

Modeling of Transient Nonlinear Heat Conduction with Temperature-Dependent Material Properties

Amin Moosaie^{1,2} 

1. Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran

2. Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

Abstract: In recent years, growing attention has been directed toward developing more realistic physical models for simulating complex and technically significant problems. This approach often leads to the formulation of nonlinear, multidimensional, and highly intricate models, whose analysis and solution require advanced numerical and analytical techniques. One of the most notable examples in this context is the transient and nonlinear heat conduction problem with temperature-dependent material properties. This paper presents, analyzes, and evaluates a comprehensive set of possible mathematical models for simulating this phenomenon, some of which are introduced here for the first time. Special emphasis is placed on the application of the Kirchhoff integral transform, typically used in steady-state nonlinear problems, and its precise implementation under transient conditions is thoroughly investigated. Based on this transform, both linear and nonlinear models are derived and compared. The linear models are particularly valuable due to their ability to yield accurate analytical solutions, facilitate inverse heat conduction analyses, enable temperature field control strategies, and offer clearer physical interpretations. Additionally, three new nonlinear models are proposed, two of which demonstrate very high accuracy, while the third, despite its lower precision, provides superior computational simplicity and faster performance. The findings of this study can serve as a foundation for developing more advanced thermal models and optimizing the design of engineering heat transfer systems.

Keywords: Temperature-dependent material properties, Nonlinear heat conduction, Mathematical modeling, Integral transform methods, linearization.

Received: Oct. 12, 2025; Revised: Nov. 23, 2025; Accepted: Nov. 25, 2025; Published Online: Dec 21, 2025.

* Corresponding Author: moosaie@yu.ac.ir; moosaie@iut.ac.ir

How to Cite: Moosaie Amin, Modeling of transient nonlinear heat conduction with temperature-dependent material properties, Journal of Computational Methods in Engineering; 2025, 44(2), 167-188; DOI: 10.47176/jcme.44.2.1066





مدل‌سازی هدایت حرارت غیرخطی گذرا با خواص مواد وابسته به دما

امین موسائی^۱ 

۱. گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

۲. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده- در سال‌های اخیر، توسعه مدل‌های فیزیکی واقع‌گرایانه برای شبیه‌سازی پدیده‌های حرارتی پیچیده مورد توجه گسترده‌ای قرار گرفته است. در این پژوهش، مسئله هدایت حرارت گذرا و غیرخطی با خواص وابسته به دما بررسی شده و مجموعه‌ای از مدل‌های ریاضی برای توصیف آن ارائه می‌شود. رویکرد اصلی تحقیق بر استفاده از تبدیل انتگرالی کیرشهف برای مدل‌سازی معادله غیرخطی حرارت و تحلیل دقیق نحوه به‌کارگیری آن در شرایط گذرا است. بر اساس این روش، مدل‌های خطی و غیرخطی استخراج و مقایسه شده‌اند. مدل‌های خطی به دلیل امکان دستیابی به حل‌های تحلیلی و قابلیت استفاده در کنترل دما و حل مسائل معکوس، اهمیت ویژه‌ای دارند. همچنین سه مدل غیرخطی جدید معرفی شده است که دو مدل دقت بالا و مدل سوم با وجود دقت کمتر، از سادگی و سرعت محاسباتی بالایی برخوردار است. نتایج این پژوهش می‌تواند در طراحی و بهینه‌سازی سیستم‌های مهندسی حرارتی و توسعه روش‌های پیش‌بینی و کنترل دما در کاربردهای صنعتی مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: خواص مواد وابسته به دما، هدایت حرارت غیرخطی، مدل‌سازی ریاضی، روش‌های تبدیل انتگرالی، خطی‌سازی.

دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۷/۲۰، بازنگری: ۱۴۰۴/۰۹/۰۲، پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۰۴، اولین انتشار: ۱۴۰۴/۰۹/۳۰

* نویسنده مسئول، رایانامه: moosaie@iut.ac.ir؛ moosaie@yu.ac.ir



۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی پیچیده، با استفاده از مدل‌های دقیق‌تر و توجه به جزئیات بیشتر، رو به افزایش بوده است. برای مثال، همان‌طور که می‌دانیم خواص گرمایی فلزات و سایر مواد به دما وابسته‌اند. مهم‌ترین این خواص که به هدایت گرمایی مربوط می‌شوند؛ چگالی ρ ، گرمای ویژه c ، و رسانایی حرارتی λ هستند. در مسائل دنیای واقعی، در نظر گرفتن وابستگی خواص حرارتی به دما برای دستیابی به نتایج بسیار دقیق ضروری است، به‌ویژه هنگامی که مسئله شامل گستره‌ای وسیع از دماها باشد؛ یعنی در مسائلی که گرادیان‌های دمایی بزرگ پیش می‌آیند. با این حال، علی‌رغم دقت بالاتر، این نوع مدل‌سازی منجر به معادله‌ی هدایت حرارت غیرخطی می‌شود که بر مسئله حاکم است. این غیرخطی بودن، استفاده از روش‌های تحلیلی استاندارد که معمولاً برای حل مسائل هدایت حرارت به کار می‌روند (برای مثال به [۱] رجوع شود) را با دشواری روبه‌رو می‌سازد. همچنین به‌کارگیری روش‌های عددی را دشوار کرده و حوزه‌هایی مانند تحلیل معکوس انتقال حرارت و کنترل میدان دما را نیز پیچیده می‌کند.

برای مسائل پایا (دائم)، تبدیل معروف کیرشهف، معادله‌ی حاکم غیرخطی را به معادله‌ای خطی برحسب دمای تبدیل‌شده تبدیل می‌کند [۱]. این امر امکان استفاده از روش‌های تحلیلی مختلف و همچنین به‌کارگیری آسان‌تر روش‌های عددی را فراهم می‌سازد. با این حال، در مورد مسائل گذرا (غیردائم)، این رویکرد به‌طور مستقیم قابل استفاده نیست. در حالت غیردائم، تبدیل کیرشهف معادله‌ی حاکم را خطی نمی‌کند و پژوهشگران برای مواجهه با این مشکل، فرضیات و ساده‌سازی‌های گوناگونی به کار برده‌اند. در ادامه برخی از این تلاش‌ها مرور می‌شوند. البته همیشه می‌توان معادله‌ی کامل غیرخطی را حل کرد تا به پاسخ دقیق دست یافت. اما این مدل غیرخطی برای روش‌های تحلیلی مناسب نیست و اجرای عددی آن نیز آسان نیست. همچنین برای توسعه‌ی روش‌های کنترلی میدان دما نیز کار را مشکل می‌کند.

زیرا کنترل معادلات خطی بسیار آسان‌تر از معادلات غیرخطی است.

اغلب فرضیات متنوعی برای حل تحلیلی یا عددی معادله‌ی هدایت حرارت غیرخطی گذرا مورد استفاده قرار می‌گیرد. از طرفی، معمولاً عملکرد این فرضیات به‌درستی مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. بنابراین، تحلیل جامعی از رویکردهای ممکن به همراه مقایسه‌ی دقت نسبی آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد. هدف این مقاله ارائه‌ی مدل‌های ممکن به همراه ارزیابی دقت آن‌ها است. علاوه بر این، مدل‌های جدیدی نیز ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که در مرور ادبیات ارائه‌شده در ادامه، وابستگی رسانایی حرارتی به دما به تنهایی، فقط به مسائل پایا مربوط می‌شود. برای مسائل ناپایا، گزینه‌های مختلف برای وابستگی یا عدم وابستگی خواصی مانند رسانایی حرارتی، چگالی و گرمای ویژه به دما، وجود دارد. بنابراین، مرور منابع مربوط به مسائل هدایت حرارتی پایا و ناپایا در ادامه به‌صورت جداگانه ارائه می‌شود. در هر دو دسته، مطالعات تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

هدایت حرارتی و ترموالاستیسیته‌ی پایا با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما در هندسه‌های مختلف، به‌صورت تحلیلی توسط تروستل [۲ و ۳] و همچنین استانیسیچ و مک‌کینلی [۴-۶] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. روش اجزای محدود برای حل هدایت حرارت غیرخطی پایا در محیط‌های همگن توسط کریزک و لیو [۷] پیشنهاد شد. کاراجورگیس و لسینیک [۸] راهبردی مبتنی بر روش حل‌های بنیادی برای مسائل هدایت غیرخطی پایا در مواد مرکب ارائه کردند. میدان‌های دما و تنش حرارتی پایا با در نظر گرفتن خواص وابسته به دما به‌صورت تحلیلی توسط موسایی [۹] در یک ذره‌ی کروی همگن، توسط موسایی [۱۰ و ۱۱] در استوانه‌ی توخالی FGM و توسط موسایی و پناهی کالوس [۱۲] در کره‌ی توخالی FGM بررسی شدند. الگوریتم عددی برای بهینه‌سازی توپولوژی در مسائل هدایت حرارت غیرخطی پایا با رسانایی حرارتی وابسته به دما توسط تانگ و همکاران [۱۳] ارائه گردید. یاریم‌پابوج [۱۴] حل تحلیلی هدایت

حرارتی غیرخطی و تنش‌های حرارتی در پوسته‌های استوانه‌ای و کروی FGM را ارائه کرد.

داوتی و هاوورث [۱۵] هدایت حرارتی غیرخطی گذرا را به روش عددی بررسی کردند. آنان λ (رسانایی حرارتی) را وابسته به دما و ρc (چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه) را ثابت فرض کردند. کاتایاما و همکاران [۱۶] حل عددی رسانش حرارت غیرخطی را با در نظر گرفتن λ و ρc وابسته به دما ارائه دادند. کومینی و همکاران [۱۷] فرمول‌بندی اجزای محدود برای رسانش حرارت غیرخطی گذرا را، به‌ویژه در ارتباط با مسائل تغییر فاز، پیشنهاد کردند که در آن تمام خواص ماده به دما وابسته بودند. هیوز [۱۸] الگوریتم‌های پایدار نامشروط برای حل عددی هدایت حرارت غیرخطی گذرا با استفاده از روش اجزای محدود را ارائه داد. در کار وی، تمام خواص ماده تابع دما در نظر گرفته شدند. توماس و همکاران [۱۹] مطالعه‌ای مقایسه‌ای میان چندین روش عددی برای حل رسانش حرارت گذرا با خواص وابسته به دما انجام دادند. وینگت و هیوز [۲۰] نیز پژوهشی جامع در مورد الگوریتم‌های حل مسائل هدایت حرارتی غیرخطی گذرا در محیط‌های همگن با استفاده از روش اجزای محدود انجام دادند که در آن تمامی خواص به دما وابسته بودند.

کیکوتا و همکاران [۲۱] روش اجزای مرزی را برای شبیه‌سازی عددی رسانش حرارتی غیرخطی گذرا با λ وابسته به دما و ρc ثابت توسعه دادند. تانیگاوا و همکاران [۲۲] تحلیل تئوری و عددی رسانش حرارت غیرخطی و تنش‌های حرارتی در یک صفحه‌ی FGM را انجام دادند که در آن تمامی خواص ماده وابسته به دما فرض شدند. چن و همکاران [۲۳] روش انتگرال‌گیری زمانی دقیق را برای حل عددی مسائل رسانش غیرخطی ارائه کردند که در آن تمامی خواص به دما وابسته بودند. فیک و همکاران [۲۴] روش ترکیبی تجزیه‌ی متعامد مناسب (POD) و اجزای محدود را برای حل عددی رسانش حرارتی غیرخطی پیشنهاد کردند و هر دو خاصیت λ و ρc را تابع دما در نظر گرفتند. کوری و زوتین [۲۵] تحلیل عددی گذرای سطوح توسعه‌یافته (پره‌ها) را با λ وابسته به دما و ρc ثابت، با استفاده از

روش تبدیل انتگرالی انجام دادند. مصطفی و همکاران [۲۶] پاسخ‌های تحلیلی-تقریبی برای مسائل رسانش حرارتی غیرخطی گذرا را با فرض λ وابسته به دما و ρc ثابت ارائه کردند. مسیبی‌درچه و همکاران [۲۷] روش ترکیبی تبدیل دیفرانسیلی و تفاضل محدود را برای حل رسانش حرارتی غیرخطی در پره‌ها با λ وابسته به دما و ρc ثابت به کار بردند. دمیرباس [۲۸] حل عددی میدان‌های دما و تنش حرارتی گذرا را در صفحات FGM با خواص وابسته به دما ارائه کرد که در آن هر دو λ و ρc تابع دما بودند. بهادری و همکاران [۲۹] یک روش تصادفی مونت‌کارلو را برای حل عددی مسائل رسانش حرارتی گذرا با خواص وابسته به دما توسعه دادند. چیملی و همکاران [۳۰] ترموالاستیسیته‌ی گذرا تحت اثرات هدایت حرارت غیرفوری‌ای را برای FGM‌ها با در نظر گرفتن خواص ماده وابسته به دما ارائه کردند. جیانگ و همکاران [۳۱] نیز یک روش اجزای مرزی سریع با مرتبه کاهش‌یافته‌ی را بر پایه‌ی تجزیه‌ی متعامد مناسب (POD) برای حل عددی هدایت حرارتی غیرخطی با λ وابسته به دما و ρc ثابت توسعه دادند. ساوین و همکاران [۳۲] یک روش اجزای محدود با مرز مقیاس شده برای حل مسائل هدایت حرارت غیرخطی گذرا با خواص مواد وابسته به دما ارائه دادند.

