



On the Use of Error Weight Function in the Numerical Solution of Nonlocal Problems Using the Finite Element Method

Ali Gerami , Mohammad Silani * and Mahdi Javanbakht

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan 8415683111, Iran

Abstract: Various functions can serve as weight functions in the numerical solution of nonlocal problems, including the error function. The value of the error function at a given point depends on the nonlocal parameter and the distance from the target point. To reduce computational costs in numerical procedures, interactions are often neglected between the points with a distance above a specific radius (interaction radius). Consequently, a relationship between the radius and the nonlocal parameter in the error function is established to determine the optimal interaction radius. Due to the widespread utilization of the finite element method in the solution of non-local problems, and considering application of the integral value of the weight function in two-phase kernels, the effect of element size on the calculation of the integral value is investigated. The findings indicate that, due to discretization, the error in calculating the integral value of the weight function increases as the ratio of the element size to the nonlocal parameter grows. This can result in an integral value exceeding 1, thereby violating the normalization condition of the weight function.

Keywords: Nonlocal theory, Nonlocal weight function, Nonlocal kernel, Error function, Integral of weight function

Received: Aug. 30, 2025; Revised: Oct. 10, 2025; Accepted: Nov. 11, 2025; Published Online: Dec. 21, 2025.

* Corresponding Author: silani@iut.ac.ir

How to Cite: Gerami Ali, Silani Mohammad, Javanbakht Mahdi, On the use of error weight function in the numerical solution of nonlocal problems using the finite element method, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 44(2), 151-165; DOI: 10.47176/jcme.44.2.1062





استفاده از تابع وزن خطا در حل عددی مسائل غیرمحلّی با استفاده

از روش اجزای محدود

علی گرامی^{ID}، محمد سیلانی^{ID*}، مهدی جوان بخت^{ID}

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، صندوق پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱

چکیده - تابع‌های مختلفی به عنوان تابع وزن در حل عددی مسائل غیرمحلّی استفاده می‌شوند که تابع خطا یکی از آن‌ها است. مقدار تابع خطا در یک نقطه، وابسته به پارامتر غیرمحلّی و فاصله تا نقطه هدف است. برای کاهش هزینه محاسباتی در حل عددی، اثر متقابل نقاطی که فاصله‌شان بیشتر از یک شعاع مشخص (شعاع برهم‌کنش) است، معمولاً در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین، با هدف تعیین شعاع برهم‌کنش بهینه، یک ارتباط بین این شعاع و پارامتر غیرمحلّی در تابع خطا به دست آمد. با توجه به کاربرد گسترده روش اجزای محدود در حل مسائل غیرمحلّی و کاربرد مقدار انتگرال تابع وزن در کرنل‌های دوفازی، تاثیر اندازه المان در مقدار این انتگرال بررسی شد. یافته‌ها نشان می‌دهد که به دلیل گسسته‌سازی، با افزایش نسبت اندازه المان به پارامتر غیرمحلّی، خطا در محاسبه مقدار انتگرال تابع وزن افزایش می‌یابد. این موضوع می‌تواند منجر به مقدار انتگرال بیش از یک شود و در نتیجه شرط بهنجارشدن تابع وزن را نقض کند.

واژه‌های کلیدی: تنوری غیرمحلّی، تابع وزن غیرمحلّی، کرنل غیرمحلّی، تابع خطا، انتگرال تابع وزن.

دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۶/۰۸، بازنگری: ۱۴۰۴/۰۷/۱۸، پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۱۹، اولین انتشار: ۱۴۰۴/۰۹/۳۰

* نویسنده مسئول، رایانامه: silani@iut.ac.ir



فهرست علائم

علائم لاتین	نام	علائم یونانی	نام
dA	دیفرانسیل سطح	γ	مقدار انتگرال تابع وزن (یا تابع خطا)
dr	دیفرانسیل طول	η	نسبت اندازه المان به پارامتر غیرمحلی
dV	دیفرانسیل حجم	$d\theta$	دیفرانسیل زاویه
I	تعداد کل نقاط انتگرال گیری	τ	پارامتر غیرمحلی
k	تابع خطا		
r	طول فاصله هر نقطه دلخواه تا نقطه هدف		
R	شعاع برهم کنش		
V	حجم زیر نمودار تابع خطا		

۱- مقدمه

نظریه مکانیک محیط‌های پیوسته، پدیده‌های بزرگ مقیاس را توصیف می‌کند و جزئیات ریزساختاری مواد را نادیده می‌گیرد [۱]. این نظریه، یک ماده جامد را متشکل از چندین مجموعه بسیار کوچک در نظر می‌گیرد که می‌توان آن‌ها را به صورت مستقل توصیف کرد و فقط از طریق معادلات تعادل با یکدیگر تعامل دارند. اما در واقعیت، مواد به دلیل این‌که از اتم‌ها و مولکول‌ها تشکیل شده‌اند، ساختارهایی گسسته هستند. اساساً فرض محیط پیوسته ایده‌آل یک تقریب است و ماده به خاطر وجود عیوب اولیه یا بروز ریزترک‌ها و ریزحفره‌ها^۱ هنگام بارگذاری، یک رفتار گسسته دارد [۲]. برای رفع این عیب، نظریه‌های غیرمحلی مکانیک محیط پیوسته معرفی شدند که الاستیسیته غیرمحلی [۳-۶]، پلاستیسیته غیرمحلی [۷-۹] و آسیب غیرمحلی [۷، ۱۳-۱۰] از پرکاربردترین آن‌ها هستند. تئوری‌های غیرمحلی کاربردهای گسترده‌ای به ویژه در تیرها [۱۴]، مواد مدرج تابعی^۲ [۱۵-۱۷]، نانو ساختارها همچون نانوتیرها [۱۵، ۲۳-۱۸]، نانو صفحات [۲۴] و نانولوله‌ها [۱۷، ۲۱ و ۲۵] و همچنین در حوزه‌هایی نظیر مکانیک شکست [۲۶-۲۸] دارند.

در تئوری محلی، یک پارامتر ماده در نقطه‌ای از جسم، تنها تابع یک یا چند پارامتر دیگر در همان نقطه است؛ مثلاً، تنش در یک نقطه تابع کرنش در همان نقطه است. ولی در تئوری غیرمحلی، یک پارامتر ماده در نقطه‌ای از جسم، تابع میانگین وزنی یک یا چند پارامتر دیگر در نقاط اطراف است. به طور مثال، تنش در یک نقطه تابع میانگین وزنی کرنش در همان نقطه و نقاط اطراف است. بنابراین، برای پیاده‌سازی روابط غیرمحلی، یک تابع وزن نیاز است که ویژگی‌های آن عبارت است از [۴]:

- ۱- مقدار بیشینه آن در نقطه هدف (مرکز تابع) است و با دور شدن از این نقطه، مقدار آن به صفر نزدیک می‌شود.
- ۲- در کل دامنه خود نامنفی و نسبت به نقطه هدف، متقارن است.
- ۳- با انتگرال گیری از تابع روی یک دامنه بی‌نهایت، شرط بهنجار شدن ارضا می‌شود (یعنی مقدار انتگرال تابع برابر با یک می‌شود).

