

# Buckling Analysis of Graphene Platelet-Reinforced Functionally Graded Nanoplates Resting on Elastic Foundation Using a Meshfree Formulation Based on Nonlocal Strain-Gradient Theory

Sajjad Tohidi<sup>1</sup>, Farzad Shahabian<sup>\*1</sup>  and Mohammad Hossein Ghadiri Rad<sup>2</sup>

1. Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

2. Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering of Science, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

**Abstract:** In this research, a novel size-dependent meshfree method is proposed within the framework of the nonlocal strain-gradient theory in order to evaluate the buckling behavior of functionally graded metal–semiconductor nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets, while the nanoplates with elastically restrained edges is placed on a Winkler–Pasternak elastic foundation. The presented model simultaneously accounts for the effects of nonlocal stiffness and strain gradient, thereby covering the intrinsic softening and stiffening mechanisms at the nanoscale. The governing equations are derived using the principle of minimum total potential energy and are discretized through the moving Kriging meshfree method. This method effectively resolves the higher-order derivatives appearing in the nonlocal strain-gradient theory. The mechanical properties corresponding to each layer of the plate along the thickness, which is reinforced by graphene nanoplatelets, are determined through the modified Halpin–Tsai micromechanical model together with the rule of mixtures. Comparison of the results obtained from the proposed method with available analytical and numerical approaches confirms the accuracy and computational efficiency of the proposed method. Furthermore, a parameter-based investigation is carried out to clarify the effects of material gradation, graphene weight fraction, nonlocal and strain-gradient parameters, circular cutout size, the stiffness of the elastic foundation and stiffnesses of the elastically restrained edges on the buckling responses of functionally graded graphene-reinforced nanoplates.

**Keywords:** Moving Kriging meshfree method, Nonlocal strain-gradient theory, Functionally graded metal–semiconductor nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets, Buckling analysis

\* Corresponding Author: [shahabf@um.ac.ir](mailto:shahabf@um.ac.ir)

How to Cite: Tohidi Sajjad, Shahabian Farzad, Ghadiri Rad Mohammad Hossein. Buckling analysis of graphene platelet-reinforced functionally graded nanoplates resting on elastic foundation using a meshfree formulation based on nonlocal strain-gradient theory, Journal of Computational Methods in Engineering;





## تحلیل کماتش نانوصفحه‌های تابعی مدرج تقویت‌شده با نانوگرافن بر

### بستر کشسان با استفاده از روش بدون شبکه بر اساس نظریه گرادیان کرنش غیر محلی

سجاد توحیدی<sup>۱</sup>، فرزاد شهابیان\*<sup>۱</sup> و محمدحسین قدیری‌راد<sup>۲</sup>

۱. گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

۲. گروه مهندسی عمران، دانشکده علوم مهندسی، دانشگاه صنعتی قوچان

**چکیده** - در این پژوهش، یک روش نوین بدون شبکه وابسته به اندازه در چارچوب نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی برای ارزیابی رفتار کماتش نانوصفحه‌های فلز- نیمه‌هادی تابعی مدرج تقویت‌شده با نانو صفحه‌های گرافن بر روی بستر کشسان وینکلر- پاسترناک و دارای مهار مرزی کشسان پیشنهاد شده است. این رویکرد به‌طور همزمان اثر سختی غیرمحلی و گرادیان کرنش را در نظر می‌گیرد و سازوکارهای نرم‌شدن و سخت‌شدن ذاتی در مقیاس نانو را پوشش می‌دهد. معادله‌های حاکم با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استخراج شده و با استفاده از روش بدون شبکه کریجینگ متحرک گسسته‌سازی می‌شوند. این روش به‌طور مؤثر مشتق‌های مرتبه بالای موجود در نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی را حل می‌کند. ویژگی‌های مکانیکی مربوط به هر لایه از صفحه در راستای ضخامت، که با استفاده از نانوگرافن‌ها تقویت شده است، از طریق مدل میکرومکانیکی اصلاح‌شده هالپین-تسای همراه با قانون مخلوط، تعیین شده است. مقایسه نتیجه‌های حاصل از تحلیل با روش‌های تحلیلی و عددی موجود، صحت و کارایی محاسباتی روش پیشنهادی را تأیید می‌کند. در این پژوهش، تأثیر گرادیان ماده، سهم وزنی گرافن، متغیرهای غیرمحلی و گرادیان کرنش، ابعاد بازشوی دایره‌ای، سختی بستر کشسان و اثر سختی مهار کشسان تکیه‌گاهی بر پاسخ‌های کماتشی نانوصفحه‌های تابعی مدرج تقویت‌شده با گرافن مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است.

**واژه‌های کلیدی:** روش بدون شبکه کریجینگ متحرک، نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی، نانوصفحه فلز-نیمه‌هادی تابعی مدرج تقویت‌شده با صفحه‌های گرافن، تحلیل کماتش.