مطالعاتی بر روی مسائل معکوس هدایت حرارت با خواص وابسته به دما نیز انجام گرفته است. کوی و همکاران [۳۳] یک روش گرادیان مزدوج اصلاح‌شده برای مسائل هدایت حرارت معکوس غیرخطی گذرا توسعه دادند که در آن چگالی و گرمای ویژه ثابت فرض شده و تنها وابستگی رسانایی حرارتی به دما در نظر گرفته شده بود. دادار و همکاران [۳۴] تحلیل هدایت حرارت معکوس ترموالاستیک را به کمک یک روش بدون شبکه برای شناسایی خواص مواد وابسته به دما ارائه کردند که در آن تمام خواص به دما وابسته بودند.

مرور ادبیات فوق نشان‌دهنده‌ی انجام پژوهش‌های فراوان تحلیلی و عددی در زمینه‌ی مسائل پایا، گذرا و معکوس روی هدایت حرارت غیرخطی با خواص مواد وابسته به دما است. در این مطالعات، نویسندگان از مدل‌های مختلفی استفاده کرده‌اند. با

۲. تئوری هدایت حرارت

در این بخش، فرمول‌بندی‌های مختلفی که می‌توان از آن‌ها برای حل تحلیلی یا عددی مسائل گذرای غیرخطی هدایت حرارت با خواص مواد وابسته به دما استفاده کرد، ارائه می‌شوند. در تمامی مدل‌های ارائه شده، قانون بقای انرژی نقش اساسی دارد. شکل ناپایای قانون بقای انرژی به صورت معادله (۱) است:

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + Q \quad (1)$$

که در آن ρ ، c ، T ، $\nabla \cdot \mathbf{q}$ و Q به ترتیب نشان‌دهنده چگالی، گرمای ویژه، میدان دما، زمان، عملگر برداری گرادیان، بردار شار حرارتی و منبع حرارتی هستند. بردار شار حرارتی $\mathbf{q}$ بر اساس قانون هدایت حرارت فوریه برحسب گرادیان دما بیان می‌شود:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (2)$$

که در آن λ رسانایی حرارتی ماده است.

در این پژوهش، خواص ماده یعنی ρ ، c و λ به عنوان توابعی از دما در نظر گرفته می‌شوند، یعنی $\rho = \rho(T)$ ، $c = c(T)$ و $\lambda = \lambda(T)$ است. از آنجا که حاصل ضرب ρ و c همواره در معادلات در کنار هم ظاهر می‌شود، این دو پارامتر به صورت یک تابع واحد وابسته به دما یعنی $\rho c = \varrho(T)$ در نظر گرفته می‌شوند. منبع حرارتی Q در تحلیل حاضر نقشی ندارد و در ادامه از آن صرف نظر می‌شود.

با ترکیب معادلات (۱) و (۲) و با حذف منبع حرارتی Q خواهیم داشت:

$$\frac{\partial[\varrho(T)T]}{\partial t} = \nabla \cdot [\lambda(T)\nabla T] \quad (3)$$

با استفاده از قاعده مشتق‌گیری حاصل ضرب، رابطه‌ی فوق به صورت معادله (۴) درمی‌آید:

$$\varrho \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \lambda(T) \Delta T + \nabla \lambda \cdot \nabla T \quad (4)$$

که در آن Δ عملگر لاپلاسین است. از آنجا که λ و ϱ تنها توابعی از دما هستند، به کمک قاعده زنجیره‌ای مشتق می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{d\varrho}{dT} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla \lambda = \frac{d\lambda}{dT} \nabla T \quad (5)$$

در نتیجه، معادله (۴) به صورت معادله (۶) بیان می‌شود:

این حال، عملکرد مدل‌های گوناگون ممکن برای این مسئله تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. هدف این مقاله، ارائه و مقایسه‌ی مدل‌های مختلف رسانش حرارت غیرخطی گذرا در محیط‌های همگن با استفاده از یک مسئله‌ی آزمون است. به طور خاص، نوآوری این مقاله در بررسی دقیق کاربرد تبدیل انتگرالی کیرشهف برای مسائل هدایت حرارت گذرا با خواص مواد وابسته به دما است. از مدل‌های بررسی شده، مدل‌های ۴، ۵ و ۶ و نیز خطی‌سازی مبتنی بر روش اغتشاش که در بخش ۷ ارائه شده، از نوآوری‌های اصلی این پژوهش محسوب می‌شوند.

علاوه بر مطالعات فوق که هدایت حرارت با خواص مواد وابسته به دما را بررسی می‌نمودند، مقالات متعددی نیز در زمینه‌ی جابجایی حرارتی با خواص مواد وابسته به دما منتشر شده است چیم [۳۵] انتقال حرارت در سیالی با رسانایی متغیر بر روی صفحه‌ی کششی خطی را بررسی کرد. حسین و همکاران [۳۶] جریان سیال لزج تراکم‌ناپذیر با ضریب لزجت و رسانایی حرارتی وابسته به دما را در اطراف گوه‌ای تراوا با شار حرارتی سطحی یکنواخت مورد بررسی قرار دادند. دهقان و همکاران [۳۷] رسانایی وابسته به دما را در جابجایی اجباری مبدله‌کن‌های گرمایی حاوی محیط متخلخل با استفاده از روش اغتشاش بررسی کردند. پناهی کالوس و همکاران [۳۸] اثر ضریب لزجت و رسانایی حرارتی وابسته به دما را بر میدان سرعت و دما مورد مطالعه قرار داده و با استفاده از روش اغتشاش، یک راه‌حل تحلیلی ارائه کردند.

در این مقاله؛ در بخش ۲ نظریه و معادلات حاکم بر هدایت حرارت غیرخطی ارائه می‌شوند. بخش ۳ به معرفی تبدیل دمای کیرشهف اختصاص دارد. فرمول‌بندی‌های ریاضی ممکن برای مسئله‌ی هدایت حرارتی غیرخطی در بخش ۴ معرفی می‌شوند. عملکرد مدل‌های معرفی شده با استفاده از یک مسئله‌ی آزمون در بخش ۵ بررسی می‌شود. در بخش ۶ حل تحلیلی مدل‌ها به صورت اختصار بررسی شده و در بخش ۷ نیز خطی‌سازی مدل ۶ به کمک روش اغتشاش ارائه شده است. در نهایت، جمع‌بندی مقاله در بخش ۸ ارائه می‌گردد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، این پارامترها معمولاً کوچک هستند. اگرچه بیشتر مدل‌های این مقاله به کوچک بودن پارامترهای ε_1 و ε_2 وابسته نیستند و روش‌ها و نتایج ارائه شده برای هر مقدار از این پارامترها معتبرند، با این حال فرض کوچک بودن آنها می‌تواند در برخی از مدل‌ها - به‌ویژه هنگام به‌کارگیری روش‌های اغتشاش - سودمند باشد.

لازم به ذکر است که برای مسائل پایا، از شکل مستقل از زمان معادله‌ی (۱۰) استفاده می‌شود:

$$(1 - \varepsilon_2 T) \Delta T - \varepsilon_2 \nabla T \cdot \nabla T = 0 \quad (12)$$

البته در این مقاله مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. واضح است در حالت دائم، تنها پارامتر مادی تعیین کننده مسئله، ε_2 است. این در حالی است که در حالت غیردائم، سه پارامتر مادی ε_1 ، α_0 و ε_2 بر مسئله مؤثر هستند.

۳. تبدیل انتگرالی کیرشهف

تبدیل دمای کیرشهف به صورت معادله‌ی (۱۳) تعریف می‌شود [۱]:

$$\theta(T) = \frac{1}{\lambda_0} \int_{\tilde{T}=0}^T \lambda(\tilde{T}) d\tilde{T} \quad (13)$$

که در آن $\lambda_0 = \lambda(T=0)$ است. با جایگذاری معادله‌ی (۷-ب) در معادله‌ی (۱۳)، خواهیم داشت [۹]:

$$\theta(T) = T - \frac{1}{2} \varepsilon_2 T^2 \quad (14)$$

تبدیل معکوس رابطه‌ی (۱۴) که برای محاسبه‌ی T برحسب θ مورد استفاده قرار می‌گیرد، به صورت معادله‌ی (۱۵) است [۹]:

$$T(\theta) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \theta}}{\varepsilon_2} \quad (15)$$

البته لازم به ذکر است که معادله‌ی (۱۴) درجه‌ی دوم بوده و دو ریشه دارد. در [۹] اثبات شده که تنها ریشه‌ی نشان داده شده در معادله‌ی (۱۵) از نظر فیزیکی قابل قبول است.

با گرداندن گرفتن از دو طرف رابطه‌ی (۱۴)، خواهیم داشت:

$$\nabla \theta = (1 - \varepsilon_2 T) \nabla T \quad (16)$$

$$\left(\rho + T \frac{d\rho}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda(T) \Delta T + \frac{d\lambda}{dT} \nabla T \cdot \nabla T \quad (6)$$

که یک معادله‌ای غیرخطی است.

در این مقاله، وابستگی دمایی خواص ماده به صورت خطی فرض شده است [۳۹]:

$$\rho(T) = \rho_0 + \rho_1 T \quad (7-الف)$$

$$\lambda(T) = \lambda_0 - \lambda_1 T \quad (7-ب)$$

ثابت‌های ρ_0 ، ρ_1 ، λ_0 و λ_1 پارامترهای ماده هستند. برای مثال، توابع ماده فوق برای فولاد به صورت معادله‌ی (۸) داده شده‌اند [۳۹]:

$$\rho(T) = (3.43253 + 0.00105T) \times 10^6 \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{K}} \quad (8-الف)$$

$$\lambda(T) = 52.5 - 0.02228T \frac{\text{W}}{\text{mK}} \quad (8-ب)$$

مقادیر عددی داده شده در معادلات (۸-الف) و (۸-ب) در سراسر این مقاله مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

با جایگذاری توابع ماده (۷-الف) و (۷-ب) در معادله‌ی

غیرخطی هدایت حرارت (۶)، خواهیم داشت:

$$(\rho_0 + 2\rho_1 T) \frac{\partial T}{\partial t} = (\lambda_0 - \lambda_1 T) \Delta T - \lambda_1 \nabla T \cdot \nabla T \quad (9)$$

معادله (۹) را می‌توان به صورت معادله‌ی (۱۰) بازنویسی نمود:

$$(1 + \varepsilon_1 T) \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_0 [(1 - \varepsilon_2 T) \Delta T - \varepsilon_2 \nabla T \cdot \nabla T] \quad (10)$$

که در آن:

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_0}{\rho_0} \quad (11-الف)$$

با استفاده از مقادیر عددی داده شده در معادلات (۸-الف) و (۸-ب) برای λ_0 و ρ_0 مقدار $\alpha_0 = 1.5295 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ برای فولاد به دست می‌آید.

همچنین پارامترهای ε_1 و ε_2 به صورت معادلات (۱۱-ب) و

(۱۱-پ) تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_1 = \frac{2\rho_1 T_{\text{ref}}}{\rho_0} \quad (11-ب)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda_1 T_{\text{ref}}}{\lambda_0} \quad (11-پ)$$

T_{ref} یک دمای مرجع برای بی‌بعدسازی پارامترهای ε_1 و ε_2 است. بدون کاستن از کلیت موضوع و برای سادگی، در این مقاله T_{ref} برابر با واحد در نظر گرفته شده است. به عنوان مثال، مقادیر عددی داده شده در معادلات (۸-الف) و (۸-ب) برای فولاد، مقادیر

همچنین، به آسانی از رابطه‌ی (۱۴) یا (۱۵) می‌توان نشان داد که وقتی $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ، به سمت صفر میل می‌کنند آن گاه θ به T میل می‌کند. بنابراین، معادله‌ی (۲۰) در حد $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ به معادله‌ی کلاسیک هدایت حرارت غیردائم خطی (۲۵) میل می‌کند. بنابراین، این فرمول‌بندی غیرخطی با حالت خطی سازگار است و در حالت حدی، به تئوری ساده خطی کاهش می‌یابد.

تابع $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta)$ در شکل ۱ برای بازه‌ی $\theta \in [0, 1000]$ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که شکل این تابع به شکل خطی نزدیک است. از این‌رو، می‌توان آن را با یک تابع خطی تقریب زد:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \approx 1 - \varepsilon_3 \theta \quad (23)$$

که در آن پارامتر ε_3 با استفاده از یک الگوریتم برازش منحنی خطی تعیین می‌شود. با استفاده از تقریب خطی (۲۳)، معادله‌ی (۲۰) به صورت ساده‌تر معادله (۲۴) قابل بیان است:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha_0 (1 - \varepsilon_3 \theta) \Delta \theta \quad (24)$$

معادله‌ی (۲۰) دقیق است، در حالی که معادله‌ی (۲۴) یک تقریب محسوب می‌شود. با این وجود، معادله‌ی (۲۴) از نظر ریاضی ساختاری بسیار ساده‌تر از معادله‌ی (۲۰) دارد. این سادگی، برای حل‌های تحلیلی به کمک روش اغتشاش، حل‌های عددی، حل مسائل انتقال حرارت معکوس و توسعه روش‌های کنترلی برای کنترل میدان دما در حالت غیرخطی می‌تواند سهولت زیادی ایجاد نماید.