تابع‌های مختلفی به عنوان تابع وزن استفاده می‌شوند؛ که، تابع خطا^۳ یکی از توابع پرکاربرد در میان آن‌ها است [۴، ۳۱-۲۹]. همچنین، تابع زنگوله‌ای شکل^۴ [۳۱]، تابع توزیع گاوس^۵ [۳۲] و تابع هلمهولتز^۶ [۳۳] برخی دیگر از آن‌ها هستند. تمام این تابع وزن‌ها، ویژگی‌های بیان شده را دارند و به طور کلی، برای حل

استفاده از نرم افزار آباکوس^{۱۰} و تابع خطا به عنوان تابع وزن، برای بررسی این موارد استفاده شده است. در بخش ۲، تابع خطا و محاسبه انتگرال آن در دو حالت پیوسته و گسسته بیان می شود. رابطه ای بین پارامتر غیرمحلّی در تابع خطا و شعاع برهم کنش با در نظر گرفتن ۱٪ خطا در محاسبه انتگرال تابع وزن، در بخش ۳ به دست آمده است. اما این به تنهایی تضمین کننده صحت محاسبه انتگرال تابع خطا نیست. بنابراین تاثیر اندازه امان بر صحت این محاسبه، در بخش ۴ مورد بررسی قرار می گیرد.

۲- روابط حاکم

۲-۱- تابع وزن غیرمحلّی

برای محاسبه یک میدان غیرمحلّی از تابع وزن غیرمحلّی استفاده می شود. در یک دامنه نامتناهی، مقدار تابع وزن به فاصله بین هر نقطه دلخواه (x', y') و نقطه هدف (x, y) بستگی دارد. به عنوان مثال، تابع وزن می تواند به شکل تابع خطا [۲۹] طبق رابطه (۱) در نظر گرفته شود.

$$k(r, \tau) = \frac{1}{\pi\tau^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\tau^2}\right) \quad (1)$$

در این رابطه، پارامتر غیرمحلّی با τ و فاصله هر نقطه دلخواه تا نقطه هدف با r نشان داده شده است. شعاع برهم کنش (R) از مرکز تابع خطا تعیین می شود. مقدار تابع فقط برای نقاطی که درون این شعاع قرار دارند، محاسبه می گردد و برای نقاط بیرون از آن صفر در نظر گرفته می شود. بنابراین تابع خطا به شکل دوضابطه ای مطابق رابطه (۲) بازنویسی می شود.

$$k = \begin{cases} \frac{1}{\pi\tau^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\tau^2}\right) & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (2)$$

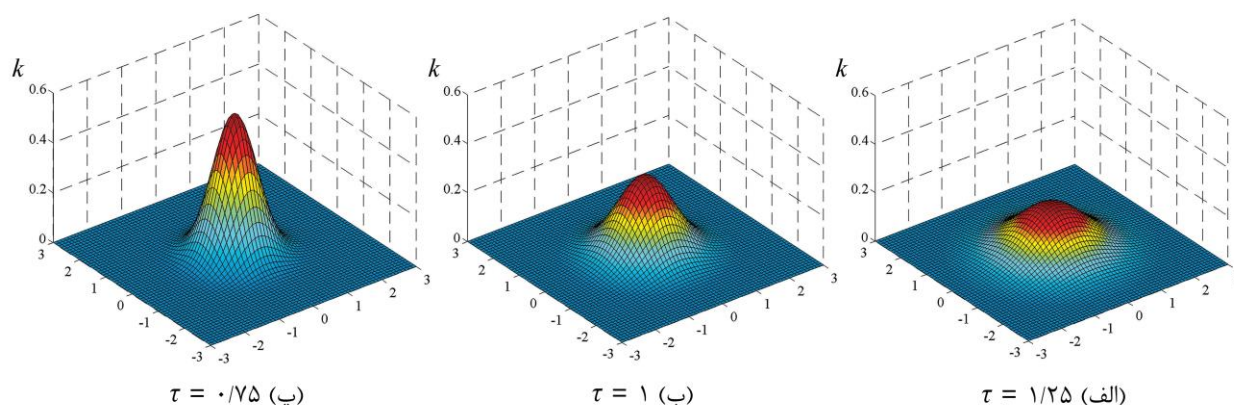
در شکل ۱، تابع خطا در یک دامنه دویبعی ۶ در ۶ با سه τ مختلف ترسیم شده است. مقدار این تابع در مرکز دامنه، یعنی نقطه هدف، بیشینه است و در نقاط دور از آن، به صفر نزدیک می شود. همچنین با افزایش مقدار τ ، مقدار تابع در نقطه هدف کاهش

یک مسئله غیرمحلّی با تئوری غیرمحلّی می توان از هر کدام از آن ها استفاده کرد.

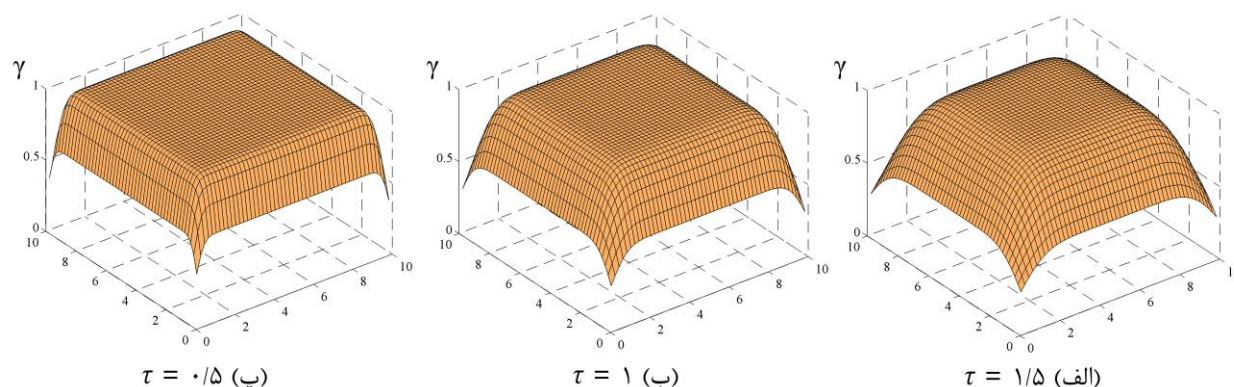
با دور شدن از نقطه مرکز (یا نقطه هدف)، برخی از این تابع ها به صفر میل می کنند؛ ولی، برخی دیگر به مقدار صفر می رسند. برای کاهش هزینه محاسباتی، به خصوص برای تابع های وزنی که به صفر میل می کنند، می توان از مقادیر نزدیک به صفر صرف نظر کرد. به عبارت دیگر، می توان تاثیر متقابل نقاط بیش از حد دور را در نظر نگرفت. برای این منظور، یک فاصله تاثیر یا شعاع برهم کنش^۷ (R) تعریف می گردد [۳۴، و ۳۵] و از اثر متقابل نقاطی که فاصله شان بیشتر از آن است، صرف نظر می شود. در نتیجه با حذف بخشی از تابع وزن، شرط بهنجار شدن نقض می شود. با تعیین مقدار مناسب R می توان خطا را به گونه ای کنترل کرد که مقدار انتگرال تابع، نزدیک به یک باشد. در این صورت، هم با محدود کردن تعداد نقاط اطراف، محاسبات عددی کاهش پیدا می کند و هم شرط بهنجار شدن با پذیرش خطای اندک برقرار می شود.

برای بهره مندی از مزیت های هر دو تئوری محلّی و غیرمحلّی، می توان یک کرنل شامل هر دو رفتار (کرنل دوفازی) تعریف کرد. در این کرنل، عبارت محلّی و عبارت غیرمحلّی با نسبت های مختلفی وابسته به نوع کرنل دوفازی، با هم ترکیب می شوند. در برخی از این کرنل های دوفازی، مانند کرنل دوفازی اصلاح شده^۸ [۳۶] و کرنل دوفازی جبران کننده^۹ [۳۷، و ۳۸]، در ضریب جمله محلّی از انتگرال تابع وزن (γ) استفاده می شود. در حل عددی، مقدار تابع وزن در تعداد نقاط محدودی محاسبه می شود و با استفاده از آن ها γ به دست می آید. در نتیجه، به علت خطای ناشی از گسسته سازی، γ به دست آمده با مقدار دقیق انتگرال متفاوت است.