\*: نویسنده مسئول، رایانامه: [shahabf@um.ac.ir](mailto:shahabf@um.ac.ir)



## فهرست علائم

علائم	نام	علائم	نام
a	طول نانوصفحه	$P_1$	ویژگی ماده در فاز فلزی
b	عرض نانوصفحه	$P_2$	ویژگی ماده در فاز سیلیکونی
$C_{ijkl}$	مؤلفه‌های تانسور کشسانی	$P_M(z)$	ویژگی مؤثر محلی ماده تابعی مدرج در طول ضخامت
$E_i$	ضریب کشسانی لایه $i$ -ام نانوصفحه	$p$	شاخص قانون توانی یا متغیر گرادیان در توزیع سیگموئید
$f_e$	نیروی واکنشی بستر کشسان	$t$	تنش مرتبه بالاتر
h	ضخامت نانوصفحه	$t_{GPL}$	ضخامت صفحه‌های گرافن
k	گرادیان گذار نمایی در مدل توزیع نمایی	$u_0, v_0, w_0$	مؤلفه‌های جابه‌جایی در صفحه میانی
$K_g$	ماتریس سختی هندسی	$U$	انرژی کرنش
K	ماتریس سختی کل	$V_{GPL}$	سهم حجمی صفحه‌های گرافن در لایه $k$ -ام
l	طول مشخصه ماده	$V^*$	انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی
N	تعداد کل گره‌ها	$W_{GPL}$	عرض صفحه‌های گرافن
$N^{x0}, N^{y0}, N^{xy0}$	نیروهای غشایی قبل از کماتش	$\eta_w$	متغیر مربوط به عرض صفحه‌های گرافن در مدل هالپین-تسای
x	مختصه فضایی	z	مختصه ضخامت در طول نانوصفحه
$x_i$	موقعیت گره $i$	$\alpha$	نمایه یا شاخص متغیر در مدل غیرمحلی
$\eta_L$	متغیر مربوط به طول صفحه‌های گرافن در مدل هالپین-تسای	$\nu^k$	نسبت پواسون لایه $k$ -ام نانوصفحه
$\lambda_{cr}$	ضریب مقاومت کماتشی	$\lambda_i$	وزن‌های کریجینگ
$\Phi_I(x)$	ماتریس تابع‌های شکل کریجینگ متحرک	$\rho^k$	چگالی لایه $k$ -ام نانوصفحه
$\sigma$	تنش کلاسیک	$u(x)$	مقدار میدان تصادفی در نقطه $x$
$Z_b(x)$	باقیمانده ایستا با میانگین صفر	$Z_a(x)$	مؤلفه دریافت میدان تصادفی
$p_k(x)$	تابع پایه چندجمله‌ای در درونیابی	$r_s$	شعاع ناحیه تأثیر

### ۱. مقدمه

مکانیکی، فیزیکی و الکترونیکی خاصی برخوردار هستند. نانوسازه‌ها کاربردهای گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف مهندسی، از جمله هوافضا، خودرو، مهندسی پزشکی، مکانیک و سازه پیدا

پیشرفت سریع فناوری نانو<sup>۱</sup> موجب افزایش چشمگیر پژوهش‌ها در زمینه نانوسازه‌ها شده است، چرا که این سازه‌ها از ویژگی‌های

کرده‌اند، زیرا که در اثر ویژگی‌های وابسته به اندازه آن‌ها، عملکرد سازه‌ای بهبود یافته و قابلیت چندکاره بودن را فراهم می‌آورد (۱). پژوهش‌های گسترده نشان داده‌اند که مواد در مقیاس‌های میکرو<sup>۲</sup> و نانو رفتارهای مکانیکی و فیزیکی ویژه از خود بروز می‌دهند (۴-۱). هرگاه ابعاد سازه به مقیاس نانو نزدیک شود، نیروهای بین‌اتمی<sup>۳</sup> و بین‌مولکولی<sup>۴</sup>، از جمله نیروهای واندروالسی<sup>۵</sup> و برهم‌کنش‌های الکترواستاتیکی<sup>۶</sup>، نقش اصلی را در رفتار کلی استاتیکی<sup>۷</sup> و دینامیکی<sup>۸</sup> سازه ایفا می‌کنند (۳). رابطه‌سازی‌های سنتی به‌طور ذاتی پدیده‌های وابسته به اندازه، مانند تغییر سختی را نادیده می‌گیرند (۷-۵). مطالعه‌های تجربی در اندازه نانو نیز با محدودیت‌هایی نظیر کنترل دقیق هندسه و شرط‌های مرزی مواجه هستند (۷). علاوه بر این، روش‌های دینامیک مولکولی<sup>۹</sup> گرچه قادر به شبیه‌سازی برهم‌کنش‌های اتمی هستند، برای سیستم‌های بزرگ از نظر محاسباتی بسیار پرحجم و زمان‌بر هستند (۸). از این رو، نظریه‌های مکانیک محیط‌های پیوسته وابسته به اندازه به‌عنوان روش‌هایی کارآمد و دقیق برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی در ابعاد نانو مورد توجه قرار گرفته‌اند. نظریه غیرمحلی<sup>۱۰</sup> که برای دخالت دادن اثرهای وابسته به اندازه مطرح شده است، فرض می‌کند که تنش در یک نقطه به میدان کرنش در کل محیط -نه فقط به همسایگی محلی آن- وابستگی دارد (۷-۵). به موازات آن، میندلین (۷) و آیفانتیس (۸) مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک را با وارد کردن مشتق‌های مرتبه بالاتر کرنش، توسعه دادند که منجر به شکل‌گیری نظریه گرادیان کرنش شد. این چارچوب، متغیرهای طول ذاتی ماده را به رابطه‌سازی‌های مرسوم وارد می‌کند و امکان نمایش دقیق اثرهای ریزساختاری را فراهم می‌سازد. گسترش‌های مختلف نظریه گرادیان کرنش مانند نظریه جفت‌تنش (۹)، نظریه جفت‌تنش<sup>۱۱</sup> اصلاح‌شده (۱۰) و نظریه گرادیان<sup>۱۲</sup> کرنش اصلاح‌شده (۱۱) به‌طور گسترده برای مدل‌سازی سازه‌ها در مقیاس میکرو و نانو به‌کار گرفته شده‌اند.