۴. مدل‌سازی ریاضی برای هدایت حرارت غیرخطی

گذرا

در این بخش، مدل‌های گوناگون هدایت حرارت با خواص مواد وابسته به دما، از مدل‌های ساده تا مدل‌های پیشرفته‌تر، ارائه می‌شوند.

حال با اعمال عملگر دیورژانس بر دو طرف معادله (۱۶) خواهیم داشت:

$$\Delta \theta = (1 - \varepsilon_2 T) \Delta T - \varepsilon_2 \nabla T \cdot \nabla T \quad (17)$$

مقایسه‌ی معادلات (۱۲) و (۱۷) نشان می‌دهد که معادله‌ی غیرخطی هدایت حرارت پایا (۱۲) توسط تبدیل کیرشلف به معادله‌ی خطی ساده‌ی لاپلاس برحسب دمای تبدیل‌یافته θ تبدیل می‌شود:

$$\Delta \theta = 0 \quad (18)$$

که شبیه معادله هدایت حرارت دائم خطی، اما بر حسب دمای تبدیل‌یافته θ است. این نتیجه برای مسائل هدایت غیرخطی پایا شناخته شده است و در گذشته به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است. با این حال، کاربرد این روش برای مسائل ناپایا قابل تردید بوده و در این مقاله مورد بررسی دقیق قرار خواهد گرفت. علاوه بر این، مشتق زمانی معادله‌ی (۱۴) برای تحلیل گذرا مورد نیاز است. از این‌رو، به‌صورت معادله‌ی (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = (1 - \varepsilon_2 T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (19)$$

بنابراین، معادله‌ی غیرخطی هدایت حرارت گذرا (۱۰) را می‌توان با استفاده از دمای تبدیل‌یافته θ و با ترکیب معادلات (۱۰)، (۱۵)، (۱۷) و (۱۹) به‌صورت معادله‌ی (۲۰) نوشت:

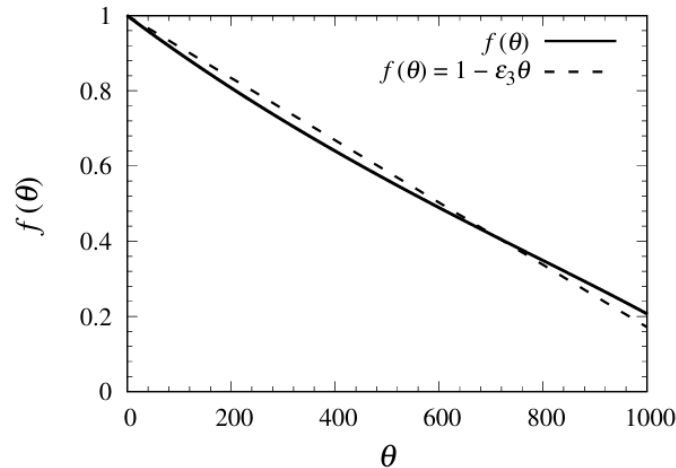
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha_0 f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) \Delta \theta \quad (20)$$

که در آن

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) = \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \theta}}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \theta})} \quad (21)$$

رابطه‌ی (۲۱) به وضوح نشان می‌دهد که $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta)$ یک تابع غیرخطی بوده و البته معادله‌ی (۲۰) نیز یک معادله‌ی غیرخطی است. یعنی، برخلاف مسائل پایا، آشکار است که در مسائل گذرا، تبدیل کیرشلف مدل ریاضی را خطی نمی‌سازد. همچنین، به آسانی می‌توان نشان داد که حد (۲۲) برقرار است:

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) = 1 \quad (22)$$



شکل ۱. نمودار تابع $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta)$ و بهترین برازش خطی آن برحسب θ برای $\varepsilon_1 = 6.1179 \times 10^{-4}$ و $\varepsilon_2 = 8.2857 \times 10^{-4}$ مقدار $\varepsilon_3 = 4.2438 \times 10^{-4}$ رسم شده است. در برازش خطی فوق، مقدار ε_3 برای فولاد به‌دست آمده است.

همچنین، معادله‌ی (۲۰) برای دمای تبدیل یافته θ به صورت معادله‌ی (۲۸) خواهد شد:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha_0 \sqrt{1 - 2\varepsilon_2 \theta} \Delta \theta \quad (28)$$

معادلات حاکم (۲۷) و (۲۸) هر دو غیرخطی هستند. با این حال، معادله‌ی (۲۸) از نظر ریاضی ساده‌تر از معادله‌ی (۲۷) است.

۴-۴ خواص λ و ρc وابسته به دما (مدل چهارم)

در این حالت، فرض می‌شود پارامتر ε_3 در معادله‌ی (۲۳) حذف می‌شود، و در نتیجه $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta) = 1$ بنابراین، معادله‌ی حاکم برحسب دمای تبدیل یافته θ به صورت معادله‌ی (۲۹) است:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha_0 \Delta \theta \quad (29)$$

این رویکرد منجر به یک معادله‌ی هدایت حرارت خطی برای θ می‌شود. از این رو، مدلی بسیار ساده به دست می‌دهد که به‌ویژه برای به‌دست آوردن حل‌های تحلیلی، به‌صورت بسته و یا به‌صورت سری، مناسب است. در حل تحلیلی مسئله، تمامی روش‌های تحلیلی موجود برای حل معادله‌ی خطی کلاسیک (۲۵) را می‌توان برای حل معادله‌ی (۲۹) نیز به کار برد. با این حال، تحلیل همچنان غیرخطی است و انتظار

۱-۴ خواص ثابت (مدل اول)

این مدل با قرار دادن $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ در معادله‌ی (۱۰) به دست می‌آید. از این رو، معادله‌ی کلاسیک و پرکاربرد هدایت حرارت خطی حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_0 \Delta T \quad (25)$$

۲-۴ خواص λ ثابت و ρc وابسته به دما (مدل دوم)

این حالت مربوط به زمانی است که $\varepsilon_2 = 0$ باشد. در این صورت، معادله‌ی (۱۰) به شکل معادله‌ی (۲۶) در می‌آید:

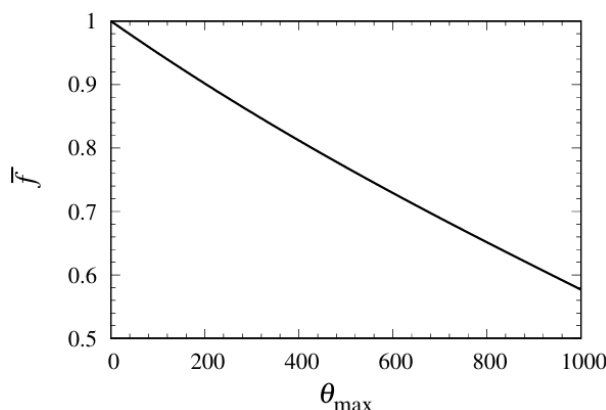
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha_0}{1 + \varepsilon_1 T} \Delta T \quad (26)$$

در این حالت، معادله‌ی حاکم غیرخطی است. به کمک معادله (۱۴) در این حالت $\theta = T$ خواهد شد. بنابراین نیازی به استفاده از معادله‌ی حاکم برحسب دمای تبدیل یافته θ وجود ندارد.

۳-۴ خواص λ وابسته به دما و ρc ثابت (مدل سوم)

این مدل با قرار دادن $\varepsilon_1 = 0$ در معادله‌ی (۱۰) برای دمای فیزیکی T و در معادلات (۲۰) و (۲۱) برای دمای تبدیل یافته θ به دست می‌آید. در این صورت، معادله‌ی (۱۰) به صورت معادله‌ی (۲۷) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_0 [(1 - \varepsilon_2 T) \Delta T - \varepsilon_2 \nabla T \cdot \nabla T] \quad (27)$$


 شکل ۲. مقدار $\bar{f}$ به عنوان تابعی از $\theta_{\max}$ برای $\theta_{\min} = 0$

معادله‌ی (۳۲) برحسب دمای تبدیل یافته θ خطی است. بنابراین، این معادله برای حل‌های تحلیلی مشابه مدلی که در زیربخش ۴-۴ ارائه شد، مناسب است. انتظار می‌رود مدل معادله‌ی (۳۲) نتایج دقیق‌تری نسبت به مدل معادله‌ی (۲۹) ارائه دهد. مشابه مدل معادله‌ی (۲۹)، اگرچه معادله‌ی مدل از نظر دمای تبدیل یافته θ خطی است، اما این رویکرد یک تحلیل کاملاً غیرخطی برای دمای فیزیکی T ارائه می‌دهد.

تفاوت مدل چهارم و مدل پنجم به مقدار انحراف $\bar{f}$ از عدد یک وابسته است. با قرار دادن $\theta_{\min} = 0$ ، پارامتر $\bar{f}$ به عنوان تابعی از $\theta_{\max}$ در بازه‌ی $\theta_{\max} \in [0, 1000]$ محاسبه می‌شود. نمودار $\bar{f}$ برحسب $\theta_{\max}$ در شکل ۲ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش $\theta_{\max}$ ، مقدار $\bar{f}$ از عدد یک فاصله می‌گیرد. این بدان معناست که دقت مدل چهارم برای مقادیر کوچک‌تر $\theta_{\max}$ بالاتر است و با افزایش $\theta_{\max}$ دقت آن کاهش می‌یابد.

ایده‌ی دیگر این است که به جای $\bar{f}$ از $f(\bar{\theta})$ استفاده شود، که در آن $\bar{\theta} = (\theta_{\min} + \theta_{\max})/2$ است. این روش مزیت دارد زیرا محاسبه‌ی آن آسان‌تر است و نیازی به انتگرال‌گیری موجود در رابطه‌ی (۳۰) ندارد. برای بررسی دقت این روش، خطای نسبی $|\bar{f} - f(\bar{\theta})|/|\bar{f}|$ در شکل ۳ ترسیم شده است. این خطا با افزایش $\theta_{\max}$ و در حالی که $\theta_{\min}$ ثابت و برابر با صفر نگه داشته شده است، به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار

می‌رود نتایج دقیق‌تری نسبت به مدل خطی ارائه شده در معادله (۲۵) به دست دهد. درستی یا نادرستی این فرض در بخش ۵ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۵-۴ خواص λ و ρc وابسته به دما (مدل پنجم)

در این حالت، مقدار میانگین تابع f داده شده در معادله‌ی (۲۱) در بازه‌ی $\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ استفاده می‌شود. مقدار میانگین بر اساس رابطه‌ی (۳۰) محاسبه می‌گردد:

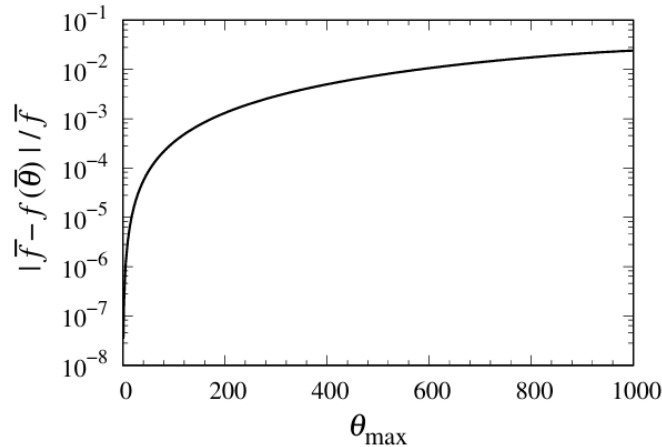
$$\bar{f} = \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon_2\theta}}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_2\theta})} d\theta \quad (30)$$

که در آن $\delta\theta = \theta_{\max} - \theta_{\min}$ است. همچنین، $\bar{f}$ را می‌توان با استفاده از تقریب خطی برای f ، یعنی معادله‌ی (۲۳)، محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{\delta\theta} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} (1 - \varepsilon_3\theta) d\theta \\ &= 1 - \frac{\varepsilon_3}{2}(\theta_{\max} + \theta_{\min}) \end{aligned} \quad (31)$$

استفاده از معادله‌ی (۳۱)، که یک رابطه‌ی ساده به صورت بسته برای محاسبه‌ی سریع و آسان $\bar{f}$ معرفی می‌کند، به شرط آن که ε_3 پیش‌تر با استفاده از یک الگوریتم برازش خطی محاسبه شده باشد. در نهایت، معادله‌ی حاکم (۲۰) به صورت معادله‌ی (۳۲) قابل بیان است:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \alpha_0 \bar{f} \Delta\theta \quad (32)$$



شکل ۳. اختلاف نسبی بین $\bar{f}$ و $f(\theta)$ به عنوان تابعی از $\theta_{\max}$ (محور عمودی در مقیاس لگاریتمی رسم شده است).

