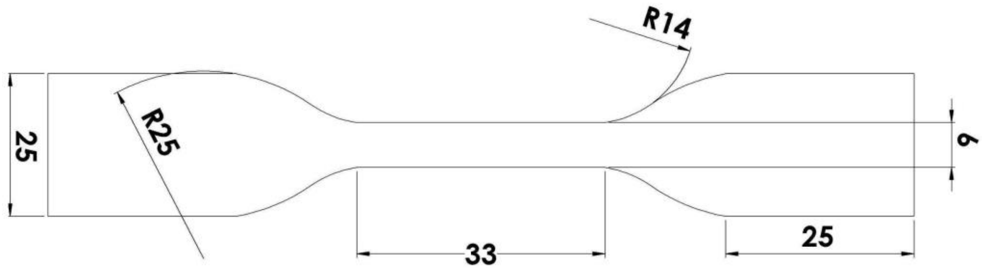
شکل ۶. توزیع فشار بر حسب مگا پاسکال برای نمونه °۱۵ برای $\kappa = 0$ (الف) با استفاده از روش SPH (ب) با روش FEM و برای $\kappa = 0.226$ (ج) با استفاده از روش SPH (د) با روش FEM



شکل ۷. توزیع تنش مؤثر در نمونه‌ها با $\kappa = 0.226$ نتایج SPH در ردیف بالایی و شبیه‌سازی‌های FE در ردیف پایینی برای نمونه‌های محوری، دوری و ۱۵°، به ترتیب از چپ به راست هستند



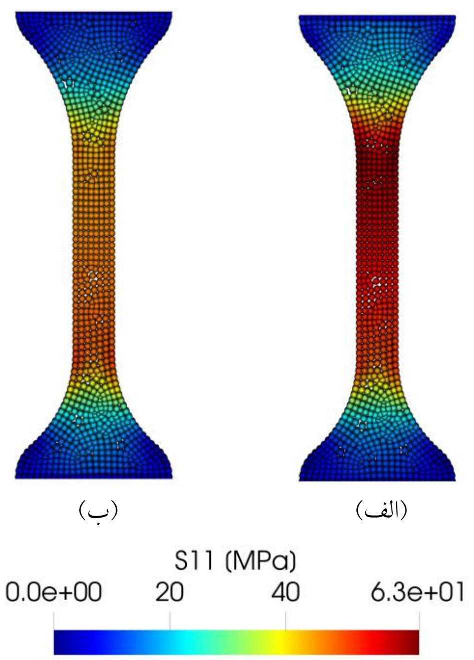
شکل ۸ . پاسخ‌های نیرو-جابجایی برای نمونه‌های محوری و محیطی به دست آمده از شبیه‌سازی‌های SPH و FEM



شکل ۹. ابعاد نمونه آزمایش کششی استاندارد ASTM D412 بر حسب میلی‌متر

جدول ۲. متغیرهای ماده برای نمونه‌های پوست

نمونه	C (MPa)	$K_۱$ (MPa)	$K_۲$	Θ	κ	D
موازی	۰/۱۰۰۷	۲۴/۵۳	۰/۱۳۲۷	۸۸	۰/۱۵۳۵	$۱۰^{-۷}$
عمدی	۰/۱۰۰۷	۲۴/۵۳	۰/۱۳۲۷	۰	۰/۱۴۵۹	$۱۰^{-۷}$
نامتقارن	۰/۱۰۰۷	۲۴/۵۳	۰/۱۳۲۷	۱۱۸	۰/۱۶۰۲	$۱۰^{-۷}$