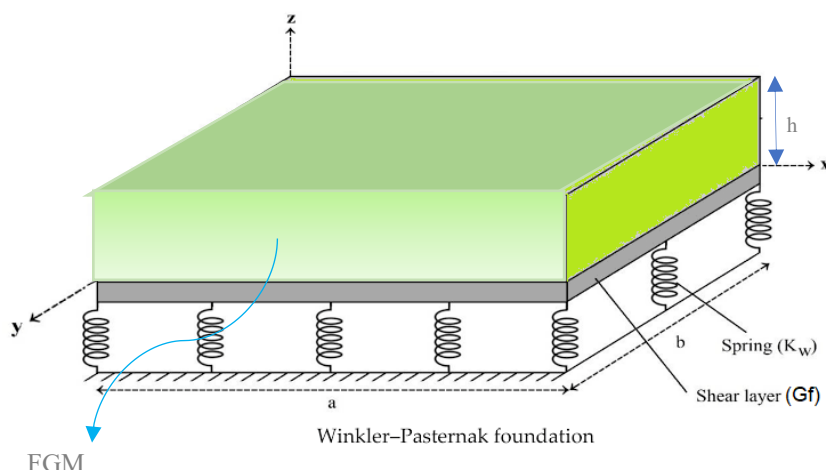
برای ارتقای قابلیت پیش‌بینی، نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی، اصول غیرمحلی و نظریه گرادیان کرنش را به‌طور

همزمان ترکیب می‌کند. نظریه غیرمحلی برهم‌کنش‌های بلندبرد را در تحلیل وارد می‌کند که اثر نرم‌شدن ماده را ثبت می‌کند، در حالی که نظریه گرادیان کرنش تغییرات سختی ناشی از اثر اندازه را از طریق گرادیان‌های مرتبه بالاتر کرنش در نظر می‌آورد. ترکیب هر دو سازوکار، چارچوبی یکپارچه را فراهم می‌سازد که قادر به توصیف هم‌زمان رفتارهای نرم‌شونده و سخت‌شونده است. از این رو، گرادیان کرنش غیرمحلی به یکی از جامع‌ترین نظریه‌های مکانیک محیط‌های پیوسته برای مدل‌سازی چندمقیاسی<sup>۱۳</sup> سازه‌ها تبدیل شده است (۱۴-۱۲).

از سویی دیگر، مواد با ویژگی‌های تابعی فلز-نیمه‌هادی<sup>۱۴</sup> از نوع سیلیکون-آلومینیوم (Si-Al) در مقیاس نانو، به دلیل ترکیب منحصر به فرد ویژگی‌های مکانیکی، حرارتی و الکترونیکی، کاربرد گسترده‌ای در نانوسازه‌ها و فناوری‌های پیشرفته یافته‌اند. نانوسازه‌های تابعی مدرج سیلیکون-آلومینیوم (Si-Al FGM) می‌توانند به عنوان حسگرها، رزوناتورها<sup>۱۵</sup> و عملگرهای<sup>۱۶</sup> نانومقیاس عمل کنند، همچنین نقش کلیدی در زیرلایه‌های تراشه و انتقال حرارت دارند. رفتار کمانشی این مواد در مقیاس نانو، اهمیت زیادی در طراحی و بهینه‌سازی عملکرد آن‌ها دارد. علاوه بر کاربردهای نانومقیاس، این نوع مواد تابعی مدرج در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی<sup>۱۷</sup>، اپتوالکترونیکی<sup>۱۸</sup>، صفحه‌های حرارتی و صنایع هوافضا نیز قابل استفاده هستند. بنابراین، مطالعه این مواد نه تنها به توسعه مدل‌های تحلیلی و شبیه‌سازی پیشرفته کمک می‌کند، بلکه می‌تواند در طراحی مواد هوشمند و اجزای با عملکرد بهینه در صنایع مختلف تأثیرگذار باشد.

اگرچه روش‌های تحلیلی، نتیجه‌هایی دقیق را برای هندسه‌های ساده ارائه می‌دهند، کاربرد آن‌ها در هندسه و شرط‌های مرزی پیچیده یا مواد با تغییرات پیوسته در ویژگی‌ها، محدود است. بنابراین، روش‌های عددی پیشرفته مانند روش اجزای محدود، تحلیل هم‌هندسه<sup>۱۹</sup> و روش‌های بدون شبکه به‌طور معمول به منظور حل مسئله‌های مهندسی به‌کار می‌روند.

پژوهش حاضر برای اولین بار یک رابطه‌سازی بدون شبکه وابسته به اندازه ارائه می‌دهد که نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی،



شکل ۱. نانوصفحه تابعی مدرج تقویت شده با صفحه‌های گرافن بر روی بستر کشسان.