خطا در بیشترین $\theta_{\max}$ مورد بررسی، یعنی در $\theta_{\max} = 1000^\circ\text{C}$

رخ می‌دهد. حتی در این دمای بالا نیز، خطای نسبی کمتر از ۰/۰۲ یا ۰/۲٪ است.

۴-۸ رفتار مجانبی مدل‌ها در حالت پایا

اگر برای یک مسئله، در حالت حدی $t \rightarrow \infty$ یک حل حالت پایا وجود داشته باشد، آگاهی از رفتار حالت پایای این مدل‌ها اهمیت دارد. از معادلات حاکم به‌وضوح پیداست که مدل‌های ۱ و ۲ به مدل خطی هدایت حرارت در حالت پایا، یعنی معادله‌ی لاپلاس برای دمای فیزیکی، میل می‌کنند. اما سایر مدل‌ها به مدل غیرخطی هدایت حرارت در حالت پایا، یعنی معادله‌ی (۱۲) برای دمای فیزیکی T یا معادله‌ی (۱۸) برای دمای تبدیل‌یافته θ ، میل می‌کنند. بنابراین، پاسخ سایر مدل‌ها بجز مدل‌های ۱ و ۲ در حالت پایا به پاسخ صحیح میل می‌کند در حالی که پاسخ مدل‌های ۱ و ۲ در حالت پایا مقداری خطا خواهد داشت.

۵. نتایج شبیه‌سازی عددی و بحث

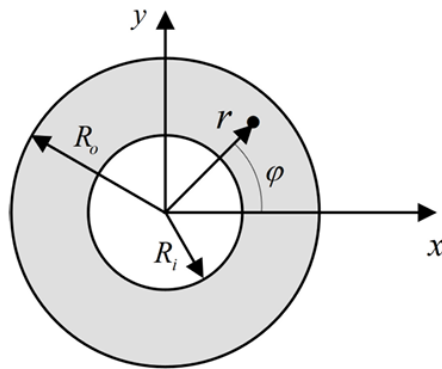
در این بخش، مدل‌های ریاضی توسعه‌یافته در بخش ۴ روی یک مسئله‌ی نمونه اعمال شده و به‌صورت عددی حل می‌شوند تا دقت مدل‌های ارائه‌شده مورد بررسی قرار گیرد. تحلیل ارائه‌شده در این مقاله به هیچ روش حل خاصی وابسته نیست. این مدل‌ها را می‌توان با هر روش عددی یا تحلیلی که برای حل معادله‌ی حاکم مربوطه مناسب باشد، به‌کار برد.

۴-۶ خواص λ و ρc وابسته به دما (مدل ششم)

در این حالت، تابع (۲۱) بر اساس رابطه‌ی (۲۳) خطی‌سازی می‌شود و در نتیجه مدل ریاضی حاکم همان معادله‌ی (۲۴) است. برای آن‌که این روش قابل استفاده باشد، لازم است مقدار ε_3 از طریق یک الگوریتم برازش خطی محاسبه شود. به‌عنوان مثال، با استفاده از مقادیر عددی داده‌شده در روابط (۸-الف) و (۸-ب)، مقدار $\varepsilon_3 = 8.2857 \times 10^{-4}$ از فرآیند بهترین برازش خطی به‌دست می‌آید. برای برازش انجام شده، نرم خطای مطلق برابر با $\|f(\theta) - (1 - \varepsilon_3\theta)\|_\infty = 0.0353$ است که در آن نماد $\|\cdot\|_\infty$ نشان دهنده‌ی نرم بی‌نهایت است.

۴-۷ خواص λ و ρc وابسته به دما (مدل هفتم)

در این حالت، هیچ‌گونه ساده‌سازی انجام نمی‌شود و معادله‌ی کامل غیرخطی (۱۰) برای دمای فیزیکی T ، یا به‌طور معادل، معادلات کامل غیرخطی (۲۰) و (۲۱) برای دمای تبدیل‌یافته θ حل می‌شوند. در هر دو حالت، یک مدل ریاضی دقیق در اختیار داریم که در آن هیچ‌گونه ساده‌سازی صورت نگرفته است.



شکل ۴. نمای شماتیک هندسه‌ی استوانه‌ی توخالی به همراه سیستم‌های مختصات کارتزین و قطبی که در آن $r \in [R_i, R_o]$ است.

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_j^n = \frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{\delta r^2} + O(\delta r^2) \quad (34\text{-ب})$$

که در آن، زیرنویس j نشان‌دهنده‌ی اندیس گره در شبکه‌ی مکانی است، در حالی که بالانویس n شماره‌ی گام زمانی را مشخص می‌کند. برای انتگرال‌گیری زمانی از طرح رانگ-کوتای صریح مرتبه‌ی سوم با حافظه‌ی کم [۳۹] استفاده شده است.

شرایط مرزی از نوع اول بر روی سطوح داخلی و خارجی در نظر گرفته شده است. ابتدا مسئله‌ای با شرایط مرزی مستقل از زمان حل می‌شود. دمای سطح داخلی و خارجی به ترتیب برابر با مقادیر نشان داده شده در معادلات (۳۵-الف) و (۳۵-ب) هستند:

$$T_i = T(r = R_i, t) = 0^\circ\text{C} \quad (35\text{-الف})$$

$$T_o = T(r = R_o, t) = 1000^\circ\text{C} \quad (35\text{-ب})$$

شرایط اولیه هم به صورت دمای یکنواخت صفر در نظر گرفته شده است. هنگامی که از مدل‌هایی با دمای تبدیل یافته θ استفاده می‌شود، دماهای مرزی باید از طریق معادله‌ی (۱۴) تبدیل شوند، یعنی

$$\theta_i = T_i - \frac{\varepsilon_2}{2} T_i^2 \quad (35\text{-پ})$$

$$\theta_o = T_o - \frac{\varepsilon_2}{2} T_o^2 \quad (35\text{-ت})$$

اعتبارسنجی کد رایانه‌ای از طریق مقایسه با حل‌های تحلیلی موجود برای حالتی که خواص ماده مستقل از دما هستند انجام شده است. اما برای اختصار، نتایج آن در اینجا ارائه نشده‌اند. همچنین آزمون همگرایی شبکه نیز صورت گرفته است. نمودار

به عنوان مسئله‌ی آزمایشی، هدایت حرارت گذرا و متقارن محوری را در راستای شعاعی یک پوسته‌ی استوانه‌ای با طول بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود. شعاع‌های داخلی و خارجی استوانه به ترتیب با R_i و R_o نشان داده می‌شوند. در شبیه‌سازی‌های ارائه شده، نسبت بدون بُعد شعاع داخلی به خارجی برابر $R_i/R_o = 0.5$ در نظر گرفته شده است. این پیکربندی به صورت شماتیک در شکل ۴ نشان داده شده است.

با فرضیات فوق، میدان دما (دمای فیزیکی و دمای تبدیل یافته) تابعی از راستای شعاعی r و زمان t ، یعنی $T = T(r, t)$ یا $\theta = \theta(r, t)$ است. مختصات شعاعی r با شعاع خارجی R_o بدون بُعد می‌شود و زمان t نیز با عدد بدون بُعد فوریه $Fo = \alpha_0 t / R_o^2$ نمایش داده می‌شود. عملگرهای مشتق مکانی نابلا و لاپلاسین مورد نیاز برای این مسئله به صورت معادلات (۳۳) هستند:

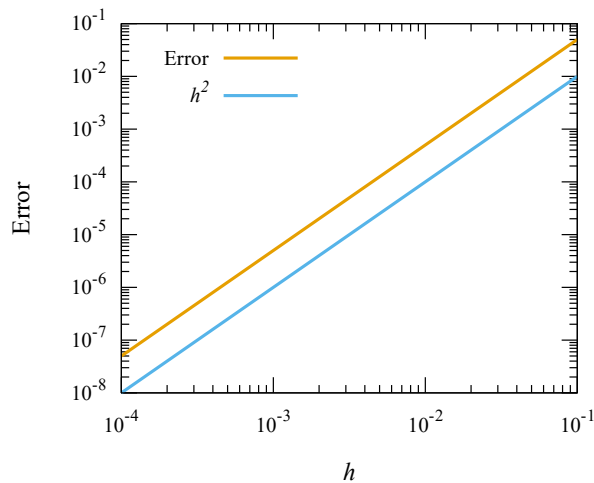
$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \quad (33\text{-الف})$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (33\text{-ب})$$

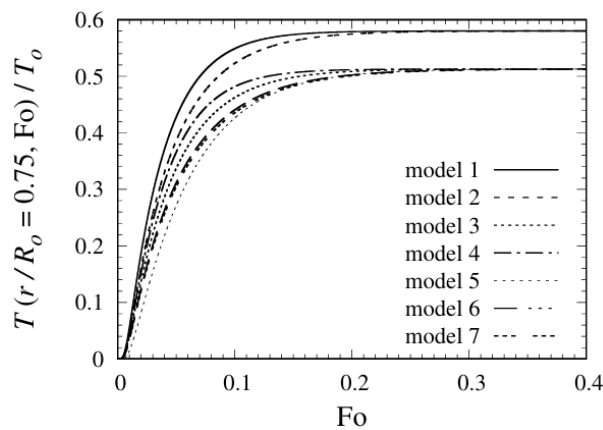
که در آن $\mathbf{e}_r$ بردار پایه‌ی یکه در جهت شعاعی r است.

حل عددی مسئله برای هر مدل با استفاده از طرح تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم (CDS2) برای گسسته‌سازی مکانی به دست آمده است:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_j^n = \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\delta r} + O(\delta r^2) \quad (34\text{-الف})$$



شکل ۵. نمودار همگرایی برای مثال اول در حالت دائم



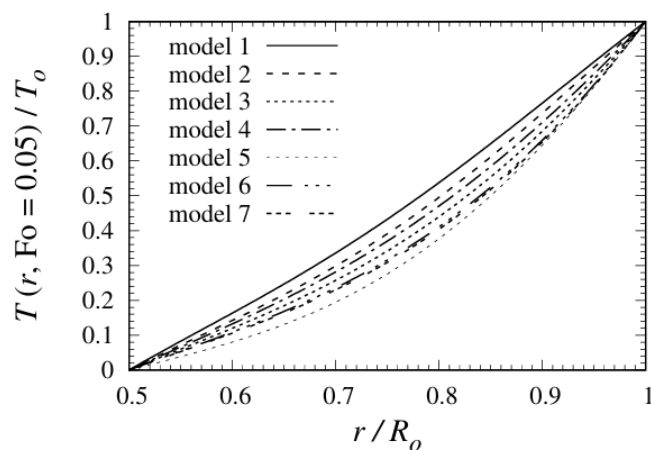
شکل ۶. دمای بدون بُعد مثال اول (شرایط مرزی مستقل از زمان) در سطح میانی پوسته استوانه‌ای به صورت تابعی از Fo

۶ تغییرات زمانی دما را با دقت بسیار بالایی پیش‌بینی می‌کند. مدل‌های ۵ و ۳ دقت کمتری دارند، اما دقت آن‌ها هنوز قابل قبول است. مدل ۴ در فاز گذرا دقت کمتری دارد. با این حال، تمام این مدل‌ها به حل درست حالت پایا میل می‌کنند. مدل‌های ۱ و ۲ کمترین دقت را دارند و علاوه بر آن، به حل نادرست حالت پایا میل می‌کنند، همان‌طور که به‌طور تئوری در زیربخش ۴-۸ نشان داده شد.

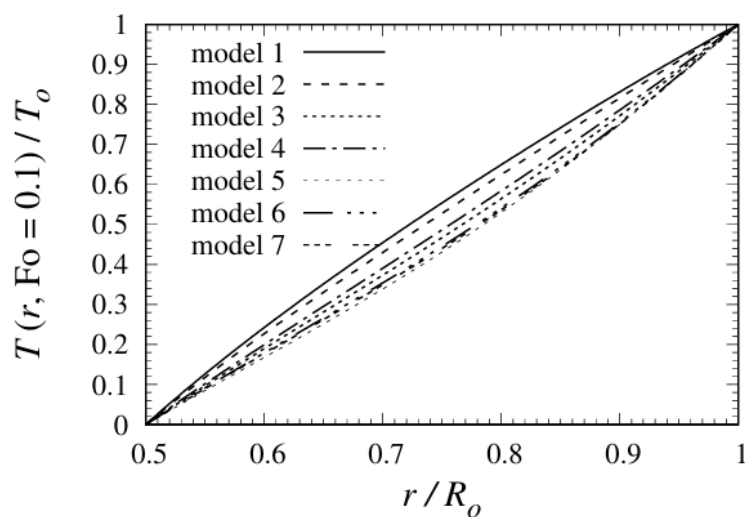
شکل‌های ۷، ۸، ۹ و ۱۰ میدان دما را به صورت تابعی از جهت شعاعی بدون بُعد r/R_0 به ترتیب برای $Fo = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ را نشان می‌دهند. در مقایسه با نتایج حاصل از شکل ۶، رفتار مشابهی از نظر دقت مدل‌ها مشاهده می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که در این پیکره‌بندی، مدل ۵ همواره

همگرایی برای مثال اول، پس از اینکه حل به حالت دائم رسید، در شکل ۵ نشان داده شده است. در این نمودار، نرم خطای حل بر حسب اندازه‌ی سلول محاسباتی $h = \delta r$ در مقیاس لگاریتمی رسم شده است. ضمناً منحنی $Error = h^2$ نیز در کنار آن رسم شده و توازی دو خط نشان می‌دهد که دقت و نرخ همگرایی مرتبه‌ی دوم حاصل شده است.