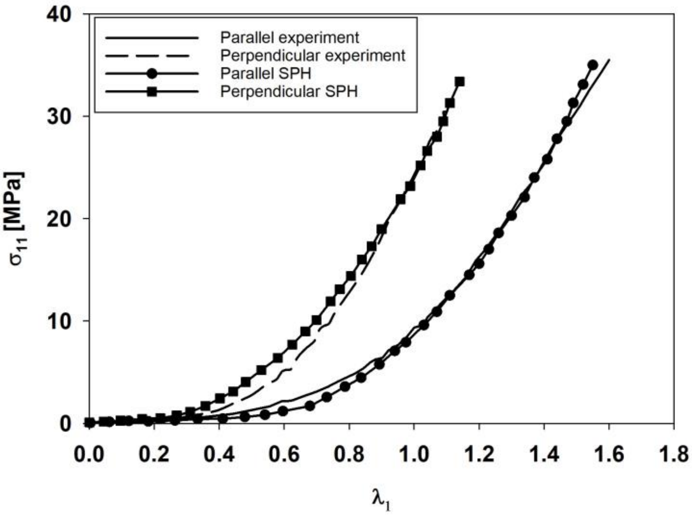


شکل ۱۰. توزیع تنش کوشی در نمونه‌های (الف) موازی و (ب) عمود نسبت به خطوط لانگر

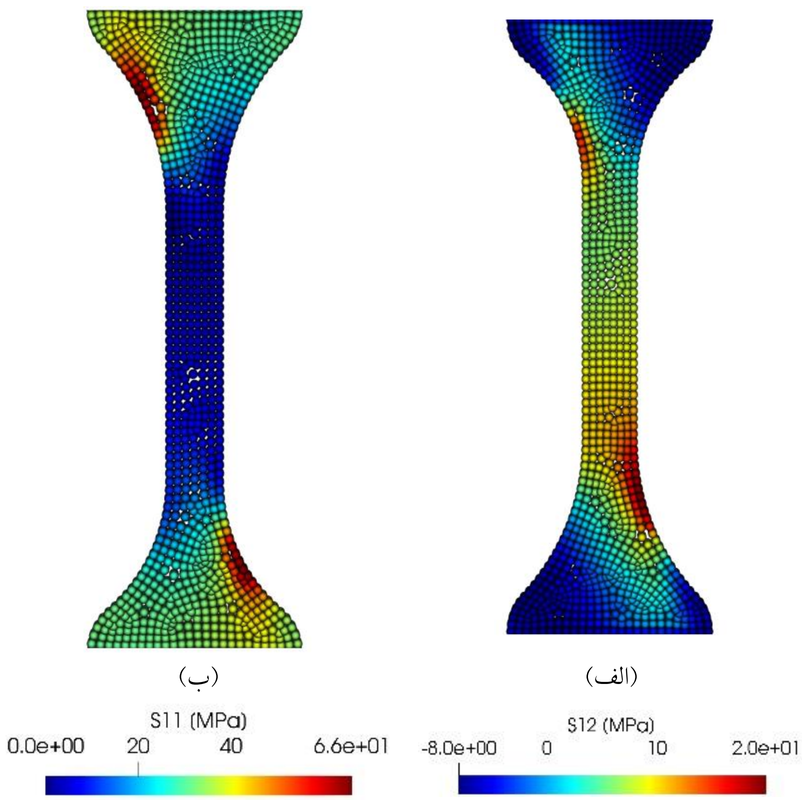
مرجع، اعتبار و دقت روش پیشنهادی و پیاده‌سازی آن را تأیید می‌کند.

۶-۳- مدل‌سازی رفتار ناهمسانگرد پوست

پوست نوع دیگری از بافت نرم است که در لایه‌های خود توسط الیاف کلاژن تقویت شده است. وجود الیاف کلاژن باعث می‌شود که پوست رفتار ناهمسانگرد از خود نشان دهد. آناید و همکاران [۴۸، ۴۹] رفتار مکانیکی ناهمسانگرد پوست انسان را مطالعه کرده‌اند. در این مطالعه، نتایج تجربی ارائه شده در مراجع [۴۸] و [۴۹] برای اعتبارسنجی مدل پیشنهادی و پیاده‌سازی آن استفاده شد. برای این منظور، نمونه‌هایی طبق استانداردهای ASTM D412 آماده شدند که ابعاد آن‌ها در شکل ۹ نشان داده شده است.