(GPLR-FGMs) گفته می‌شود و هدف آن بهبود عملکرد مکانیکی صفحه‌ها است (۱۴، ۲۱ و ۲۲).

در این پژوهش، نانوصفحه‌های مستطیل شکل GPLR-FG با ضخامت  $h$ ، طول  $a$  و عرض  $b$  در نظر گرفته شده‌اند که بر روی یک بستر کشسان وینکلر-پاسترناک<sup>۲۳</sup> قرار دارند که در شکل (۱) نشان داده شده است. مواد پایه (ماتریس)<sup>۲۴</sup> نانوصفحه GPLR-FG به صورت یک ماده سیلیکون-آلومینیوم تابعی مدرج-FGM (SA) مدل‌سازی شده است. ویژگی‌های مکانیکی FGM-SA از جمله ضریب کشسانی<sup>۲۵</sup>، چگالی و نسبت پواسون<sup>۲۶</sup> در راستای ضخامت  $z$  به‌طور پیوسته تغییر می‌کنند. تغییر ویژگی‌های مکانیکی به صورتی است که از سطح پایین ( $z=-h/2$ ) به صورت فلز کامل شروع می‌شود تا سطح بالایی ( $z=+h/2$ ) به صورت سیلیکون کامل درمی‌آید. این تغییر پیوسته، گذار تدریجی بین جزءهای ماده و رفتار مکانیکی و فیزیکی نانوصفحه را در هر مکان از محیط سازه تعیین می‌کند. در این پژوهش برای در نظر گرفتن الگوی تغییر مصالح در ضخامت صفحه، قانون توزیع توانی<sup>۲۷</sup> در نظر گرفته شده است.

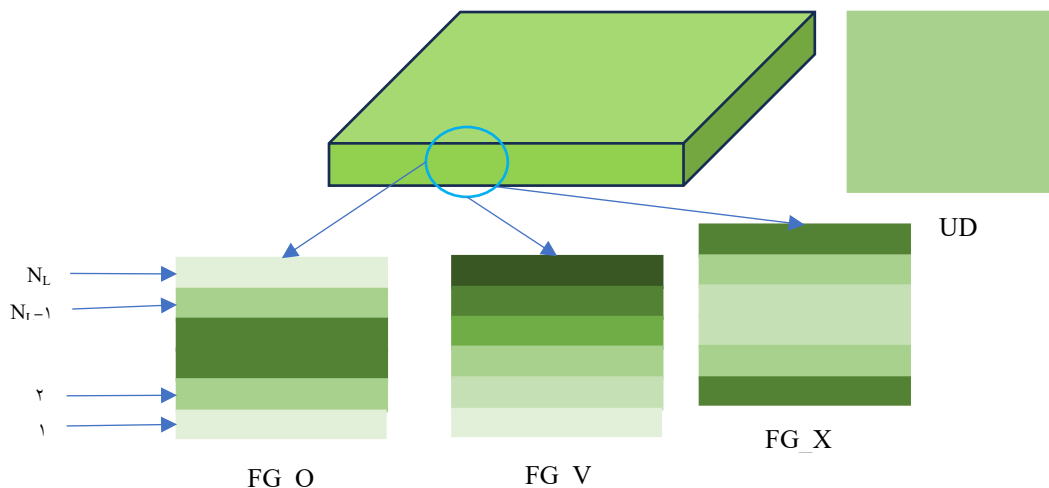
در مدل توزیع توانی، ویژگی مؤثر محلی  $P_M(z)$  مطابق با رابطه زیر تغییر می‌کند (۱۴ و ۱۵).

نظریه کیرشهف<sup>۲۰</sup> و روش بدون شبکه کریجینگ<sup>۲۱</sup> متحرک را ترکیب می‌کند و تحلیل کماتش نانوصفحه‌های تابعی مدرج تقویت شده با گرافن<sup>۲۲</sup> بر روی بستر کشسان و دارای مهار کشسان مرزی را ممکن می‌سازد. لازم به ذکر است که روش کریجینگ متحرک ابتدا توسط گو و همکاران (۱۵) برای مسئله‌های مرزی دو بعدی معرفی و سپس به تحلیل صفحه‌ها (۱۶ و ۱۷)، میکروصفحه‌ها (۱۸) و نانوصفحه‌ها تعمیم یافت (۱۹ و ۲۰). رویکرد پیشنهادی در این پژوهش قادر به در نظر داشتن مؤثر اثرهای وابسته به اندازه بوده و با مقایسه با روش‌های تحلیلی و عددی موجود، دقت، پایداری و کارایی محاسباتی آن نشان داده شده است.

## ۲. رابطه‌سازی‌های مسئله

### ۲.۱. مصالح فلز- نیمه‌هادی تابعی مدرج تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن

مصالح تابعی مدرج که از دو جزء مختلف ماده‌ای تشکیل شده‌اند، ویژگی‌های مناسبی از جمله مقاومت مکانیکی بالا، پایداری حرارتی و انعطاف‌پذیری طراحی، ارائه می‌کنند. در سال‌های اخیر، دسته جدیدی از این مواد با تقویت صفحه‌های گرافن معرفی شده است که به آن‌ها مواد تابعی مدرج تقویت شده با صفحه‌های گرافن



شکل ۲. هندسه نانوصفحه‌های تابعی مدرج تقویت‌شده با نانوصفحه‌های گرافن با چهار الگوی توزیع صفحه‌های گرافن.