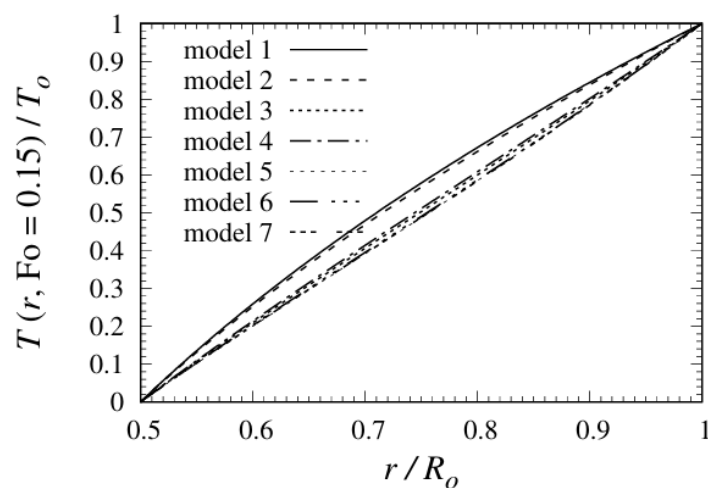
شکل ۶ تغییرات زمانی دما در نقطه $r/R_0 = 0.75$ را نشان می‌دهد، یعنی دما در این نقطه بر حسب زمان بدون بُعد Fo رسم شده است. در تمام شبیه‌سازی‌های ارائه‌شده، مدل ۷ به عنوان حل مرجع در نظر گرفته می‌شود، زیرا این مدل از معادله‌ی غیرخطی کامل بدون هیچ ساده‌سازی استفاده می‌کند. مشاهده می‌شود که مدل



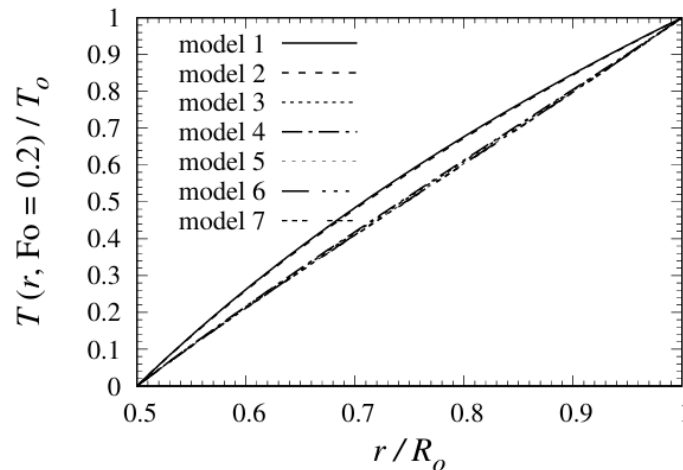
شکل ۷. دمای بدون بُعد مثال اول (شرایط مرزی مستقل از زمان) به صورت تابعی از شعاع بدون بُعد r/R_0 در $Fo = 0.05$



شکل ۸. دمای بدون بُعد مثال اول (شرایط مرزی مستقل از زمان) به صورت تابعی از شعاع بدون بُعد r/R_0 در $Fo = 0.1$



شکل ۹. دمای بدون بُعد مثال اول (شرایط مرزی مستقل از زمان) به صورت تابعی از شعاع بدون بُعد r/R_0 در $Fo = 0.15$



شکل ۱۰. دمای بدون بُعد مثال اول (شرایط مرزی مستقل از زمان) به صورت تابعی از شعاع بدون بُعد r/R_0 در $Fo = 0.2$

تغییرات زمانی دما، یعنی دما در نقطه‌ی ثابت $r/R_0 = 0.95$ به صورت تابعی از زمان بدون بُعد Fo ، در شکل ۱۳ نشان داده شده است. به جز مدل ۶ که بسیار نزدیک به حل مرجع مدل ۷ است، سایر مدل‌ها هم خطای دامنه و هم خطای فاز دارند. تمامی مدل‌ها دامنه را بیش از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کنند و همگی تأخیر فاز از خود نشان می‌دهند. دقت مدل‌های مختلف مشابه، حالت قبل هستند.

۶. ارزیابی حل تحلیلی مسئله

در میان مدل‌های ارائه شده در بخش ۴، مدل‌های ۱، ۴ و ۵ برای حل‌های تحلیلی مناسب هستند. زیرا این مدل‌ها شامل حل معادله‌ی حاکم خطی برحسب دمای فیزیکی T (برای مدل ۱) یا دمای تبدیل یافته θ (برای مدل‌های ۴ و ۵) هستند. به عنوان مثال، یک میله به طول L در نظر بگیرید. دمای اولیه‌ی آن برابر با $T(x, t = 0) = 0$ فرض می‌شود. شرایط مرزی نیز به صورت $T(x = 1, t) = T_L = 1000^\circ\text{C}$ و $T(x = 0, t) = 0$ هستند. هدایت حرارت غیرخطی در این میله با استفاده از مدل‌های ۱، ۴ و ۵ به صورت تحلیلی حل می‌شود. به سادگی می‌توان نشان داد که حل تحلیلی مدل ۱ به شکل معادله‌ی (۳۷) خواهد بود:

دما را کمتر از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کند، در حالی که مدل‌های ۳ و ۴ همواره دما را بیش از مقدار واقعی برآورد می‌کنند. تا اینجا، مسئله‌ای با شرایط مرزی مستقل از زمان حل شد که در آن دما نهایتاً به یک حالت پایا میل می‌کند. اکنون، مسئله‌ای با همان پیکره‌بندی اما با شرایط مرزی وابسته به زمان را حل می‌شود. برخلاف مسئله‌ی قبل، این مسئله برای زمان‌های بزرگ به حالت پایا میل نمی‌کند. شرایط مرزی وابسته به زمان به صورت معادلات (۳۶-الف) و (۳۶-ب) هستند:

$$(۳۶)$$

$$T(r = R_i, t) = 0^\circ\text{C}$$

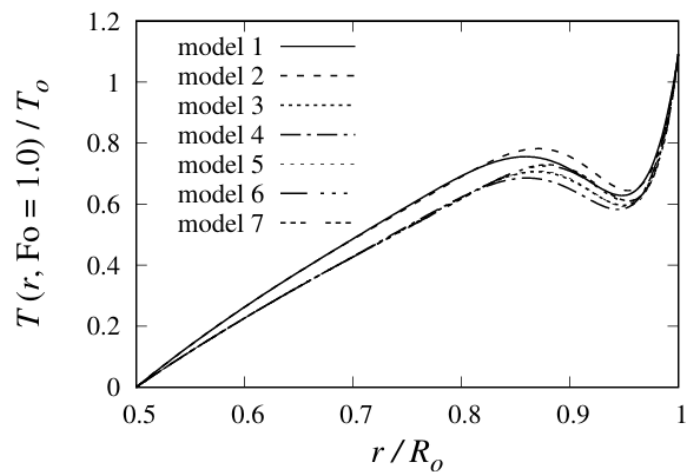
(الف)

$$(۳۶)$$

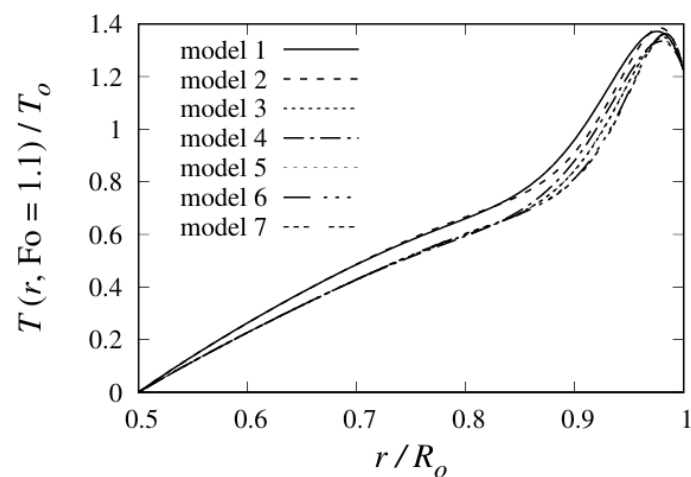
$$T(r = R_o, t) = T_o \sin(\omega_o t)$$

(ب)

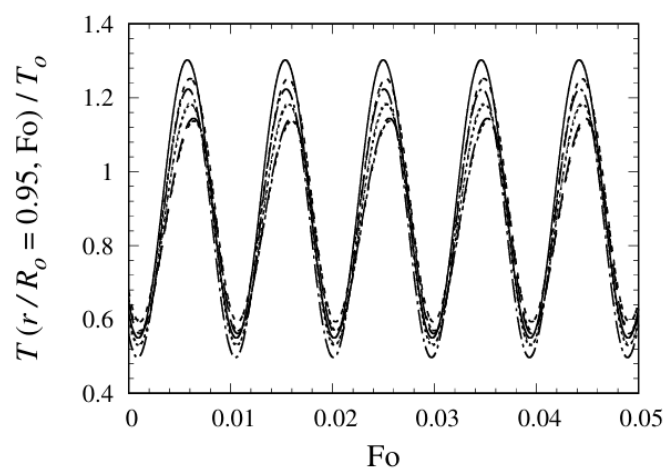
که در آن T_o و ω_o به ترتیب دامنه و فرکانس زاویه‌ای بارگذاری حرارتی را نشان می‌دهند. شرایط اولیه به صورت دمای یکنواخت صفر در نظر گرفته شده است. پروفیل‌های دما به صورت تابعی از r/R_0 برای $Fo = 1.0$ و $Fo = 1.1$ به ترتیب در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ رسم شده‌اند. دوباره مشاهده می‌شود که نتایج مدل ۶ بسیار نزدیک به حل مرجع مدل ۷ است. نتایج مدل‌های ۳ و ۵ نیز به هم بسیار نزدیک هستند و تنها اختلاف کمی نسبت به حل مرجع دارند. مدل ۴ کمی دقت کمتری نسبت به مدل‌های ۳ و ۵ دارد. مدل‌های ۱ و ۲ بیشترین اختلاف را با حل مرجع نشان می‌دهند.



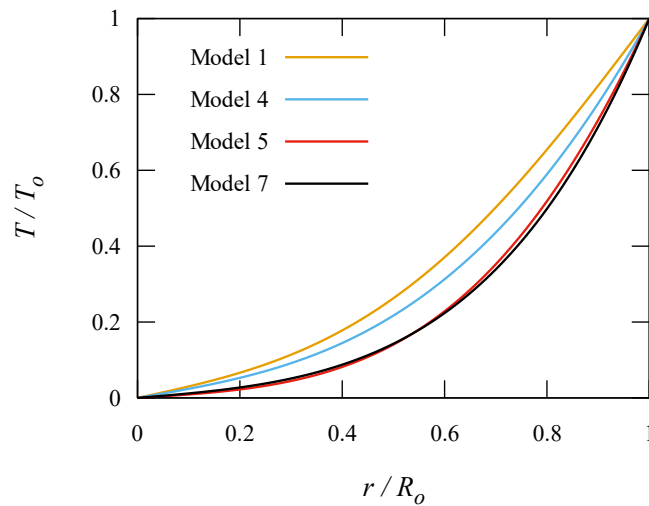
شکل ۱۱. دمای بدون بُعد مثال دوم (شرایط مرزی وابسته به زمان) به صورت تابعی از شعاع بدون بُعد r/R_0 در $Fo = 1.0$



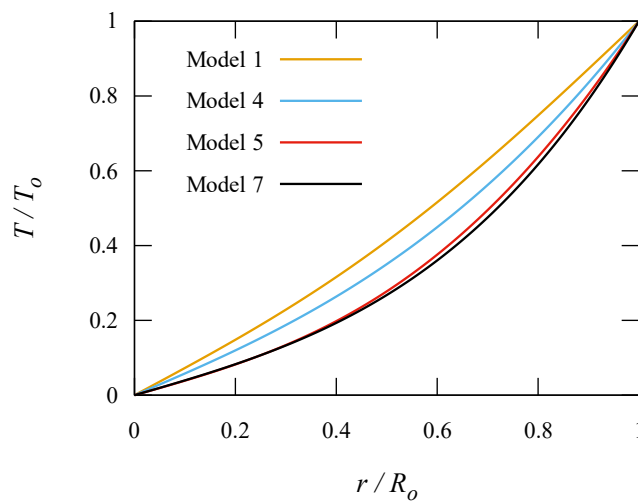
شکل ۱۲. دمای بدون بُعد مثال دوم (شرایط مرزی وابسته به زمان) به صورت تابعی از شعاع بدون بُعد r/R_0 در $Fo = 1.1$



شکل ۱۳. دمای بدون بُعد مثال دوم (شرایط مرزی وابسته به زمان) به صورت تابعی از زمان بدون بُعد Fo در $r/R_0 = 0.95$. راهنمای خطوط مطابق شکل ۱۲ است



شکل ۱۴. حل تحلیلی مدل‌های ۱، ۴ و ۵ همراه با حل عددی مدل غیرخطی کامل ۷ در $Fo = 0.1$



شکل ۱۵. حل تحلیلی مدل‌های ۱، ۴ و ۵ همراه با حل عددی مدل غیرخطی کامل ۷ در $Fo = 0.2$

$$\theta_L = T_L - \frac{\varepsilon_2}{2} T_L^2 \quad (39)$$

حل تحلیلی مدل ۴ همان حل تحلیلی مدل ۵ است، به شرطی که در معادله‌ی (۳۸) مقدار $\bar{f} = 1$ برگزیده شود.