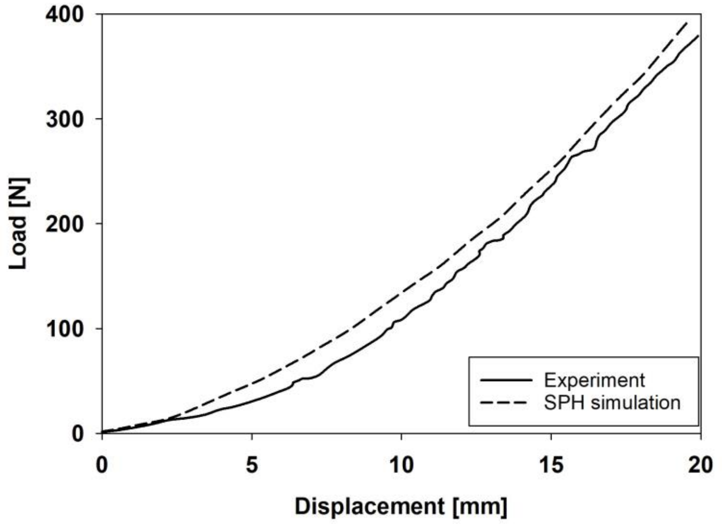


شکل ۱۱. مقایسه نتایج تجربی و شبیه‌سازی SPH برای تنش کوشی در پوست



شکل ۱۲. توزیع تنش در نمونه نامتقارن در پوست (الف) تنش عمودی و (ب) تنش برشی

ضخامت هر نمونه ۲/۲۵ میلی‌متر است. شبیه‌سازی‌ها برای سه نمونه با جهت‌گیری موازی، عمودی و نامتقارن با خطوط لانگر انجام شده است. بر اساس نتایج تجربی، زاویه بهینه γ برابر $41°$ در نظر گرفته شده و ضرایب رفتار ماده در جدول ۲ ارائه شده است. شکل ۱۰ توزیع تنش کوشی را هنگامی که تغییر شکل ۵۰ درصد است، برای نمونه‌های موازی و عمودی نشان می‌دهد.



شکل ۱۳. مقایسه منحنی‌های نیرو–جابجایی از شبیه‌سازی SPH و نتایج تجربی برای نمونه نامتقارن در پوست

حداکثر تنش کوشی برای هر نمونه بسته به جهت‌گیری نمونه نسبت به توزیع الیاف کلاژن متفاوت است، به طوری که تنش در نمونه موازی به‌طور قابل توجهی بیشتر از نمونه عمودی است. این امر ناشی از تغییر شکل مورد نیاز برای هم‌راستا شدن کولاژن با مسیر بارگذاری است. در شکل ۱۱ مقایسه کمی تغییرات تنش کوشی با نتایج تجربی گزارش‌شده، ارائه شده است. این شکل نشان می‌دهد که نتایج شبیه‌سازی SPH تطابق نزدیکی با یافته‌های تجربی دارند. نمونه سوم به‌گونه‌ای انتخاب شد که توزیع کلاژن آن نسبت به جهت بارگذاری نامتقارن باشد. از این رو، نتایج شبیه‌سازی نیز عدم تقارن در توزیع تنش کوشی را نشان می‌دهد. شکل ۱۲ توزیع تنش عمودی و تنش برشی به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی SPH نمونه نامتقارن را نشان می‌دهد. ظهور توزیع تنش برشی رفتار نامتقارن ماده نسبت به جهت بارگذاری را برجسته می‌کند. در نهایت، شکل ۱۳ منحنی نیروی–جابجایی نمونه نامتقارن را با نتایج تجربی مقایسه می‌کند. غیریکنواخت بودن تغییر شکل و توزیع متغیرها، چالش بیشتری برای مدل ایجاد کرده و هم‌خوانی بین نتایج تجربی و شبیه‌سازی عددی در این مورد بیانگر توانایی روش پیشنهادی در مدل‌سازی در چنین شرایطی است. نتایج به‌وضوح نشان می‌دهند که روش توسعه‌یافته SPH به‌طور مؤثر رفتار پوست را به‌عنوان یک بافت نرم با پاسخ ناهمسانگرد مدل‌سازی می‌کند.