دنبال می‌کند. برای این پیکربندی‌ها، سهم وزنی صفحه‌های گرافن در لایه  $k$ -ام نانوصفحه مطابق با رابطه‌سازی ارائه‌شده در (۱۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 W_{GPL}^{(k)} &= W_{GPL} & UD \\
 W_{GPL}^{(k)} &= 4W_{GPL} \left( \frac{N_L + 1}{2} - \left| k - \frac{N_L + 1}{2} \right| \right) / (N_L + 2) & FG - O \\
 W_{GPL}^{(k)} &= 4W_{GPL} \left( \frac{1}{2} + \left| k - \frac{N_L + 1}{2} \right| \right) / (N_L + 2) & FG - X \\
 W_{GPL}^{(k)} &= 2W_{GPL} k / (N_L + 1) & FG - V
 \end{aligned} \quad (۲)$$

ضریب کشسانی لایه  $k$ -ام در ماده مرکب با استفاده از مدل هالپین-تسای برآورد می‌شود که به صورت زیر بیان می‌گردد (۱۴):

$$\begin{aligned}
 E_{(z)}^{(k)} &= \frac{3}{8} \left( \frac{1 + \xi_L^{GPL} \eta_L^{GPL} V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_L^{GPL} V_{GPL}^{(k)}} \right) E_M^{(k)} \\
 &+ \frac{5}{8} \left( \frac{1 + \xi_W^{GPL} \eta_W^{GPL} V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_W^{GPL} V_{GPL}^{(k)}} \right) E_M^{(k)}
 \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 \xi_L^{GPL} &= 2L_{GPL} / t_{GPL} \\
 \xi_W^{GPL} &= 2W_{GPL} / t_{GPL}
 \end{aligned} \quad (۴)$$

$$P_M(z) = (P_2 - P_1) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_1 \quad (۱)$$

که در آن  $p \geq 0$  شاخص قانون توانی است و نمایه توزیع ماده را مشخص می‌کند و  $P_1$  و  $P_2$  به ترتیب ویژگی‌های ماده در فاز فلز و فاز سیلیکون را نشان می‌دهند.

در این پژوهش، یک ماده تابعی مدرج تقویت‌شده با صفحه‌های گرافن (GPLR-FGM) در نظر گرفته شده است (۱۴). چهار الگوی توزیع متفاوت صفحه‌های گرافن در طول ضخامت مورد بررسی قرار گرفته‌اند، که عبارتند از، (UD)، FG\_O، FG\_X و FG\_V که در شکل (۲) نشان داده شده است.

در توزیع UD سهم حجمی صفحه‌های گرافن در تمام ضخامت ثابت است. در توزیع FG\_O غلظت صفحه‌های گرافن در صفحه میانی بیشینه بوده و به صورت متقارن به سمت سطوح بالا و پایین کاهش می‌یابد. در توزیع FG\_X محتوای صفحه‌های گرافن در صفحه میانی حداقل است و به‌طور یکنواخت به سمت سطوح نانوصفحه افزایش می‌یابد. در توزیع FG\_V سهم حجمی صفحه‌های گرافن به‌صورت خطی از سطح پایین به سطح بالای نانوصفحه افزایش می‌یابد.

در این پژوهش، ماده پایه نانوصفحه GPLR-FG یک ماده مرکب ساخته شده از سیلیکون-فلز تابعی مدرج است که با صفحه‌های گرافن تقویت شده و الگوهای توزیع ذکر شده را

که در آن  $w_0$  و  $v_0$  مؤلفه‌های جابه‌جایی در صفحه میانی است. شایان ذکر است که نشانه‌گذاری با ویرگول  $(y, x)$  به معنی مشتق جزئی  $w$  نسبت به مختصات مکانی متناظر است.

میدان کرنش کلی به دو بخش کرنش‌های درون‌صفحه‌ای (غشایی) و کرنش برشی عرضی تجزیه می‌شود که به صورت رابطه (۱۱) بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (11)$$

بر پایه میدان جابه‌جایی فرض شده، مؤلفه‌های کرنش نانوصفحه به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = - \begin{Bmatrix} w_{0,xx} \\ w_{0,yy} \\ 2w_{0,xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

### ۲.۳. نظریه گرادیان کرنش غیرمحل

در چارچوب نظریه گرادیان کرنش غیرمحل (۱۲ و ۱۳) تنش کل غیرمحل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$t_{ij} = \sigma_{ij} - \nabla \sigma_{ijm}^{(1)} \quad (13)$$

در این رابطه،  $\nabla$  نشان‌دهنده عملگر دیفرانسیل است و  $\sigma$  و  $t$  به ترتیب مؤلفه‌های تنش کلاسیک و تنش مرتبه بالاتر را نشان می‌دهند. این تنش‌ها از طریق رابطه‌های انتگرالی (۱۴) و (۱۵) تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{ij} = \int_V \alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{x}, e_0 a) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dV' \quad (14)$$

$$\sigma_{ijm}^{(1)} = l^2 \int_V \alpha_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}, e_1 a) C_{ijklm} \varepsilon_{kl,m} dV' \quad (15)$$

که در آن  $\mathbf{x}$  یک نقطه دلخواه در محیط  $V$  است،  $\alpha_0$  و  $\alpha_1$  تابع‌های کرنل<sup>۲۸</sup> غیرمحل هستند که اثر برهم‌کنش‌های فضایی را لحاظ می‌کنند،  $l$  طول مشخصه ماده و  $e_0 a$  و  $e_1 a$  متغیرهای غیرمحل برای تنظیم شدت اثرهای غیرمحل هستند (۱۲). بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک، تنش محلی با قانون هوک<sup>۲۹</sup> تعریف می‌شود:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})$$

که در آن  $\varepsilon_{kl}$  و  $u_k$  به ترتیب مؤلفه‌های تانسور کشسان، تانسور کرنش و بردار جابه‌جایی هستند.