همان طور که پیش از این بیان شد، یافتن شعاع برهم کنش مناسب که تاثیر کمی بر مقدار انتگرال تابع وزن داشته باشد و همچنین بررسی خطای ناشی از گسسته سازی در محاسبه آن، اهمیت زیادی در کاهش خطای حل عددی نسبت به حل تحلیلی دارد. در این پژوهش، از حل عددی اجزای محدود با



شکل ۱. ترسیم تابع خطا در مرکز یک دامنه ۶ در ۶ با سه پارامتر غیرمحمولی برابر با ۰/۷۵، ۱ و ۱/۲۵



شکل ۲. ترسیم تابع γ در یک دامنه ۱۰ در ۱۰، با استفاده از سه پارامتر غیرمحمولی برابر با ۰/۵، ۱ و ۱/۵ در تابع خطا

تابع خطا، ترسیم شده است.

در حل‌های عددی مانند روش اجزای محدود، تابع وزن در تعدادی نقاط محدود محاسبه می‌شود و بنابراین، مقدار γ نیز در این نقاط محاسبه می‌گردد. به بیان دیگر، در حل اجزای محدود به جای اینکه تابع در تمامی نقاط دامنه و به صورت پیوسته محاسبه گردد، فقط در نقاط انتگرال‌گیری و به صورت گسسته محاسبه می‌شود. شکل ۳، نمای کلی محاسبه تابع خطا به طور پیوسته در تمامی نقاط دامنه در مقابل محاسبه آن به طور گسسته در تعداد محدودی از نقاط را نشان می‌دهد. همچنین، شکل ۴ محاسبه تابع γ به صورت گسسته در یک دامنه ۱۰ در ۱۰ با اندازه المان یک برای سه τ برابر با ۰/۵، ۱ و ۱/۵ در تابع خطا را نشان می‌دهد. در شکل ۴ - (پ) مقادیر γ بیشتر از یک هستند که در

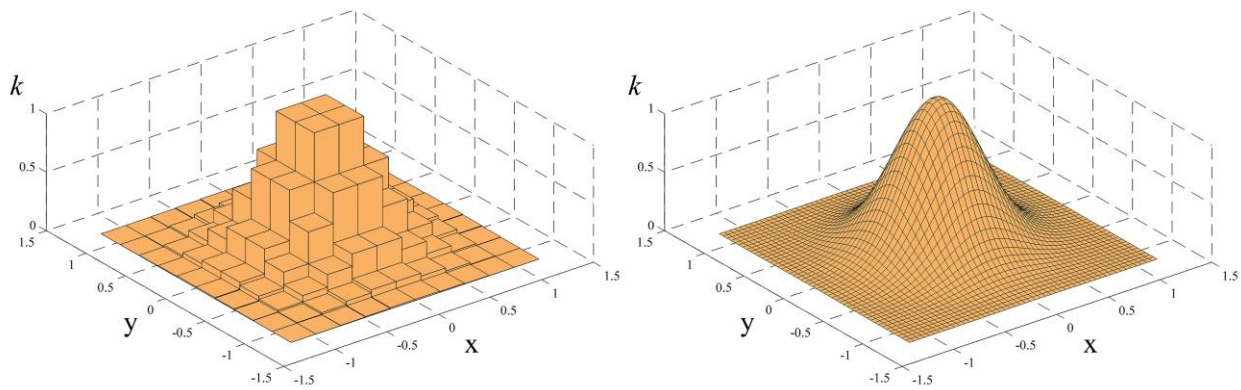
می‌یابد؛ در حالی که، در نقاط دور از آن افزایش می‌یابد و در نتیجه شکل تابع هموارتر می‌شود.

۲-۲- انتگرال تابع وزن

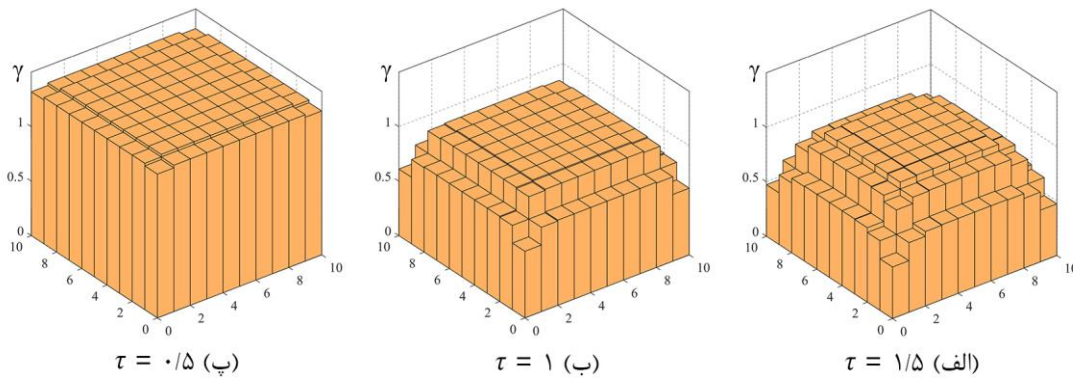
انتگرال تابع وزن (γ) یک تابع پیوسته کران‌دار با مقدار بین صفر تا یک است؛ که برای هر نقطه هدف، جداگانه محاسبه می‌شود. انتگرال تابع خطا در دامنه V از رابطه (۳) به دست می‌آید.

$$\gamma(x', y') = \int_V k(r, \tau) dV \quad (3)$$

در نواحی نزدیک مرز به دلیل خروج بخشی از تابع وزن به بیرون از دامنه، γ کمتر از یک می‌شود. همچنین در نواحی دور از مرز، γ تقریباً برابر با یک است. در شکل ۲، تابع γ در یک دامنه ۱۰ در ۱۰ با قراردادن سه مقدار τ برابر با ۰/۵، ۱ و ۱/۵ در



شکل ۳. مقایسه ترسیم تابع خطا به دو صورت الف- پیوسته، و ب- گسسته



شکل ۴. ترسیم تابع γ به صورت گسسته، در یک دامنه 10×10 با اندازه المان برابر با یک و با استفاده از سه پارامتر غیرمحل برابر با $1/5$ ، 1 و 0.5 در تابع خطا

فاصله در دو جهت x و y ، به صورت رابطه (۵) بازنویسی کرد. از نرم‌افزار متلب^{۱۱} برای محاسبه این انتگرال دوگانه استفاده شد.

$$\gamma(x', y') = \int_{-n\tau}^{n\tau} \int_{-n\tau}^{n\tau} k(|x' - x|, |y' - y|, \tau) dx dy \quad (4)$$

$$k(|x' - x|, |y' - y|, \tau) = \frac{1}{\pi\tau^2} \exp\left(-\frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{\tau^2}\right) \quad (5)$$

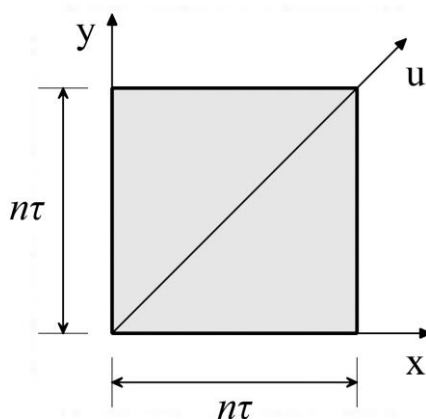
۲-۲-۲- محاسبه γ به صورت گسسته

در این روش، تابع وزن در تعداد نقاط محدود، که در مسائل اجزای محدود معادل نقاط انتگرال‌گیری هستند، تعریف می‌شود. در نتیجه رابطه انتگرالی (۴) با رابطه (۶) جایگزین می‌گردد.