۷- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، مدل هایپرالاستیک HGO با استفاده از روش بدون شبکه SPH پیاده‌سازی شد. برای رفع مشکل قفل‌شدگی حجمی یک مجموعه روابط ترکیبی در چارچوب تمام لاگرانژی در شکل بقای مرتبه اول گسترش داده شده و فرآیند گسسته سازی فضایی به روش بدون شبکه و گسسته سازی زمانی برای حل صریح تشریح شد. مشکل قفل شدگی حجمی ناشی از رفتار تراکم‌ناپذیر مواد هایپرالاستیک در فرآیند حلل عددی با در نظر گرفتن مولفه اتلاف در معادله ژاکوبین، برطرف شد که نتایج آزمون پانچ اهمیت این کار را بیان کرد. صحت مدل توسعه‌یافته از طریق بررسی مثال‌های مرجع در این زمینه، از جمله شبیه‌سازی شریان‌های ایلیاک انسانی و پوست، تأیید شد. در مدل‌سازی رفتارهای ناهمسانگرد، اثر جهت‌گیری کولاژه به عنوان تقویت کننده و میزان پخش آن مدل‌سازی شد. مقایسه با نتایج اجزای محدود به‌دست‌آمده از نرم‌افزار آباکوس و داده‌های تجربی نشان داد که

مدل SPH به‌طور مؤثر قادر است تغییر شکل‌های بزرگ مواد با رفتار پیچیده ناهمسانگرد در شرایط تراکم‌ناپذیر را شبیه‌سازی کند. این پژوهش قابلیت روش SPH را برای مدل‌سازی دقیق رفتار بافت‌های نرم نشان می‌دهد.

منابع

References

[1] Schröder, J., and Neff, P., "Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 2, pp. 401-445, 2003.

[2] Balzani, D., Neff, P., Schröder, J., and Holzapfel, G. A., "A polyconvex framework for soft biological tissues. Adjustment to experimental data", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 20, pp. 6052-6070, 2006.

[3] Schröder, J., Neff, P., and Ebbing, V., "Anisotropic polyconvex energies on the basis of crystallographic motivated structural tensors", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 56, No. 12, pp. 3486-3506, 2008.

[4] Itskov, M. and Aksel, N., "A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function", International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, No. 14, pp. 3833-3848, 2004.

[5] Schröder, J., Neff, P., and Balzani, D., "A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity", International Journal of Solids and Structures, Vol. 42, No. 15, pp. 4352-4371, 2005.

[6] Holzapfel, G. A., "Arterial Tissue in Health and Disease: Experimental Data, Collagen-Based Modeling and Simulation, Including Aortic Dissection," in Biomechanical Modelling at the Molecular, Cellular and Tissue Levels, G. A. Holzapfel and R. W. Ogden Eds. Vienna: Springer Vienna, 2009, pp. 259-344.

[7] Gasser, T. C., Ogden, R. W., and Holzapfel, G. A., "Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations", Journal of The Royal Society Interface, Vol. 3, No. 6, pp. 15-35, 2006.

[32] Ren, J. S., "Effects of dispersion of fiber orientation on the mechanical property of the arterial wall", J Theor Biol, Vol. 301, pp. 153-60, 2012.

[8] Grytz, R. and Meschke, G., "Constitutive modeling of crimped collagen fibrils in soft tissues", Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, Vol. 2, No. 5, pp. 522-533, 2009.

[10] Nolan, D. R., Gower, A. L., Destrade, M., Ogden, R. W., and McGarry, J. P., "A robust anisotropic hyperelastic formulation for the modelling of soft tissue", J Mech Behav Biomed Mater, Vol. 39, pp. 48-60, 2014.

[11] Skacel, P. and Bursa, J., "Comparison of constitutive models of arterial layers with distributed collagen fibre orientations", Acta Bioeng Biomech, Vol. 16, No. 3, pp. 47-58, 2014.

[12] Weisbecker, H., Unterberger, M. J., and Holzapfel, G. A., "Constitutive modelling of arteries considering fibre recruitment and three-dimensional fibre distribution", J R Soc Interface, Vol. 12, No. 105, 2015.

[13] Pranavi, D., Steinmann, P., and Rajagopal, A., "A unifying finite strain modeling framework for anisotropic mixed-mode fracture in soft materials", Computational Mechanics, Vol. 73, No. 1, pp. 123-137, 2024.