و  $L_{GPL}$ ،  $W_{GPL}$  و  $t_{GPL}$  به ترتیب طول، عرض و ضخامت صفحه‌های گرافن هستند. متغیرهای  $\eta_L$  و  $\eta_w$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند (۱۴):

$$\eta_L^{GPL} = \frac{E_{GPL} - E_M^{(k)}}{E_{GPL} + \xi_L^{GPL} E_M^{(k)}} \quad (5)$$

$$\eta_w^{GPL} = \frac{E_{GPL} - E_M^{(k)}}{E_{GPL} + \xi_w^{GPL} E_M^{(k)}} \quad (6)$$

در این رابطه، ضریب کشسانی  $E_k$ ، چگالی  $\rho_k$  و نسبت پواسون  $\nu_k$  ماده پایه FGM در لایه  $k$ -ام نانوصفحه به صورت رابطه (۶) بیان می‌شود:

$$E_M^{(k)} = E_M|_{z=z_k}; \quad \rho_M^{(k)} = \rho_M|_{z=z_k}; \quad \nu_M^{(k)} = \nu_M|_{z=z_k};$$

$$z_k = (2k - 1 - N_L) \frac{h}{2N_L} \quad (7)$$

چگالی و نسبت پواسون لایه  $k$ -ام نانوصفحه ساخته شده از مواد مرکب با استفاده از قانون مخلوط به صورت زیر بیان می‌شوند (۱۴):

$$\nu_{(z)}^{(k)} = \nu_{GPL}^{(k)} V_{GPL}^{(k)} + \nu_M^{(k)} (1 - V_{GPL}^{(k)}) \quad (8)$$

در رابطه‌های بالا  $\rho_M$ ،  $\nu_M$ ،  $\rho_{GPL}$ ،  $\nu_{GPL}$  به ترتیب نسبت پواسون و چگالی صفحه‌های گرافن و ماده پایه FGM در لایه  $k$ -ام را نشان می‌دهند. همچنین، سهم حجمی صفحه‌های گرافن  $V_{GPL}$  در لایه  $k$ -ام از رابطه زیر تعیین می‌شود (۱۴):

$$V_{GPL}^{(k)} = \frac{W_{GPL}^{(k)}}{W_{GPL}^{(k)} + (1 - W_{GPL}^{(k)}) \frac{\rho_{GPL}^{(k)}}{\rho_M^{(k)}}} \quad (9)$$

### ۲.۲ میدان جابه‌جایی

بر پایه نظریه صفحه کیرشهف، میدان جابه‌جایی یک نانوصفحه نازک با ضخامت  $h$  را می‌توان با استفاده از رابطه کلی زیر بیان کرد (۶):

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - zw_{,x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - zw_{,y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad \text{with } z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \quad (10)$$

در نظریه گرادیان کرنش غیرمحلّی، فرض می‌شود که تابع‌های کرنل  $\alpha_0$  و  $\alpha_1$  شرط‌های نرمال‌سازی و کاهش مناسب را مطابق پیشنهاد اولیه ارینگن (۵) برقرار می‌کنند:

$$[1 - (ea_0)^2 \nabla^2] \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (17)$$

$$[1 - (ea_1)^2 \nabla^2] \sigma_{jm}^{(1)} = l^2 C_{ijkl} \varepsilon_{kl,m} \quad (18)$$

در رابطه‌های بالا  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  است. با جایگذاری رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۳)، می‌توان معادله حاکم بر میدان تنش در نظریه گرادیان کرنش غیرمحلّی را به دست آورد (۱۳):

$$[1 - (e_1 a)^2 \nabla^2][1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] t_{ij} = [1 - (e_1 a)^2 \nabla^2] C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - l^2 [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] C_{ijkl} \nabla^2 \varepsilon_{kl} \quad (19)$$

با فرض برابری متغیرهای غیرمحلّی  $e = e_0 = e_1$  این رابطه به شکل ساده زیر در می‌آید (۵، ۱۲ و ۱۳):

$$[1 - (ea)^2 \nabla^2] t_{ij} = (1 - l^2 \nabla^2) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (20)$$

که در آن  $\lambda^2 = l^2$  و  $\mu^2 = (ea)^2$  است. این مدل ساده‌شده، اثرهای غیرمحلّی و گرادیان کرنش را به طور همزمان در نظر می‌گیرد و برای تحلیل رفتار مکانیکی سازه‌های میکرو و نانومقیاس به‌طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