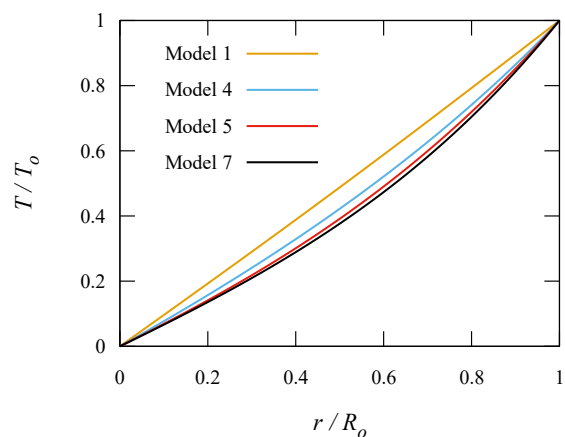
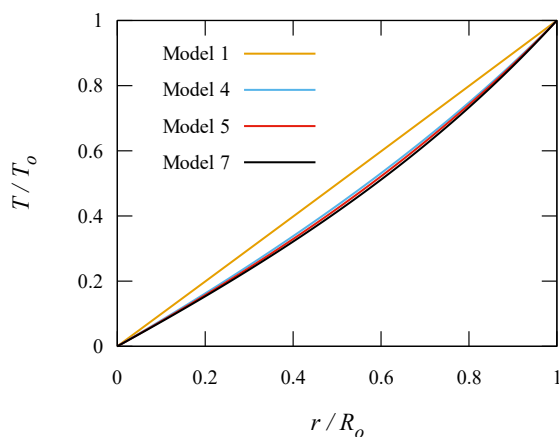
شکل‌های ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸ و ۱۹ به ترتیب پروفیل‌های دما را در $Fo = \alpha_0 t / L^2 = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ نشان می‌دهند. می‌توان گفت که در $Fo = 1.0$ حالت پایا تقریباً حاصل شده است. پروفیل‌های دما با استفاده از مدل‌های ۱، ۴ و ۵ به دست آمده‌اند. علاوه بر این، پروفیل‌های دمای حاصل از حل عددی

$$\begin{aligned} \frac{T(r, t)}{T_L} &= \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\alpha_0 n^2 \pi^2 t / L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (37)$$

همچنین، حل تحلیلی مدل ۵ برای این مسئله عبارتست از

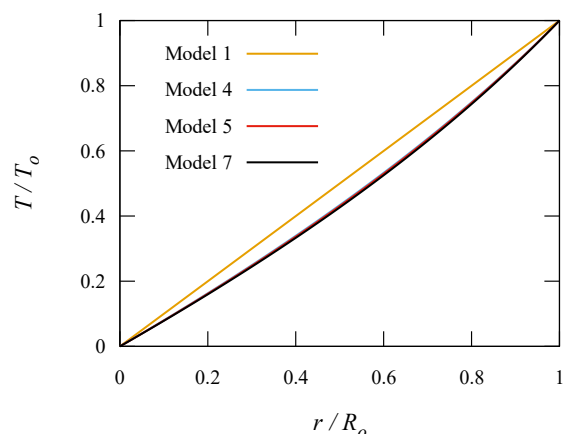
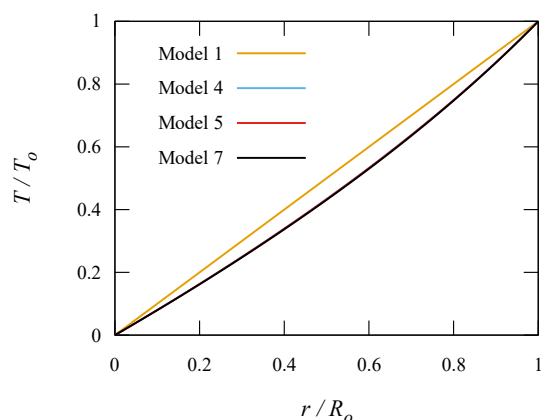
$$\begin{aligned} \frac{\theta(r, t)}{\theta_L} &= \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\alpha_0 \bar{f} n^2 \pi^2 t / L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (38)$$

که در آن θ_L دمای مرزی تبدیل یافته است:



شکل ۱۶. حل تحلیلی مدل‌های ۱، ۴ و ۵ همراه با حل عددی مدل غیرخطی کامل ۷ در $Fo = 0.4$

شکل ۱۷. حل تحلیلی مدل‌های ۱، ۴ و ۵ همراه با حل عددی مدل غیرخطی کامل ۷ در $Fo = 0.6$



شکل ۱۸. حل تحلیلی مدل‌های ۱، ۴ و ۵ همراه با حل عددی مدل غیرخطی کامل ۷ در $Fo = 1.0$ (نمودارهای مدل‌های ۴، ۵ و ۷ تقریباً بر هم منطبق شده‌اند).

شکل ۱۹. حل تحلیلی مدل‌های ۱، ۴ و ۵ همراه با حل عددی مدل غیرخطی کامل ۷ در $Fo = 0.8$ (نمودارهای مدل‌های ۴، ۵ و ۷ تقریباً بر هم منطبق شده‌اند).

دارد، اما اختلاف بین آن‌ها با نزدیک شدن به حالت پایا به تدریج کاهش می‌یابد. در حالت پایا، مدل ۴ با داده‌های مرجع مطابقت دارد. مدل ۵ رفتار گذرای دقیقی را نشان می‌دهد و یک مدل امیدوارکننده برای شبیه‌سازی مسائل غیرخطی گذرا است. این مدل به صورت خطی برحسب دمای تبدیل یافته است و امکان حل تحلیلی را فراهم می‌کند. علاوه بر این، از آنجا که معادله‌ی حاکم مدل ۵ فرم ریاضی مشابه معادله‌ی هدایت حرارت گذرا با خواص ثابت (مدل ۱) دارد، تمام تکنیک‌های تحلیلی

دقیق مدل غیرخطی کامل ۷ نیز برای مقایسه رسم شده‌اند. مدل ۷ هیچ ساده‌سازی انجام نمی‌دهد و می‌توان حل آن را به عنوان حل مرجع در نظر گرفت.

مشاهده می‌شود که مدل ۱ (خواص ثابت) پروفیل‌های دمایی را پیش‌بینی می‌کند که در تمام اعداد فوریه به طور قابل توجهی با حل مرجع تفاوت دارند. همچنین، مدل ۱ یک حل حالت پایای متفاوت را پیش‌بینی می‌کند. میدان دمای پیش‌بینی شده توسط مدل ۴ در طول فاز گذرا به طور قابل توجهی از حل مرجع انحراف

جدول ۱. نرم بی‌نهایت خطای نسبی داده‌های نشان داده شده در شکل‌های ۱۴ تا ۱۹ برای مدل‌های مختلف نسبت به حل مدل ۷

داده‌ها	مدل ۱	مدل ۴	مدل ۵
شکل ۱۴	۰/۱۶۴۴	۰/۰۹۷۳	۰/۰۲۰۶
شکل ۱۵	۰/۱۵۶۶	۰/۰۸۹۳	۰/۰۲۰۷
شکل ۱۶	۰/۱۱۵۱	۰/۰۴۷۸	۰/۰۱۷۵
شکل ۱۷	۰/۰۸۷۲	۰/۰۱۹۹	۰/۰۱۰۲
شکل ۱۸	۰/۰۷۴۵	۰/۰۰۷۶۶	۰/۰۰۴۸۷
شکل ۱۹	۰/۰۷۰۲	۰/۰۰۲۸۷	۰/۰۰۲۱۰

با فرض اینکه $1 \ll \varepsilon_3$ ، می‌توان میدان دمای تبدیل‌یافته θ را به صورت یک سری مجانبی بسط داد:

$$\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_3^i \theta_i \quad (۴۰)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۴۰) در معادله‌ی حاکم (۲۴) و جداسازی مرتبه‌های مختلف ε_3 ، می‌توان نوشت:

$$O(\varepsilon_3^0): \frac{\partial \theta_0}{\partial t} = \alpha_0 \Delta \theta_0 \quad (۴۱-الف)$$

$$O(\varepsilon_3^1): \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \alpha_0 \Delta \theta_1 - \theta_0 \Delta \theta_0 \quad (۴۱-ب)$$

$$O(\varepsilon_3^2): \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \alpha_0 \Delta \theta_2 - \theta_0 \Delta \theta_1 - \theta_1 \Delta \theta_0 \quad (۴۱-پ)$$

که در آن θ_0 ، θ_1 و θ_2 مراتب مختلف تقریب مجانبی θ هستند. از نظر تئوری، این روش می‌تواند تا هر مرتبه‌ای از ε_3 ادامه یابد. در این مقاله، ما خود را به مرتبه‌ی دوم محدود می‌شود. معادلات (۴۱) تحت شرایط مرزی (۴۲) قرار دارند [۱۱]:

$$O(\varepsilon_3^0): \begin{aligned} \theta_0(r = R_i, t) &= \theta_i \\ \theta_0(r = R_o, t) &= \theta_o \end{aligned} \quad (۴۲-الف)$$

$$O(\varepsilon_3^1): \begin{aligned} \theta_1(r = R_i, t) &= 0 \\ \theta_1(r = R_o, t) &= 0 \end{aligned} \quad (۴۲-ب)$$

$$O(\varepsilon_3^2): \begin{aligned} \theta_2(r = R_i, t) &= 0 \\ \theta_2(r = R_o, t) &= 0 \end{aligned} \quad (۴۲-پ)$$

به عبارت دیگر؛ شرایط مرزی غیرهمگن در مرتبه‌ی صفر برقرار می‌شوند و تقریب‌های مرتبه بالاتر تحت شرایط مرزی همگن قرار می‌گیرند. علاوه بر این، شرایط مرزی (۴۲) برای انتقال حرارت گذرا در راستای شعاعی یک استوانه فرموله شده‌اند، اما می‌توان آن‌ها را به صورت مشابه برای هر مسئله‌ای در حالت کلی فرموله کرد. علاوه بر این، شرایط اولیه مورد نیاز برای حل معادلات (۴۱) عبارتند از:

توسعه‌یافته برای هدایت حرارت مرسوم می‌توانند برای مدل ۵ نیز استفاده شوند. همچنین، رفتار حالت پایای مدل ۵ صحیح است. همچنین نرم بی‌نهایت خطای نسبی برای داده‌های نشان داده شده در شکل‌های ۱۴ تا ۱۹ در جدول ۱ نشان داده شده‌اند.

۷. ارزیابی خطی‌سازی مدل ششم

در این حالت، معادله‌ی حاکم برحسب دمای تبدیل‌یافته θ معادله‌ی (۲۴) است. به دلایل مختلف، مانند به دست آوردن حل‌های تحلیلی و یا اعمال روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی زمانی با هزینه‌ی محاسباتی کم، ممکن است نیاز به تقریب خطی از معادله‌ی (۲۴) وجود داشته باشد. یکی از این تقریب‌ها مدل ۵ است. دو کاربرد بالقوه‌ی دیگر مدل‌های خطی؛ کنترل میدان دما، زیرا کنترل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی بسیار پیچیده است (مراجعه به [۴۱]) - و حل مسائل انتقال حرارت معکوس گذرا (مراجعه به [۳۳ و ۳۴]) هستند. در این بخش، پیشنهاد دیگری برای خطی‌سازی این مدل بر اساس روش اغتشاش پوانکاره [۴۲ و ۴۳] ارائه شده است. بدین ترتیب، یک سری از معادلات دیفرانسیل جزئی خطی جایگزین معادله‌ی دیفرانسیل جزئی غیرخطی اصلی می‌شوند. اغلب، تعداد کمی از جملات در سری مجانبی دقت کافی را به دست می‌دهند، به شرطی که مقدار پارامتر ε_3 کوچک باشد که معمولاً برای مواد مهندسی مانند فولاد این فرض برقرار است.