بخش ۴ علت وقوع این خطا مورد بررسی قرار می‌گیرد. با هدف قابل‌استفاده‌بودن نتایج برای مسائل با ابعاد مختلف، اندازه المان و ابعاد مسئله به صورت ضربی از τ در نظر گرفته می‌شود و یک دامنه دوبعدی با ابعاد $n\tau \times n\tau$ مشابه شکل ۵ تعریف می‌گردد.

۲-۲-۱- محاسبه γ به صورت پیوسته

در این روش، تابع وزن در تمام دامنه تعریف می‌شود و مقدار γ در نقطه (x', y') با انتگرال‌گیری روی کل دامنه محاسبه می‌گردد. به دلیل اینکه دامنه به صورت مربع با اندازه ضلع برابر با $n\tau$ تعریف شده است، از انتگرال‌گیری دوگانه طبق رابطه (۴) استفاده می‌شود. برای این منظور، تابع خطا را می‌توان بر حسب τ و



شکل ۵. نمای کلی دامنه دو بعدی مورد استفاده برای محاسبه γ

$$dV = k(r, \tau) r d\theta dr \quad (7)$$

در ادامه، با استفاده از رابطه‌های (۲) و (۷) حجم زیر نمودار تابع خطا (V) مطابق رابطه (۸) برحسب R و τ استخراج می‌گردد.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \int_0^{2\pi} k(r, \tau) r d\theta dr \\ &= \int_0^R 2\pi r k(r, \tau) dr \\ &= \int_0^R \frac{2r}{\tau^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\tau^2}\right) dr \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{\tau^2}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

سپس، نسبت R به τ برحسب V به دست می‌آید.

$$\frac{R}{\tau} = \sqrt{-\ln(1-V)} \quad (9)$$

مقدار V در $R = \infty$ ، برابر با یک است که از رابطه (۹) نیز قابل استخراج است. برای اطمینان از قرارگیری ۹۹٪ از حجم زیر تابع درون محدوده با شعاع R ، V برابر با ۰/۹۹ در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه، رابطه (۱۰) حاصل می‌گردد.

$$\frac{R}{\tau} = 2/146 \quad (10)$$

این نسبت، حدی برای R یا τ قابل قبول تعیین می‌کند. به عنوان مثال، اگر $\tau = 1$ باشد، آنگاه طبق این نسبت، کمترین مقدار R مجاز برای این که V حداقل ۰/۹۹ باشد، برابر با ۲/۱۴۶ است و یا اگر $R = 1$ باشد، بیشترین مقدار τ مجاز برای این که V حداقل

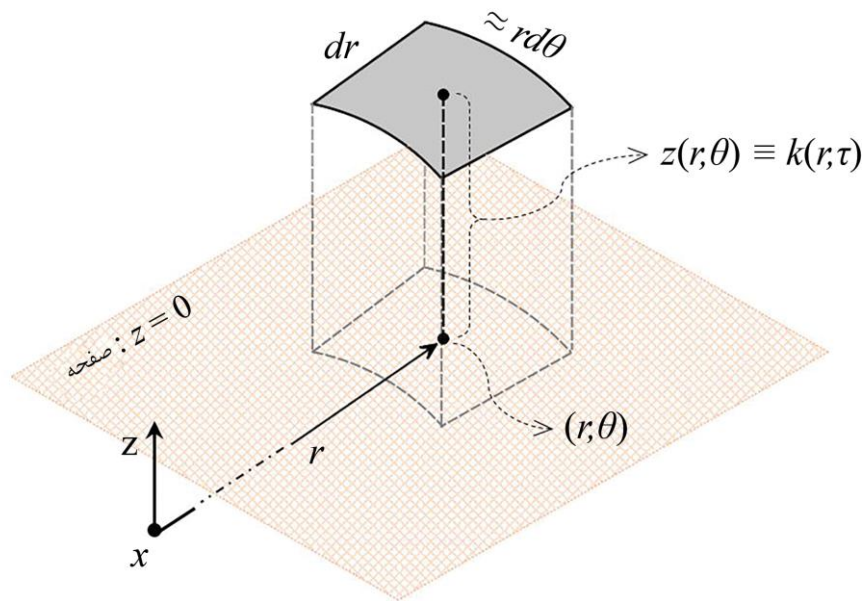
$$\gamma(x', y') = \sum_{i=1}^I k(|x' - x_i|, |y' - y_i|, \tau) dA_i \quad (6)$$

در این رابطه، I نشان‌دهنده تعداد نقاط انتگرال‌گیری و dA برابر با سطحی از دامنه است که به هر نقطه اختصاص دارد. به عنوان مثال، برای المانی که یک نقطه انتگرال‌گیری دارد، تمام مساحت المان به آن نقطه اختصاص می‌یابد. مختصات نقاط انتگرال‌گیری و سطح اختصاص‌یافته به هرکدام، با زیربرنامه URDFIL در نرم‌افزار آباکوس قابل استخراج است.

۳- ارتباط بین پارامتر غیرمحلی و شعاع برهم‌کنش

در تابع خطا

حجم زیر نمودار تابع خطا در دامنه بی‌نهایت برابر با یک است. اما با تعیین R ، دیگر دامنه بی‌نهایت نخواهد بود و در نتیجه، مقدار انتگرال تابع کمتر از یک خواهد بود. با فرض τ ثابت، با کاهش R مقدار انتگرال تابع کاهش می‌یابد و خطا در محاسبه γ بیشتر می‌شود. از آنجا که تابع نسبت به مرکز متقارن است و محدوده انتگرال‌گیری از نوع شعاعی است، انتگرال در مختصات استوانه‌ای تعریف می‌گردد. برای محاسبه این انتگرال به صورت عددی، باید حجم زیر تابع محاسبه شود. حجم کل، از مجموع المان‌های حجم به دست می‌آید. در شکل ۶، یک المان حجم نشان داده شده است؛ که، رابطه حاکم بر آن به صورت رابطه (۷) است.



شکل ۶. یک المان حجم زیر تابع خطا در فاصله r از نقطه هدف x (مبدأ دستگاه مختصات استوانه‌ای)

اندازه المان‌ها نسبت به مقدار τ خطا در محاسبه γ به حدی افزایش یافته است که مقدار γ در تمامی دامنه به بالای یک رسیده است. به همین دلیل، در این بخش تاثیر اندازه المان بر صحت مقدار γ بررسی می‌شود. دامنه مربعی با اندازه ضلع $n\tau$ (مطابق شکل ۵) با المان‌های مربعی هم‌اندازه، المان‌بندی می‌گردد و سپس γ در نقاط انتگرال‌گیری محاسبه می‌شود. به دلیل تقارن، نیاز به محاسبه γ در تمام نقاط انتگرال‌گیری نیست و فقط برای نقاطی که روی قطر دامنه (محور u در شکل ۵) قرار دارند، محاسبه می‌شود.

۴-۱- تاثیر اندازه المان بر صحت مقادیر γ با در نظر گرفتن

یک نقطه انتگرال‌گیری برای هر المان

در این بخش تاثیر اندازه المان‌بندی با المان‌های دارای یک نقطه انتگرال‌گیری بر صحت محاسبه γ بررسی و با نتایج انتگرال‌گیری که در بخش ۲-۲-۱ توضیح داده شد، مقایسه می‌شود. برای سادگی و تعمیم نتایج، ابتدا از المان‌بندی منظم با المان‌های مربعی هم‌اندازه، مطابق شکل ۷ استفاده می‌شود. بنابراین، کمترین فاصله نقاط انتگرال‌گیری با اندازه ضلع المان برابر خواهد بود.