شایان ذکر است که نظریه غیرمحلّی (۵) و نظریه گرادیان کرنش (۸) می‌توانند به ترتیب با قرار دادن  $ea=0$  و  $l=0$  به عنوان حالت‌های حدی این مدل بازیابی شوند. رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌ها نیز به صورت رابطه (۲۱) بیان می‌شود:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = (1 - \lambda^2 \nabla^2) \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

در اینجا  $\mu^2 = (ea)^2$  و  $\lambda^2 = (l)^2$  هستند. علاوه بر این ثابت‌های کشسانی به صورت رابطه‌های (۲۲) تعریف می‌شوند:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E_{(z)}^{(k)}}{1 - (v_{(z)}^{(k)})^2}; \quad C_{12} = C_{21} = \frac{\nu E_{(z)}^{(k)}}{1 - (v_{(z)}^{(k)})^2}; \quad C_{66} = \frac{E_{(z)}^{(k)}}{2(1 + v_{(z)}^{(k)})} \quad (22)$$

## ۴.۲. معادله‌های حاکم

در این مطالعه، برای استخراج معادله‌های تعادل نانوصفحه، از اصل حداقل انرژی پتانسیل<sup>۳۰</sup> کل استفاده شده است (۲۳):

$$0 = \delta U + \delta V^* \quad (23)$$

که در آن  $U$  انرژی کرنش و  $V^*$  انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی، بستر کشسان و تکیه‌گاه کشسان مرزی وارد بر نانوصفحه است. تغییرات انرژی کرنشی نانوصفحه به صورت رابطه (۲۴) محاسبه می‌شود:

$$\delta U = \int_V t_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (24)$$

تغییرات انرژی پتانسیل نیز به شکل رابطه (۲۵) تعریف می‌شود:

$$\delta V^* = \int_A f_e \delta w_0 dA + \int_A \left( N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \frac{\partial w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \delta \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) dA + \int_{\Gamma_s} k_\theta^* \frac{\partial w_0}{\partial n} \delta \frac{\partial w_0}{\partial n} d\Gamma_s \quad (25)$$

که در آن  $N_x^0$ ،  $N_y^0$  و  $N_{xy}^0$  نیروهای غشایی قبل از کمانش و  $f_e$  نیروی واکنشی ناشی از بستر کشسان و وینکلر-پاسترناک است که به صورت رابطه (۲۶) محاسبه می‌شود (۱۴):

$$f_e = k_w^* w_0 - G_f^* \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (26)$$

جمله انتگرالی روی مرز  $\Gamma_s$  در رابطه (۲۵) نشان‌دهنده اثر شرط مرزی غیرکلاسیک بوده که به‌صورت طبیعی در چارچوب صورت ضعیف وارد رابطه می‌شود،  $n$  محور عمود بر مرز  $\Gamma_s$  است و  $k_\theta^*$  سختی چرخشی تکیه‌گاه است.

با جایگذاری رابطه‌های (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) در رابطه (۲۳)، فرم ضعیف گالرکین<sup>۳۱</sup> نانوصفحه GPLR-FG به دست می‌آید:

$$0 = \overline{\delta U} + \overline{\delta V^*} \quad (27)$$

در نتیجه تغییرات انرژی کرنش معادل و کار معادل خارجی نیز به ترتیب از رابطه‌های (۲۸) و (۲۹) محاسبه می‌شوند:

$$E[u(\mathbf{x})] = E[u^h(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^n \lambda_i E[u(\mathbf{x}_i)] \quad (32)$$

در چارچوب کریجینگ، میدان تصادفی به یک دریفت  $Z_a(\mathbf{x})$  و یک باقیمانده ایستا با میانگین صفر  $Z_b(\mathbf{x})$  تجزیه می‌شود (۱۶):

$$u(\mathbf{x}) = Z_a(\mathbf{x}) + Z_b(\mathbf{x}) \quad (33)$$

که در آن  $E[Z_b(\mathbf{x})]=0$  و  $Z_a(\mathbf{x})=E[u(\mathbf{x})]$  مؤلفه دریفت متغیر است. دریفت می‌تواند به صورت ترکیبی خطی از تابع‌های پایه بیان شود:

$$Z_a(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_a(\mathbf{x}_i) \quad (34)$$

در عمل، انتخاب تابع‌های دریفت وابسته به کاربرد است. وقتی دریفت در یک فضای خطی با بعد محدود  $S$  قرار دارد و معمولاً با چندجمله‌ای‌های مرتبه پایین مدل می‌شود، رابطه (۳۴) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_k(\mathbf{x}_i) = p_k(\mathbf{x}), \quad 1 \leq k \leq l \quad (35)$$

که در آن  $p_k(\mathbf{x})$  تابع‌های پایه چندجمله‌ای هستند که فضای  $S$  را پوشش می‌دهند.