جدول ۲: نرم بی نهایت خطای نسبی داده‌های نشان داده شده در شکل‌های ۲۰ تا ۲۷ برای تقریب‌های مختلف نسبت به حل مرجع مدل ۷

داده‌ها	T_0	T_1	T_2
شکل ۲۰	۰/۰۶۰۹	۰/۰۱۸۲	۰/۰۰۹۴۴
شکل ۲۱	۰/۰۶۳۵	۰/۰۱۸۸	۰/۰۰۹۷۱
شکل ۲۲	۰/۰۶۷۲	۰/۰۱۹۸	۰/۰۱۰۱
شکل ۲۳	۰/۰۶۵۸	۰/۰۲۱۲	۰/۰۱۰۲
شکل ۲۴	۰/۰۵۸۲	۰/۰۲۲۰	۰/۰۱۰۲
شکل ۲۵	۰/۰۴۷۸	۰/۰۲۱۴	۰/۰۱۰۰
شکل ۲۶	۰/۰۱۰۸	۰/۰۰۸۱۵	۰/۰۰۵۳۸
شکل ۲۷	$۵/۲۲۰۴ \times ۱۰^{-۹}$	$۵/۲۱۹۳ \times ۱۰^{-۹}$	$۵/۲۱۸۱ \times ۱۰^{-۹}$

لازم به ذکر است که معادله‌ی مرتبه‌ی صفر همان مدل ۴ است که رفتار آن پیش‌تر مورد بررسی قرار گرفته بود. حل‌های مرتبه‌ی اول و دوم بسیار دقیق هستند و همان‌طور که انتظار می‌رود، حل مرتبه‌ی دوم کمی از حل مرتبه‌ی اول دقیق‌تر است. با میل کردن پاسخ به سمت حالت پایا، همه‌ی مراتب تقریب دقت بالا خواهند داشت. با توجه به نتایج نشان داده شده برای مقادیر مشخص ε_3 و T_0 ، به نظر می‌رسد حتی تصحیح مرتبه‌ی اول برای به‌دست آوردن نتایج دقیق کافی باشد و حل‌های مرتبه‌ی بالاتر لازم نیست. با این حال، برای مقادیر بزرگ‌تر ε_3 ، تقریب‌های مرتبه‌ی بالاتر (مرتبه‌ی دوم یا شاید حتی بالاتر) مورد نیاز خواهند بود. مقدار $T_0 = 1000^\circ\text{C}$ به خودی خود بزرگ است و برای مقادیر کوچک‌تر T_0 ، مراتب تقریب دقت بیشتری دارند. رویکرد مذکور مبتنی بر روش اغتشاش پوانکاره، یک مدل خطی دقیق و از نظر محاسباتی ارزان برای حل مسائل گذرای غیرخطی ارائه می‌دهد. همچنین نرم بی نهایت خطای نسبی برای داده‌های نشان داده شده در شکل‌های ۲۰ تا ۲۷ در جدول ۲ نشان داده شده‌اند.

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله، چندین مدل ممکن برای تحلیل مسئله‌ی هدایت حرارت گذرای غیرخطی در مواد همگن ارائه شده است. غیرخطی بودن مسئله ناشی از وابستگی خواص ماده به دما است.

$$\theta_0(r, t = 0) = \theta(r, t = 0) \quad (۴۳\text{-الف})$$

$$\theta_1(r, t = 0) = \theta_2(r, t = 0) = 0 \quad (۴۳\text{-ب})$$

شرط اولیه‌ی معادله‌ی اصلی (۲۴) توسط حل مرتبه‌ی صفر برآورده می‌شود و شرایط اولیه‌ی معادلات مرتبه‌ی بالاتر به‌سادگی برابر با صفر در نظر گرفته می‌شوند.

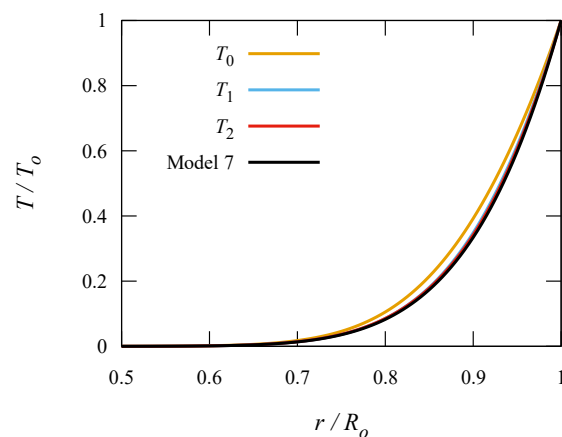
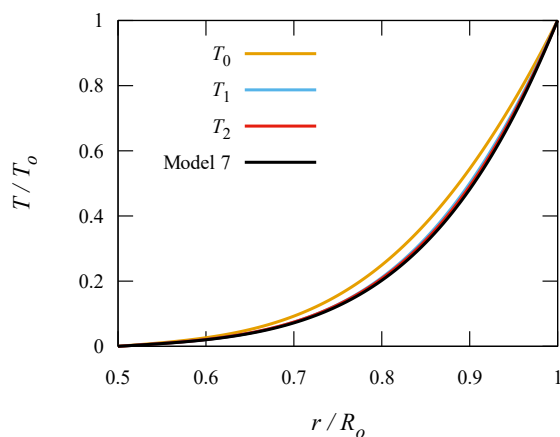
هنگامی که حل معادلات خطی‌شده‌ی (۴۱) تحت شرایط مرزی (۴۲) حل شدند، میدان دمای تقریبی با استفاده از رابطه‌ی (۴۴) بازسازی می‌شود:

$$\theta = \sum_{i=0}^2 \varepsilon_3^i \theta_i + O(\varepsilon_3^3) \quad (۴۴)$$

این یک تقریب سری قطع‌شده از معادله‌ی (۴۰) است که خطای باقیمانده‌ی آن متناسب با ε_3^3 است.

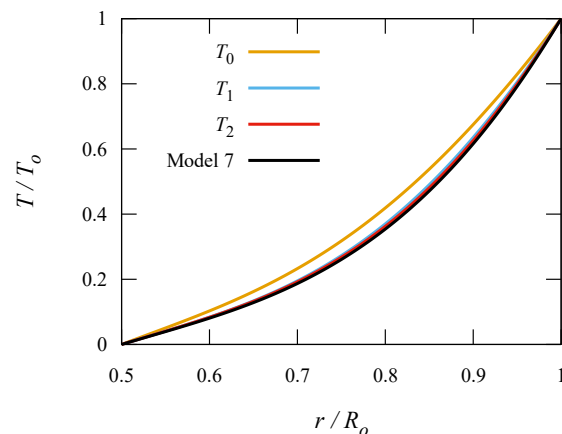
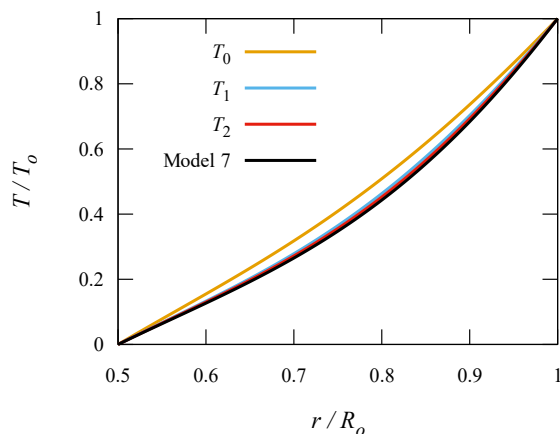
معادلات (۴۱) به‌صورت عددی برای مسئله‌ی آزمایشی، یعنی هدایت یک‌بعدی گذرا در راستای شعاعی یک استوانه‌ی توخالی، حل شده‌اند. پس از به‌دست آوردن دماهای تقریبی تبدیل‌یافته θ_0 ، θ_1 و θ_2 ، این دماها باید با استفاده از معادله‌ی (۱۵) معکوس شوند تا T_0 ، T_1 و T_2 حاصل شود. همچنین، نتایج مدل ۷ به‌عنوان حل مرجع رسم شده‌اند.

در شکل‌های ۲۰ تا ۲۷، به ترتیب پروفیل‌های دمای حاصل برای $Fo = 0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.2, 1.0$ بر حسب شعاع بی‌بعد r/R_0 نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که حل مرتبه‌ی صفر به‌طور قابل توجهی از حل مرجع انحراف دارد.



شکل ۲۰: حل عددی تقریب اغتشاشی مدل ۵ برای یک استوانه‌ی توخالی همراه با حل عددی مدل ۷ در $Fo = 0.01$ (نمودار T_2 و مدل ۷ تقریباً بر هم منطبق هستند).

شکل ۲۱: حل عددی تقریب اغتشاشی مدل ۵ برای یک استوانه‌ی توخالی همراه با حل عددی مدل ۷ در $Fo = 0.02$ (نمودار T_2 و مدل ۷ تقریباً بر هم منطبق هستند).

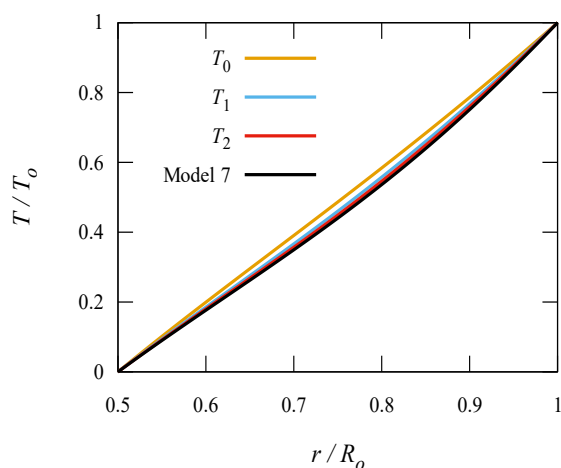


شکل ۲۲: حل عددی تقریب اغتشاشی مدل ۵ برای یک استوانه‌ی توخالی همراه با حل عددی مدل ۷ در $Fo = 0.04$ (نمودار T_2 و مدل ۷ تقریباً بر هم منطبق هستند).

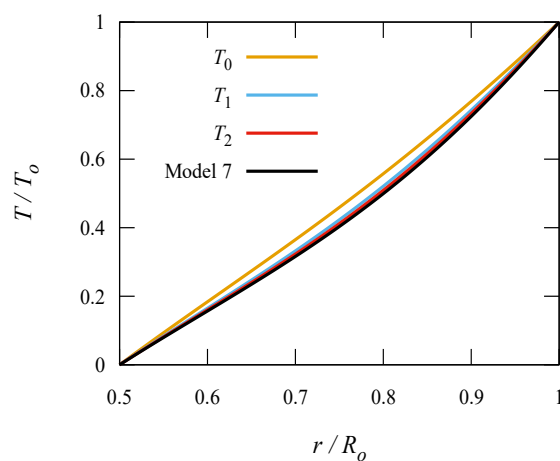
شکل ۲۳: حل عددی تقریب اغتشاشی مدل ۵ برای یک استوانه‌ی توخالی همراه با حل عددی مدل ۷ در $Fo = 0.06$ (نمودار T_2 و مدل ۷ تقریباً بر هم منطبق هستند).

مدل‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ نتایجی با دقت قابل قبول ارائه می‌دهند، در حالی که مدل ۷ حل مرجع را فراهم می‌کند. مدل‌های ۱ و ۲ دقت بالایی نشان نمی‌دهند. مدل‌های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ حل صحیح حالت پایا را پیش‌بینی می‌کنند، در حالی که مدل‌های ۱ و ۲ قادر به پیش‌بینی صحیح حل حالت پایا نیستند. مدل ۶ در تمام آزمون‌ها بالاترین دقت را در مقایسه با حل مرجع مدل ۷ دارد. نکته‌ی بسیار مهم این است که مدل‌های ۴ و ۵ برحسب میدان

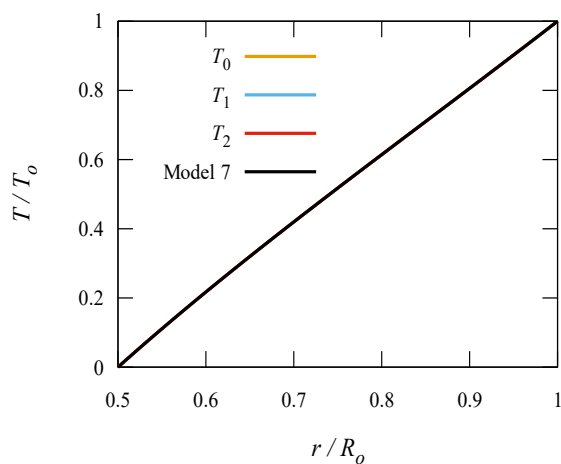
معادله‌ی حاکم بر مسئله به‌طور دقیق استخراج شده است. تبدیل کیرشهف، که برای انتقال حرارت غیرخطی حالت پایا شناخته شده است، بر روی معادله‌ی حاکم دقیق اعمال شده و معادله‌ی دقیق تبدیل‌شده به‌دست آمده است. بر اساس این تبدیل، چندین مدل طراحی شده‌اند. برخی از آن‌ها (یعنی مدل‌های ۴، ۵ و ۶) برای اولین بار پیشنهاد می‌شوند. دقت مدل‌ها با استفاده از شبیه‌سازی عددی یک مسئله‌ی آزمایشی مورد ارزیابی قرار گرفته است.