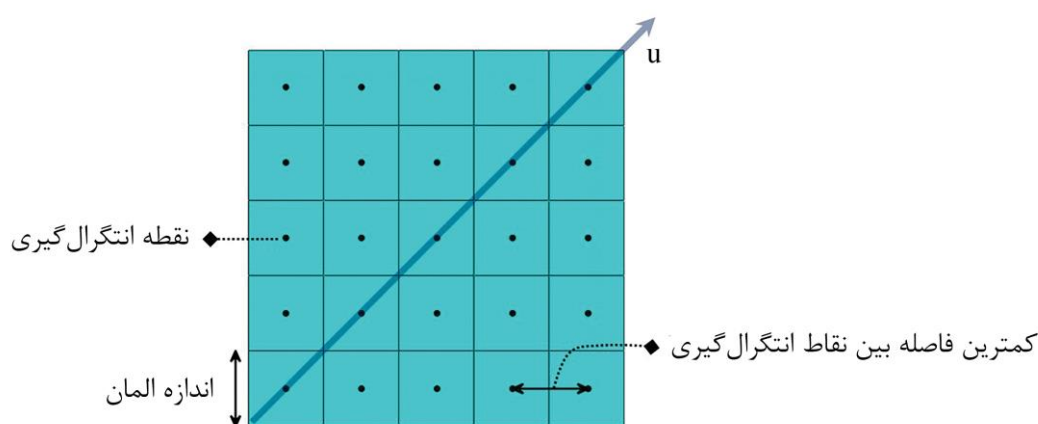
۰/۹۹ باشد، برابر با ۰/۴۶۵ است. به بیان دیگر، برای $V \geq 0.99$ (یعنی خطای کمتر)، رابطه (۱۰) تبدیل به یک نامساوی به صورت رابطه (۱۱) می‌شود.

$$R \geq 2/146 \tau \quad (11)$$

۴-۲- تاثیر اندازه المان بر صحت محاسبه انتگرال تابع

خطا (γ)

در بخش ۳، رابطه‌ای برای تعیین R مناسب بر حسب τ به دست آمد. اما این به تنهایی تضمین‌کننده محاسبه صحیح مقدار γ نیست. اندازه المان و تعداد نقاط انتگرال‌گیری درون آن بر فاصله بین نقاط انتگرال‌گیری تاثیر مستقیم دارد. همچنین با فرض تعداد نقطه انتگرال‌گیری معین در هر المان، با تغییر اندازه المان، تعداد نقاطی که در آن‌ها مقدار تابع خطا محاسبه می‌شود نیز تغییر می‌کند زیرا با بزرگ‌تر شدن المان‌ها، فاصله نقاط انتگرال‌گیری افزایش می‌یابد و در یک R معین، تابع در تعداد نقاط کمتری محاسبه می‌شود. این موضوع می‌تواند منجر به خطای عددی ناشی از گسسته‌سازی در محاسبه مقدار γ شود. به عنوان مثال، در شکل ۴ - پ، به دلیل بزرگ‌بودن



شکل ۷. نمای کلی المان بندی منظم با المان های مربعی دارای یک نقطه انتگرال گیری

شکل ۸، نمودار میله ای نتایج به دست آمده را نشان می دهد. در این نمودار، برای وابسته نبودن نتایج به مقدار τ ، نتایج بر حسب η ، که نشان دهنده نسبت اندازه المان به τ است، گزارش شده است. بر اساس این نمودار با افزایش η ، بیشترین خطا در مقادیر γ به دست آمده از روش گسسته، چه با اعمال $R = 2/146\tau$ و چه بدون اعمال آن، افزایش می یابد. همان طور که انتظار می رفت، با اعمال این مقدار از R ، همواره خطایی در حدود ۱٪ وجود دارد. در نتیجه، در حالت المان بندی با اندازه 0.5τ ($\eta = 0.5$) و کمتر، نمودار روندی مشابه حالت $R = \infty$ را طی نمی کند و در محدوده ۱٪ باقی می ماند. همچنین، مشاهده می شود که در نظر گرفتن این مقدار R ، باعث کاهش اندک خطای γ در هنگام استفاده از المان های بزرگ تر از 0.5τ شده است.

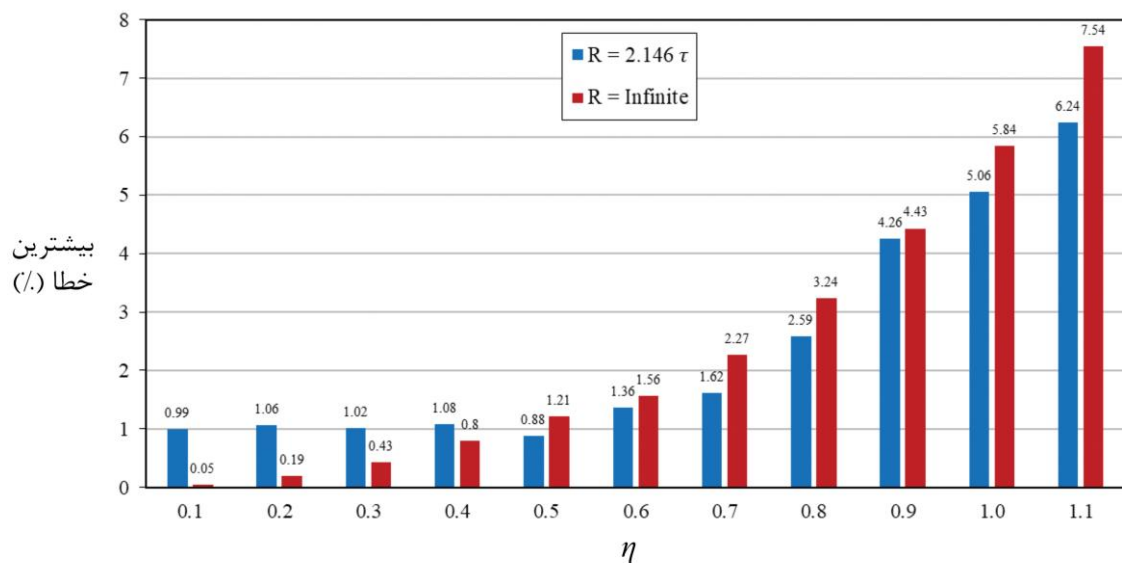
نتایج استخراج شده مربوط به حالتی است که نقاط انتگرال گیری به طور منظم و با فاصله یکسان قرار گرفته باشند. اما در شبیه سازی ها امکان دارد المان بندی نامنظم باشد. به همین دلیل، صحت نتایج به دست آمده، برای چند نمونه المان بندی نامنظم نیز بررسی می گردد. مطابق شکل ۹، یک دامنه $10\tau \times 10\tau$ به دو صورت نامنظم المان بندی و مقادیر خطا در محاسبه γ برای تمامی نقاط انتگرال گیری محاسبه می شود. در هر دو نمونه، ابعاد بزرگ ترین المان تقریباً برابر با $\tau \times \tau$ است. بنابراین، طبق شکل ۸ برای $\eta = 1$ خطا باید حداکثر برابر با ۵/۰۶٪ باشد. برای

بر اساس بخش ۳، در این پژوهش از $R = 2/146\tau$ به منظور کاهش هزینه محاسباتی با پذیرش ۱ درصد خطا در محاسبه مقدار γ استفاده می شود. اگرچه، در این بخش به منظور مقایسه بهتر دو روش گسسته و پیوسته ذکر شده، محاسبه γ در حل پیوسته بدون در نظر گرفتن شعاع برهم کنش، یا به بیان دیگر اعمال $R = \infty$ ، نیز انجام می شود.