[14] Chittajallu, S., Richhariya, A., Tse, K. M., and Chinthapenta, V., "A Review on Damage and Rupture Modelling for Soft Tissues", Bioengineering (Basel), Vol. 9, No. 1, 2022.

[15] Gil, A. J. and Ortigosa, R., "A new framework for large strain electromechanics based on convex multi-variable strain energies: Variational formulation and material characterisation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 302, pp. 293-328, 2016.

[16] Doll, S., Schweizerhof, K., Hauptmann, R., and Freischläger, C., "On Volumetric locking of low-order solid and solid-shell elements for finite elastoviscoplastic deformations and selective reduced integration", Engineering Computations, Vol. 17, No. 7, pp. 874-902, 2000.

[17] Simo, J. C. and Rifai, M. S., "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, No. 8, pp. 1595-1638, 1990.

[18] Hughes, T. J. R., "Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, No. 9, pp. 1413-1418, 1980.

[19] Sussman, T. and Bathe, K.-J., "A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis", Computers & Structures, Vol. 26, No. 1, pp. 357-409, 1987.

[20] Bathe, K.-J. and Dvorkin, E. N., "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, No. 2, pp. 367-383, 1985.

[21] Neto, E. A. d. S., Pires, F. M. A., and Owen, D. R. J., "F-bar-based linear triangles and tetrahedra for finite strain analysis of nearly incompressible solids. Part I: formulation and benchmarking", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 62, No. 3, pp. 353-383, 2005.

[22] de Souza Neto, E. A., Peric, D., Owen, D. R. J., "Finite Strain Hyperelasticity," in Computational Methods for Plasticity, 2008, pp. 517-571.

[23] Bonet J, Wood R., "HYPERELASTICITY," in Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, J. Bonet and R. D. Wood Eds., 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008, pp. 155-187.

[24] Schröder, J., Wriggers, P., and Balzani, D., "A new mixed finite element based on different approximations of the minors of deformation tensors", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 200, No. 49, pp. 3583-3600, 2011.

[25] Bonet, J., Gil, A. J., Lee, C. H., Aguirre, M., and Ortigosa, R., "A first order hyperbolic framework for large strain computational solid dynamics. Part I: Total Lagrangian isothermal elasticity", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 283, pp. 689-732, 2015.

[26] Hesch, C. et al., "A framework for polyconvex large strain phase-field methods to fracture", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 317, pp. 649-683, 2017.

[27] Gil, A. J., Lee, C. H., Bonet, J., and Ortigosa, R., "A first order hyperbolic framework for large strain computational solid dynamics. Part II: Total Lagrangian compressible, nearly incompressible and truly incompressible elasticity", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 300, pp. 146-181, 2016.

[28] Haider, J., Lee, C. H., Gil, A. J., and Bonet, J., "A first-order hyperbolic framework for large strain computational solid dynamics: An upwind cell centred Total Lagrangian scheme", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 109, No. 3, pp. 407-456, 2017.

[29] Vidal, Y., Bonet, J., and Huerta, A., "Stabilized updated Lagrangian corrected SPH for explicit dynamic problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 69, No. 13, pp. 2687-2710, 2007.

[30] Lee, C. H., Gil, A. J., and Bonet, J., "Development of a cell centred upwind finite Volume algorithm for a new conservation law formulation in structural dynamics", Computers & Structures, Vol. 118, pp. 13-38, 2013.

[31] Lee, C. H., Gil, A. J., and Bonet, J., "Development of a stabilised Petrov–Galerkin formulation for conservation laws in Lagrangian fast solid dynamics", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 268, pp. 40-64, 2014.

[32] Lee, C. H., Gil, A. J., Greto, G., Kulasegaram, S., and Bonet, J., "A new Jameson–Schmidt–Turkel Smooth Particle Hydrodynamics algorithm for large strain explicit fast dynamics", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 311, pp. 71-111, 2016.

[33] Gil, A. J., Lee, C. H., Bonet, J., and Aguirre, M., "A stabilised Petrov–Galerkin formulation for linear tetrahedral elements in compressible, nearly incompressible and truly incompressible fast dynamics", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 276, pp. 659-690, 2014.