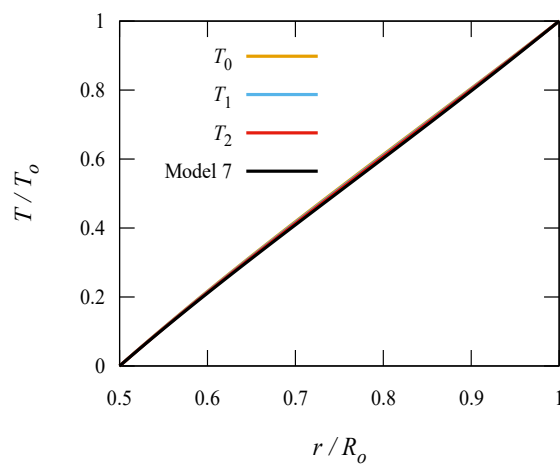
شکل ۲۵: حل عددی تقریب اغتشاشی مدل ۵ برای یک استوانه‌ی توخالی همراه با حل عددی مدل ۷ در $Fo = 0.1$ (نمودار T_2 و مدل ۷ تقریباً بر هم منطبق هستند).



شکل ۲۴: حل عددی تقریب اغتشاشی مدل ۵ برای یک استوانه‌ی توخالی همراه با حل عددی مدل ۷ در $Fo = 0.08$ (نمودار T_2 و مدل ۷ تقریباً بر هم منطبق هستند).



شکل ۲۷: حل عددی تقریب اغتشاشی مدل ۵ برای یک استوانه‌ی توخالی همراه با حل عددی مدل ۷ در $Fo = 1.0$ (همه‌ی نمودارها تقریباً بر هم منطبق هستند).



شکل ۲۶: حل عددی تقریب اغتشاشی مدل ۵ برای یک استوانه‌ی توخالی همراه با حل عددی مدل ۷ در $Fo = 0.2$ (همه‌ی نمودارها تقریباً بر هم منطبق هستند).

خوبی نشان می‌دهد. از نظر بار محاسباتی، مدل‌های ۱ و ۴ کمترین هزینه را دارند. حجم محاسباتی مدل‌های ۵ و ۶ نیز در بخش حل معادله دیفرانسیل تقریباً با مدل‌های ۱ و ۴ برابر است، اما مدل ۵ علاوه بر آن نیازمند محاسبه‌ی $\bar{T}$ و مدل ۶ نیازمند انجام یک برازش خطی است. پس از این مدل‌ها، مدل‌های ۲ و ۳ با فرمول‌بندی (۲۸) در رتبه بعدی قرار می‌گیرند و با اختلافی اندک،

دمای تبدیل‌شده خطی هستند. بنابراین، این مدل‌ها برای حل‌های تحلیلی، حل مسائل انتقال حرارت غیرخطی معکوس گذرا و کنترل میدان دما در حالت غیرخطی بسیار مفید هستند. کاربرد مدل‌های ۴ و ۵ در حل تحلیلی یک مسئله‌ی آزمایشی ارائه شده است و نتایج دقت قابل قبولی دارند. همچنین در انتها مدل ۶ به کمک روش اغتشاش پوانکاره خطی‌سازی شده و نتایج بسیار

مدل ۳ با فرمول‌بندی (۲۷) پس از آنها جای می‌گیرد. در نهایت،
مدل ۷ که مدل غیرخطی کامل است، بیشترین حجم محاسبات را

۹. مراجع

- Hahn, D. W. and Ozisik, M. N. Heat Conduction, 3rd Edition, Wiley, 2012.
- Trostel R. Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Stoffwerten. *Ingenieur-Archiv*. 1958; 26: 134-142.
<https://doi.org/10.1007/BF00535731>
- Trostel, R. Stationäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten. *Ingenieur-Archiv*. 1958; 26: 416-434.
<https://doi.org/10.1007/BF00533455>
- Stanisic, M. M. and McKinley, R. M. A note on the thermal stresses in hollow cylinders. *Ingenieur-Archiv*. 1959; 27: 227-241.
<https://doi.org/10.1007/BF00538344>
- Stanisic, M. M. and McKinley, R. M. On the steady thermoelastic problems with elastic characteristics depending on temperature. *Ingenieur-Archiv*, 1960; 29: 260-261.
<https://doi.org/10.1007/BF00536708>
- Stanisic, M. M. and McKinley, R. M. The steady-state thermal stress field in an isotropic sphere with temperature dependent properties. *Ingenieur-Archiv*. 1962; 31: 241-249.
<https://doi.org/10.1007/BF00536721>
- Krizek, M. and Liu, L. Finite element approximation of a nonlinear heat conduction problem in anisotropic media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1998; 157: 387-397.
[https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00247-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00247-8)
- Karageorghis, A. and Lesnic, D. Steady-state nonlinear heat conduction in composite materials using the method of fundamental solutions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008; 197: 3122-3137.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.02.011>
- Moosaie, A. Steady symmetrical temperature field in a hollow spherical particle with temperature-dependent thermal conductivity. *Archives of Mechanics*. 2012; 64: 405-422.
<https://am.ippt.pan.pl/index.php/am/article/view/v64p405>
- Moosaie, A. Axisymmetric steady temperature field in FGM cylindrical shells with temperature-dependent heat conductivity and arbitrary linear boundary conditions. *Archives of Mechanics*. 2015; 67: 233-251.,
<https://am.ippt.pan.pl/index.php/am/article/view/v67p233>
- Moosaie, A. A nonlinear analysis of thermal stresses in an incompressible functionally graded hollow cylinder with temperature-dependent material properties. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2016; 55: 212-220.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.09.005>
- Moosaie, A. and Panahi-Kalus, H. Thermal stresses in an incompressible FGM spherical shell with temperature-dependent material properties. *Thin-Walled Structures*, 2017; 120: 215-224.
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.09.005>
- Tang, L., Gao, T., Song, L., Meng, L., Zhang, C. and Zhang, W. Topology optimization of nonlinear heat conduction problems involving large temperature gradient. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019; 357: 112600.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112600>
- Yarimpabuc, D. Nonlinear thermal stress analysis of functionally graded thick cylinders and spheres. *Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering*, 2021; 45: 655-663.
<https://doi.org/10.1007/s40997-020-00395-0>
- Dowty, E. L. and Haworth, D. R. Generalized solutions for transient heat conduction with variable conductivity. *Nuclear Engineering and Design*. 1967; 6: 57-64.
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(67\)90046-5](https://doi.org/10.1016/0029-5493(67)90046-5)
- Katayama, K., Hattori, M., Okada, M. and Kotake, S. Numerical method of transient heat conduction with temperature dependent thermal properties. *Bulletin of JSME*, 1972; 15: 1394-1401.
<https://doi.org/10.1299/jsme1958.15.1394>
- Comini, G., Del Guidice, S., Lewis, R. W. and Zienkiewicz, O. C. Finite element solution of nonlinear heat conduction problems with special reference to phase change. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1974; 8: 613-624.
<https://doi.org/10.1002/nme.1620080314>
- Hughes, T. J. R. Unconditionally stable algorithms for nonlinear heat conduction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1977; 10: 135-139.
[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(77\)90001-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(77)90001-9)
- Thomas, B. G., Samarasekera, I. V. and Brimacombe, J. K. Comparison of numerical

- modeling techniques for complex, two-dimensional, transient heat-conduction problems. *Metallurgical Transactions B*. 1984; 15: 307-318. <https://doi.org/10.1007/BF02667334>
20. Winget, J. M. and Hughes, T. J. R. Solution algorithms for nonlinear transient heat conduction analysis employing element-by-element iterative strategies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985; 52: 711-815. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90015-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90015-5)
 21. Kikuta, M., Togoh, H. and Tanaka, M. Boundary element analysis of nonlinear transient heat conduction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987; 62: 321-329.
 22. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(87\)90066-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(87)90066-1)
 23. Tanigawa, Y., Akai, T., Kawamura, R. and Oka, N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties. *Journal of Thermal Stresses*, 1996; 19: 77-102. <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>
 24. Chen, B., Gu, Y., Guan, Z. and Zhang, H. Nonlinear transient heat conduction analysis with precise time integration method. *Numerical Heat Transfer Part B*, 2001; 40: 325-341. <https://doi.org/10.1080/104077901317091712>
 25. Fic, A., Bialecki, R. A. and Kassab, A. J. Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and the finite-element method. *Numerical Heat Transfer Part B*. 2005; 48: 103-124. <https://doi.org/10.1080/10407790590935920>
 26. Curi, M. and Zotin, J. Transient heat transfer analysis of fins with variable surface area and temperature-dependent thermal conductivity using an integral transform technique. arXiv. 2010: 14506. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.14506>
 27. Mustafa, M. T., Arif, A. F. M. and Masood, K. Approximate analytic solutions of transient nonlinear heat conduction with temperature-dependent thermal diffusivity. *Abstract and Applied Analysis*. 2014; 2014:423421. <https://doi.org/10.1155/2014/423421>
 28. Mosayebidorcheh, S., Farzinpoor, M. and Ganji, D. D. Transient thermal analysis of longitudinal fins with internal heat generation considering temperature-dependent properties and different fin profiles. *Energy Conversion and Management*. 2014; 86: 365-370. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2014.05.033>
 29. Demirbas, M. D. Thermal stress analysis of functionally graded plates with temperature-dependent material properties using theory of elasticity. *Composites Part B: Engineering*, 2017; 131: 100-124. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.08.005>
 30. Bahadori, R., Gutierrez, H., Manikonda, S. and Meinke, R. Two-dimensional transient heat conduction in multi-layered composite media with temperature dependent thermal diffusivity using floating random walk Monte-Carlo method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017; 115: 570-580. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.07.071>
 31. Cimmelli, V. A., Jou, D. and Sellitto, A. Nonlinear thermoelastic waves in functionally graded materials: Application to Si1-cGec nanowires. *Journal of Thermal Stresses*, 2020; 43: 612-628. <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1730283>
 32. Jiang, G., Liu, H., Yang, K. and Gao, X. A fast reduced-order model for radial integral boundary element method based on proper orthogonal decomposition in nonlinear transient heat conduction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020; 368: 113190. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113190>
 33. Suvin, V. S., Ooi, E. T., Song, C. and Natarajan, S. Temperature-dependent nonlinear transient heat conduction using the scaled boundary finite element method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2025; 243: 126780. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2025.126780>
 34. Cui, M., Zhu, Q. and Gao, X. A modified conjugate gradient method for transient nonlinear inverse heat conduction problems: a case study for identifying temperature dependent thermal conductivities. *ASME Journal of Heat Transfer*. 2014; 136: 091301. <https://doi.org/10.1115/1.4027771>
 35. Dadar, N., Hematiyan, M. R., Khosravifard, A. and Shiah, Y. C. An inverse meshfree thermoelastic analysis for identification of temperature-dependent thermal and mechanical material properties. *Journal of Thermal Stresses*. 2020; 43: 1165-1188. <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1775534>
 36. Chiam, T. C. Heat transfer in a fluid with variable conductivity over a linearly stretching sheet. *Acta Mechanica*. 1998; 129: 63-72. <https://doi.org/10.1007/BF01379650>
 37. Hossain, M. A., Munir, M. S. and Rees, D. A. S. Flow of viscous incompressible fluid with temperature-dependent viscosity and thermal conductivity past a permeable wedge with uniform surface heat flux. *International Journal of Thermal Sciences*. 2000; 39: 635-644. [https://doi.org/10.1016/S1290-0729\(00\)00227-1](https://doi.org/10.1016/S1290-0729(00)00227-1)
 38. Dehghan, M., Valipour, M. S. and Saedodin, S. Temperature-dependent conductivity in forced

- convection of heat exchangers filled with porous media: A perturbation solution. *Energy Conversion and Management*. 2015; 91: 259-266, 2015.
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2014.12.011>
39. Panahi-Kalus, H., Ahmadinejad, M. and Moosaie, A. The effect of temperature-dependent viscosity and thermal conductivity on velocity and temperature field: an analytical solution using the perturbation technique. *Archives of Mechanics*. 2020; 72: 555-576.
<https://doi.org/10.24423/aom.3618>
40. Carollo, L. F. D. S., Silva, A. L. F. L. and Silva, S. M. M. L. A different approach to estimate temperature-dependent thermal properties of metallic materials. *Materials*, 2019; 12: 2579.
<https://doi.org/10.3390/ma12162579>
41. Williamson, J. H. Low-storage Runge-Kutta schemes. *Journal of Computational Physics*, 1980; 35: 48-56.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(80\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(80)90033-9)
42. Shafie, Sh., Rahmani, B., Moosaie, A. and Panahi-Kalus, H. Distributed control of nonlinear conductivity heat transfer equation in a thick functionally graded plate. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2022; 130: 105786.
<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105786>
43. Dyke, M. V. Perturbation Methods in Fluid Mechanics, The Parabolic Press. Stanford, California; New York; 1975.
<https://doi.org/10.1002/zamm.19770570122>
44. Nayfeh, A. H., Perturbation Methods, WILEY-VCH Verlag, New York; 2000.
<https://doi.org/10.1002/9783527617609>