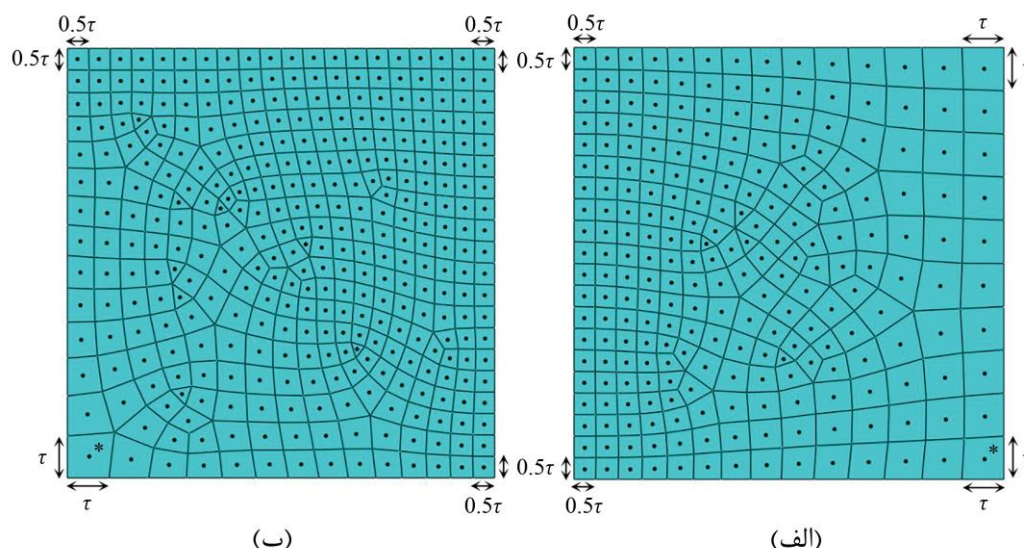
دامنه، چندین مرتبه با اندازه المان های برابر ولی هر بار متفاوت، المان بندی می شود. اندازه المان از 0.1τ شروع و به صورت ضربی از 0.1τ افزایش می یابد. همچنین ابعاد دامنه به گونه ای تعیین می گردد که هم امکان تقسیم شدن به اندازه المان مورد نظر را داشته باشد و هم به مقدار کافی بزرگ باشد تا γ در حل پیوسته برای حداقل دو نقطه انتگرال گیری وسط محور u ، برابر با یک باشد. سپس، مقدار γ از حل گسسته و حل پیوسته در نقاط انتگرال گیری محاسبه می گردد. درصد اختلاف γ به دست آمده از روش گسسته نسبت به روش پیوسته برای هر نقطه انتگرال گیری روی قطر دامنه، محاسبه و بزرگ ترین مقدار به عنوان بیشترین خطا، گزارش می گردد. جدول ۱، نحوه استخراج بیشترین خطا در محاسبه γ را برای اندازه المان بندی 0.5τ در دامنه با ابعاد $8\tau \times 8\tau$ و در نظر گرفتن شعاع برهم کنش نشان می دهد که برابر با ۰/۸۸٪ به دست آمده است.

جدول ۱. محاسبه γ از دو روش گسسته و پیوسته با اعمال $R = 2/146 \tau$ و استخراج بیشترین خطا در روش گسسته نسبت به پیوسته برای اندازه المان بندی 0.5τ در دامنه با ابعاد $8\tau \times 8\tau$

خطا (%)	پیوسته γ	گسسته γ	$u (\tau)$
0.38	0.4073	0.4088	0.35
0.88	0.7320	0.7385	1.06
0.25	0.9244	0.9267	1.77
0.21	0.9867	0.9846	2.47
0.65	0.9985	0.9921	3.18
0.78	0.9999	0.9921	3.89
0.79	1.0000	0.9921	4.60
0.79	1.0000	0.9921	5.30
0.79	1.0000	0.9921	6.01
0.79	1.0000	0.9921	6.72
0.78	0.9999	0.9921	7.42
0.65	0.9985	0.9921	8.13
0.21	0.9867	0.9846	8.84
0.25	0.9244	0.9267	9.55
0.88	0.7320	0.7385	10.25
0.38	0.4073	0.4088	10.96



شکل ۸. بیشترین خطا در محاسبه γ به روش گسسته بر حسب η (نسبت اندازه المان به τ)، برای المان بندی منظم با المان های دارای یک نقطه انتگرال گیری، با اعمال شعاع برهم کنش ($R = 2/146 \tau$) و بدون اعمال آن ($R = \infty$)



شکل ۹. دو نمونه المان‌بندی نامنظم در یک دامنه $10\tau \times 10\tau$ با المان‌های دارای یک نقطه انتگرال‌گیری و بزرگ‌ترین اندازه ضلع تقریباً برابر با τ

برهم‌کنش، در محدوده یک درصد باقی می‌ماند. بزرگ‌شدن اندازه المان‌ها به بیش از $1/8\tau$ ($\eta = 1/8$)، خطای ناشی از گسسته‌سازی باعث افزایش مقدار γ به بیش از یک، در برخی نقاط دور از مرز می‌شود. در حالی که طبق تعریف، مقدار آن نمی‌تواند بیش از یک باشد. ستون‌های هاشورخورده در شکل ۱۰ نشان‌دهنده این اندازه المان‌ها است. بیشترین مقدار γ در $\eta = 1/8$ برابر با $1/0.077$ است و با افزایش η ، افزایش می‌یابد. به طور مثال، در $\eta = 2/5$ به $1/0.485$ (یعنی $4/85\%$ خطا) می‌رسد.

۳-۴- تاثیر اندازه المان بر صحت مقادیر γ با در نظر گرفتن

نه نقطه انتگرال‌گیری برای هر المان (المان مرتبه دوم)^{۱۲}

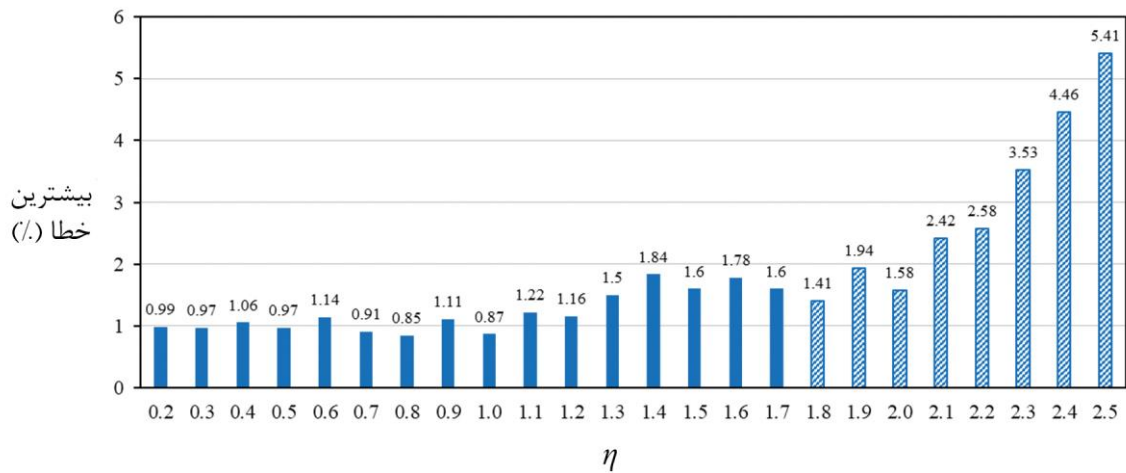
در دو بخش قبل از المان‌های خطی استفاده شد. در برخی از شبیه‌سازی‌ها از المان‌های دو بعدی مرتبه دوم دارای نه نقطه انتگرال‌گیری استفاده می‌گردد. در این حالت همچنان می‌توان با محاسبه بیشترین فاصله بین دو نقطه انتگرال‌گیری مجاور، مشابه حالت المان‌بندی نامنظم، از نتایج شکل ۸ استفاده کرد. اما به دلیل کاربرد زیاد این نوع المان‌ها، با استفاده از المان‌بندی مربعی و منظم مشابه قبل، نتایج بیشترین خطا در محاسبه γ استخراج شد

نمونه‌های (الف) و (ب)، بیشترین خطا به ترتیب برابر با $5/06\%$ و $3/98\%$ ، در نقاطی که با ستاره (*) علامت‌گذاری شده‌اند، به دست آمد. با وجود نامنظم بودن المان‌بندی، همچنان بیشترین مقدار خطا از نتایج المان‌بندی منظم تبعیت می‌کند.