[34] Lee, C. H., Gil, A. J., Hassan, O. I., Bonet, J., and Kulasegaram, S., "A variationally consistent Streamline Upwind Petrov–Galerkin Smooth Particle Hydrodynamics algorithm for large strain solid dynamics", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 318, pp. 514-536, 2017.

[35] Lee, C. H., Gil, A. J., Ghavamian, A., and Bonet, J., "A Total Lagrangian upwind Smooth Particle Hydrodynamics algorithm for large strain explicit solid dynamics", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 344, pp. 209-250, 2019.

[36] Badnava, H., Lee, C. H., Nourbakhsh, S. H., and Refachinho de Campos, P. R., "A stabilised Total Lagrangian Element-Free Galerkin method for transient nonlinear solid dynamics", Computational Mechanics, 2024.

[37] de Campos, P. R. R., Gil, A. J., Lee, C. H., Giacomini, M., and Bonet, J., "A New Updated Reference Lagrangian Smooth Particle Hydrodynamics algorithm for isothermal elasticity and elasto-plasticity", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 392, p. 114680, 2022.

[38] Ghavamian, A., Lee, C. H., Gil, A. J., Bonet, J., Heuzé, T., and Stainier, L., "An entropy-stable Smooth Particle Hydrodynamics algorithm for large strain thermo-elasticity", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 379, p. 113736, 2021.

[39] Badnava, H., "Modeling metal forming processes using an Updated Lagrangian smoothed particle hydrodynamics method", Journal of Manufacturing Innovations, Vol. 1, No. 2, pp. 17-27, 2023.

[40] Ghadampour, Z., Hashemi, M. R., taleb beydokhti, N., Hossein Nikseresht, A., “Comparison of two projection methods in SPH for modeling flow under a gate”, Journal of Computational Methods in Engineering, Vol. 31, No. 2, pp. 79-97, 2013. (In Farsi).

[41] Edalati, H., Soltani, B., “Analysis of Thin Isotropic and Orthotropic Plates with Element-Free Galerkin

Method and Various Geometric Shapes", Journal of Computational Methods in Engineering, Vol. 34, No. 2, pp. 143-157, 2016. (In Farsi).

[42] Heidargheitaghi, F. F., Ghadiri Rad, M. H., Kazemi, M., "Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns Subjected to Non-Uniform Loading Using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method", Journal of Computational Methods in Engineering, Vol. 40, No. 2, pp 39-56, 2022. (In Farsi).

[43] Hassan, O. I., Ghavamian, A., Lee, C. H., Gil, A. J., Bonet, J., and Auricchio, F., "An upwind vertex centred finite Volume algorithm for nearly and truly incompressible explicit fast solid dynamic applications: Total and Updated Lagrangian formulations", Journal of Computational Physics: X, Vol. 3, p. 100025, 2019.

[44] Bonet, J. and Kulasegaram, S., "Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, No. 6, pp. 1189-1214, 2000.

[45] Abd. Karim, I., Hean Lee, C., J. Gil, A., and Bonet, J., "A two-step Taylor-Galerkin formulation for fast dynamics", Engineering Computations, Vol. 31, No. 3, pp. 366-387, 2014.

[46] Holzapfel, G. A., Niestrawska, J. A., Ogden, R. W., Reinisch, A. J., and Schriefl, A. J., "Modelling non-symmetric collagen fibre dispersion in arterial walls", J R Soc Interface, Vol. 12, No. 106, 2015.

[47] Holzapfel, G. A., Ogden, R. W., and Sherifova, S., "On fibre dispersion modelling of soft biological tissues: a review", Proc Math Phys Eng Sci, Vol. 475, No. 2224, p. 20180736, 2019.

[48] Ní Annaidh, A., Bruyère, K., Destrade, M., Gilchrist, M. D., and Otténio, M., "Characterization of the anisotropic mechanical properties of excised human skin", Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, Vol. 5, No. 1, pp. 139-148, 2012.

[49] Ní Annaidh, A. et al., "Automated Estimation of Collagen Fibre Dispersion in the Dermis and its Contribution to the Anisotropic Behaviour of Skin", Annals of Biomedical Engineering, Vol. 40, No. 8, pp. 1666-1678, 2012.