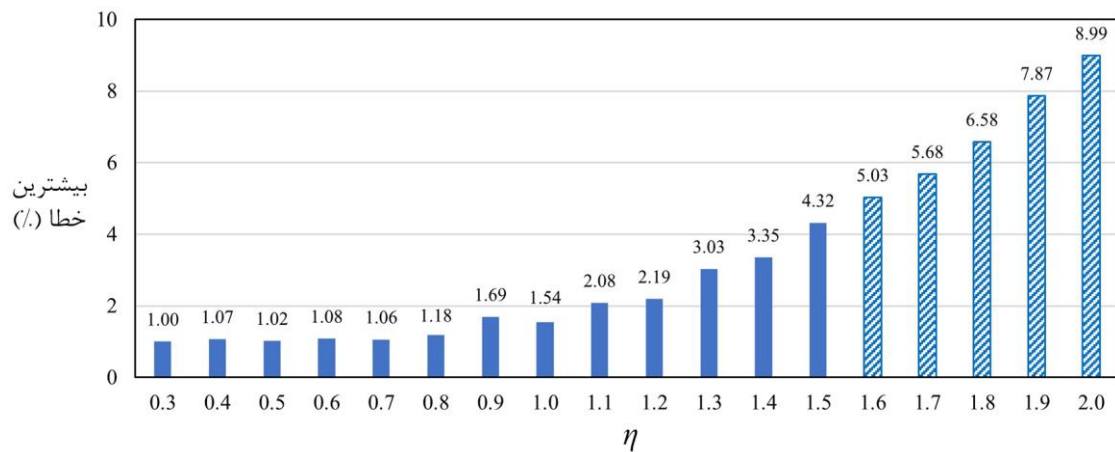
۲-۴- تاثیر اندازه المان بر صحت مقادیر γ با در نظر گرفتن

چهار نقطه انتگرال‌گیری برای هر المان

در بخش قبل، از المان‌های حاوی یک نقطه انتگرال‌گیری استفاده شد. اما در بسیاری از شبیه‌سازی‌ها، از المان‌های دارای چهار نقطه انتگرال‌گیری استفاده می‌گردد. در این حالت، همچنان می‌توان با محاسبه بیشترین فاصله بین دو نقطه انتگرال‌گیری مجاور، مشابه حالت المان‌بندی نامنظم، از نتایج شکل ۸ استفاده کرد. اما به دلیل کاربرد زیاد این نوع المان‌ها، با استفاده از المان‌بندی مربعی و منظم مشابه قبل، نتایج بیشترین خطا در محاسبه γ استخراج شد که در شکل ۱۰ آمده است. برای مسئله با المان‌بندی نامنظم نیز می‌توان از این نتایج بهره برد. این نمودار میله‌ای نشان می‌دهد که مشابه حالت استفاده از المان‌های حاوی یک نقطه انتگرال‌گیری، با افزایش η ، خطا افزایش می‌یابد. همچنین، برای اندازه المان‌های کوچک‌تر از τ ، مقدار بیشترین خطا به دلیل اعمال شعاع



شکل ۱۰. بیشترین خطا در محاسبه γ به روش گسسته بر حسب η (نسبت اندازه المان به τ)، برای المان‌بندی منظم با المان‌های دارای چهار نقطه انتگرال‌گیری با اعمال شعاع برهم‌کنش ($R = 2/146\tau$)



شکل ۱۱. بیشترین خطا در محاسبه γ به روش گسسته بر حسب η (نسبت اندازه المان به τ)، برای المان‌بندی منظم با المان‌های دارای نه نقطه انتگرال‌گیری و با اعمال شعاع برهم‌کنش ($R = 2/146\tau$)

نشان‌دهنده این اندازه المان‌ها است. به طور کلی با فرض η یکسان، خطا در این نوع المان نسبت به المان خطی با ۴ نقطه انتگرال‌گیری بیشتر است. علت آن، اختلاف زیاد در مقدار فاصله بین نقاط انتگرال‌گیری و نزدیک بودن هشت نقطه به مرز المان است. این موضوع باعث می‌شود که بخش بزرگتری از سطح المان به نقطه انتگرال‌گیری وسط، در مقایسه با بقیه نقاط اختصاص یابد. در المان مربعی خطی با چهار نقطه انتگرال‌گیری، به هر نقطه مساحت یکسان تخصیص پیدا می‌کند و فاصله بین

که در شکل ۱۱ آمده است. این نمودار میله‌ای نشان می‌دهد که مشابه نتایج دو حالت قبل، با افزایش η خطا افزایش می‌یابد. همچنین، برای اندازه المان‌های کوچک‌تر از 0.7τ ، مقدار بیشترین خطا به دلیل اعمال شعاع برهم‌کنش، در محدوده یک درصد باقی می‌ماند. با بزرگ‌شدن اندازه المان‌ها به بیش از $1/6\tau$ ($\eta = 1/6$)، خطای ناشی از گسسته‌سازی باعث افزایش مقدار γ به بیش از یک، در برخی نقاط می‌شود. در حالی که طبق تعریف، مقدار آن نمی‌تواند بیش از یک باشد. ستون‌های هاشورخورده در شکل ۱۱

نقاط خیلی متفاوت نیست.

افزایش می‌یابد. این موضوع حتی می‌تواند در برخی موارد باعث محاسبه مقدار بیشتر از یک برای این انتگرال شود که بر خلاف ویژگی‌های یک تابع وزن است. بنابراین، با فرض یک پارامتر غیرمحملی معین، استفاده از المان با اندازه دلخواه می‌تواند منجر به خطای زیاد در محاسبه انتگرال تابع وزن شود. برای کاهش دادن خطا، نتایج این پژوهش می‌تواند برای المان‌بندی با اندازه مناسب، به خصوص در شبیه‌سازی مسائل غیرمحملی که در آن، تابع خطا به عنوان تابع وزن تعریف شده است، مورد استفاده قرار گیرد. یافته‌های این تحقیق مبنی بر تأثیر گسسته‌سازی بر محاسبه انتگرال تابع وزن غیرمحملی و نقض احتمالی شرط بهنجارشده، به صورت کلی برای روش‌های بدون شبکه (مانند روش بدون شبکه گالرکین^(۱۳)) نیز کاملاً قابل اعمال است.

۵- نتایج

برای کاهش هزینه محاسباتی، بخشی از تابع وزن با اعمال یک شعاع برهم‌کنش، نادیده گرفته می‌شود. نشان داده شد که برای شعاع برهم‌کنش بیش از $2/146\tau$ ، کمتر از یک درصد از تابع خطا حذف (برابر با صفر) می‌شود که قابل صرف‌نظر کردن است. شعاع برهم‌کنش، تنها پارامتر تأثیرگذار بر صحت محاسبه انتگرال تابع وزن نیست. بلکه اندازه المان‌ها نیز، به دلیل گسسته‌سازی محاسبات، تأثیرگذار است. مشاهده شد با افزایش نسبت اندازه المان به پارامتر غیرمحملی، خطای محاسبه مقدار انتگرال تابع خطا

واژه‌نامه

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. Microvoids | 2. Functionally graded materials | 3. Error function |
| 4. Bell-shaped function | 5. Gaussian distribution function | 6. Helmholtz function |
| 7. Interaction radius | 8. Modified two-phase kernel | 9. Compensation two-phase kernel |
| 10. ABAQUS | 11. MATLAB | 12. Quadratic element |
| 13. Galerkin | | |

منابع

- Lai WM, Rubin D, and Krempel E. Introduction to continuum mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann; 2009. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-8560-3.X0001-1>.
- Lemaitre J. A course on damage mechanics. Berlin: Springer-Verlag; 1992. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18255-6>.
- Eringen AC. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. Int. J. Eng. Sci. 1972; 10(5): 425-435. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90050-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90050-X).
- Eringen AC. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. J. Appl. Phys. 1983; 54(9): 4703-4710. <https://doi.org/10.1063/1.332803>.
- Eringen AC, Edelen D. On nonlocal elasticity. Int. J. Eng. Sci. 1972; 10(3): 233-248. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90039-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0).
- Lim C, Zhang G, Reddy J. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. J. Mech. Phys. Solids 2015; 78: 298-313. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.02.001>.
- Bazant ZP, Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress. J. Eng. Mech. 2002; 128(11): 1119-1149. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
- Eringen AC. On nonlocal plasticity. Int. J. Eng. Sci. 1981; 19(12): 1461-1474. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(81\)90072-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(81)90072-0).
- Jirásek M, Rolshoven S. Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials. Int. J. Eng. Sci. 2003; 41(13-14): 1553-1602. [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00027-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00027-2).
- Bazant ZP. Why continuum damage is nonlocal: Micromechanics arguments. J. Eng. Mech. 1991; 117(5): 1070-1087. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1991\)117:5\(1070\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:5(1070)).
- Giry C, Dufour F, Mazars J. Stress-based nonlocal damage model. Int. J. Solids Struct. 2011; 48(25-

- 26): 3431-3443.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.08.012>.
12. Jirasek M. Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches. *Int. J. Solids Struct.* 1998; 35(31-32): 4133-4145.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00306-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00306-5).
 13. Pijaudier-Cabot G, Bazant ZP. Nonlocal damage theory. *J. Eng. Mech.* 1987; 113(10): 1512-1533.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1987\)113:10\(1512\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1512)).
 14. Reddy J. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *Int. J. Eng. Sci.* 2007; 45(2-8): 288-307.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.004>.
 15. Ebrahimi F, Reza Barati M. Vibration analysis of nonlocal beams made of functionally graded material in thermal environment. *Eur. Phys. J. Plus* 2016; 131(8): 279.
<https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16279-y>.
 16. Salehipour H, Shahidi A Nahvi H. Modified nonlocal elasticity theory for functionally graded materials. *Int. J. Eng. Sci.* 2015; 90: 44-57.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.01.005>.
 17. Zhu X, Li L. Twisting statics of functionally graded nanotubes using Eringen's nonlocal integral model. *Compos. Struct.* 2017; 178: 87-96.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.06.067>.
 18. Aydogdu M. A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration. *Phys. E* 2009; 41(9): 1651-1655.
<https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.05.014>.
 19. Eptaimeros K, Koutsoumaris CC, Tsamasphyros, G. Nonlocal integral approach to the dynamical response of nanobeams. *Int. J. Mech. Sci.* 2016; 115: 68-80.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.013>.
 20. Ke LL, Wang YS, Wang ZD. Nonlinear vibration of the piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory. *Compos. Struct.* 2012; 94(6): 2038-2047.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.01.023>.
 21. Norouzzadeh A, Ansari R, Rouhi H. An analytical study on wave propagation in functionally graded nano-beams/tubes based on the integral formulation of nonlocal elasticity. *Waves Random and Complex Media* 2020; 30(3): 562-580.
<https://doi.org/10.1080/17455030.2018.1543979>.
 22. Romano G, Barretta R, Diaco M. On nonlocal integral models for elastic nano-beams. *Int. J. Mech. Sci.* 2017; 131: 490-499.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.07.013>.
 23. Thai HT. A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams. *Int. J. Eng. Sci.* 2012; 52: 56-64.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.11.011>.
 24. Ansari R, Torabi J, Norouzzadeh A. Bending analysis of embedded nanoplates based on the integral formulation of Eringen's nonlocal theory using the finite element method. *Phys. B* 2018; 534: 90-97.
<https://doi.org/10.1016/j.physb.2018.01.025>.
 25. Reddy J, Pang S. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *J. Appl. Phys.* 2008; 103(2): 023511.
<https://doi.org/10.1063/1.2833431>.
 26. Bazant ZP, Lin FB. Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *J. Struct. Eng.* 1988; 114(11): 2493-2510.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1988\)114:11\(2493\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:11(2493)).
 27. Peerlings RD, De Borst R, Brekelmans W, Geers M. Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *Eur. J. Mech. A/Solids* 2002; 21(2): 175-189.
[https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)01211-1](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)01211-1).
 28. Polizzotto C. Thermodynamics and continuum fracture mechanics for nonlocal-elastic plastic materials. *Eur. J. Mech. A/Solids* 2002; 21(1): 85-103.
[https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01200-1](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01200-1).
 29. Abdollahi R, Boroomand B. On using mesh-based and mesh-free methods in problems defined by Eringen's non-local integral model: issues and remedies. *Meccanica* 2019; 54(11): 1801-1822.
<https://doi.org/10.1007/s11012-019-01048-6>.
 30. Danesh H, Javanbakht M, Mirzakhani S. Nonlocal integral elasticity based phase field modelling and simulations of nanoscale thermal-and stress-induced martensitic transformations using a boundary effect compensation kernel. *Comput. Mater. Sci.* 2021; 194: 110429.
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2021.110429>.
 31. Polizzotto C. Nonlocal elasticity and related variational principles. *Int. J. Solids Struct.* 2001; 38(42-43): 7359-7380.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00039-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00039-7).
 32. Jirásek M. Nonlocal damage mechanics. *Rev. Eur. Génie Civ.* 2007; 11(7-8): 993-1021.
<https://doi.org/10.1080/17747120.2007.9692974>.
 33. Pisano A, Sofi A, Fuschi P. Nonlocal integral elasticity: 2D finite element based solutions. *Int. J. Solids Struct.* 2009; 46(21): 3836-3849.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.07.009>.
 34. Borino G, Failla B, Parrinello F. A symmetric nonlocal damage theory. *Int. J. Solids Struct.* 2003; 40(13-14): 3621-3645.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00144-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00144-6).
 35. Jirásek M, Marfia S. Non-local damage model based on displacement averaging. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2005; 63(1): 77-102.
<https://doi.org/10.1002/nme.1262>.
 36. Polizzotto C, Fuschi P, Pisano A. A strain-difference-based nonlocal elasticity model. *Int. J.*

- Solids Struct. 2004; 41(9-10): 2383-2401. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.12.013>.
37. Danesh H, Javanbakht M, Barchiesi E, Hamila N. Coupled phase field and nonlocal integral elasticity analysis of stress-induced martensitic transformations at the nanoscale: boundary effects, limitations and contradictions. Continuum Mech. Thermodyn. 2023; 35(3): 1041-1062. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01042-y>.
38. Javanbakht M, Mirzakhani S, Silani M. Local vs. nonlocal integral elasticity-based phase field models including surface tension and simulations of single and two variant martensitic transformations and twinning. Eng. Comput. 2023; 39(1): 489-503. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01598-y>.