در مطالعه حاضر درون‌یابی کریجینگ دوبعدی با استفاده از تابع‌های پایه چندجمله‌ای کامل درجه سوم، مؤلفه دریفت با بردار پایه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}^T \quad (36)$$

بردار پایه  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{10}$  فضای تمام چندجمله‌ای‌های تا درجه سوم در دو متغیر  $x$  و  $y$  را پوشش می‌دهد و امکان مدل‌سازی دریفت‌های مکانی تا مرتبه سوم در هر دو جهت را فراهم می‌کند. میانگین مربع خطای تخمین برای مقدار پیش‌بینی شده به صورت رابطه (۳۷) تعریف می‌شود (۱۶):

$$E[(u(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i))^2] = E[u(x)^2] - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i E[u(x)u(x_i)] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E[u(x_i)u(x_j)] \quad (37)$$

برای کمینه کردن این خطا نسبت به  $\lambda_i$  و با رعایت  $l$  قید خطی (تضمین بی‌تورشی)، یک سیستم خطی متشکل از  $n+l$  معادله تشکیل می‌شود:

$$\delta \bar{U} = \int_A \delta \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} dA - \lambda^2 \int_A \delta \left( \nabla^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} dA \quad (28)$$

$$\delta \bar{V}^* = \int_A 1 - \mu^2 \nabla^2 (f_e) \delta w_0 dA + \int_A (1 - \mu^2 \nabla^2) \left( N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \frac{\partial w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \delta \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) dA + \int_{\Gamma_s} (1 - \mu^2 \nabla^2) \left( k_\theta^* \frac{\partial w_0}{\partial n} \delta \frac{\partial w_0}{\partial n} \right) d\Gamma_s \quad (29)$$

که در رابطه (۲۸):

$$(D_{11}, D_{12}, D_{22}) = \int_{-h/2}^{h/2} [1, z, z^2]^T C dz$$

همچنین  $A$  مساحت سطح میانی صفحه است.

### ۳. روش بدون شبکه بر اساس نظریه گرادیان کرنش غیر محلی

#### ۳.۱. درون‌یابی کریجینگ

فرض می‌شود یک میدان تصادفی  $u(\mathbf{x})$  روی محیط  $\Omega$  تعریف شده باشد که توسط گره‌های پراکنده  $\mathbf{x}_i, i=1, 2, \dots, N$  گسسته شده است، که در آن  $N$  تعداد کل گره‌ها در  $\Omega$  است. اگر فرض شود مقدار  $u(\mathbf{x})$  در هر نقطه  $\mathbf{x}$  تنها تحت تأثیر گره‌های واقع در یک همسایگی محلی موسوم به ناحیه تأثیر قرار داشته باشد، مقدار درون‌یابی شده در نقطه  $\mathbf{x}$  به صورت یک ترکیب خطی وزنی از مقدارهای گره‌ها بیان می‌شود (۱۵، ۱۶، ۱۹ و ۲۰):

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\mathbf{x}_i) \quad (30)$$

که در آن  $u(\mathbf{x}_i)$  مقدار مشاهده شده در گره  $\mathbf{x}_i, n$  تعداد گره‌های ناحیه تأثیر و  $\lambda_i$  وزن‌های کریجینگ هستند که با کمینه کردن میانگین مربعات خطای تخمین، تعیین می‌شوند:

$$E \left[ (u(\mathbf{x}) - u^h(\mathbf{x}))^2 \right] \quad (31)$$

با فرض خطای میانگین صفر، مقدار مورد انتظار (امید ریاضی) میدان واقعی و پیش‌بینی شده باید یکسان باشد (۱۵ و ۱۶):

می‌گذارد (۲۴). برای رفع این محدودیت، در مطالعه حاضر از یک تابع همبستگی با پشتیبانی محدود استفاده شده است که امکان ساخت تابع‌های شکل بدون نیاز به ضرایب ثابت را فراهم می‌کند. این تابع به صورت رابطه (۴۲) تعریف می‌شود (۲۵):

$$\gamma(\eta) = c(\bar{r}_i)M(\bar{r}_i), \quad \bar{r}_i = \frac{r_i}{r_s} \quad (42)$$

که در آن اندازه ناحیه تأثیر و  $r_i$  فاصله مکانی بین گره  $\mathbf{x}_i$  و نقطه درون‌یابی  $\mathbf{x}$  است. تابع پشتیبانی محدود باید خارج از ناحیه تأثیر صفر و درون آن غیرصفر باشد. در این مطالعه، از تابع پشتیبانی محدود پله‌ای<sup>۳۷</sup> استفاده شده است:

$$c(\bar{r}_i) = \begin{cases} 1 & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (43)$$

همچنین برای ساخت تابع‌های شکل، از تابع وندلند (۲۶) با پشتیبانی محدود بهره‌برده شده است:

$$M(\bar{r}_i) = \begin{cases} (1 - \bar{r}_i)^6 \times (35\bar{r}_i^2 + 18\bar{r}_i + 3), & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (44)$$

شعاع ناحیه تأثیر به شکل دایره‌ای با استفاده از رابطه (۴۵) تعریف می‌شود:

$$\bar{r}_s = \alpha d_c \quad (45)$$

که  $d_c$  فاصله مشخصه گره‌ها و  $\alpha$  یک ضریب مقیاس است. با جایگذاری وزن‌های  $\lambda_i$  از رابطه (۴۱) در رابطه (۳۰)، مقدار درون‌یابی شده در نقطه  $\mathbf{x}$  به شکل زیر بیان می‌شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (46)$$

که در آن  $\mathbf{u} = [u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2), \dots, u(\mathbf{x}_n)]^T$  و  $\Phi_I(\mathbf{x})$  ماتریس تابع‌های شکل است:

$$\Phi_I(\mathbf{x}) = \gamma^T \mathbf{S} + \mathbf{p}^T \mathbf{Y} \quad (47)$$

که:

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{Y}) \quad (48)$$

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \quad (49)$$

تابع‌های شکل  $\Phi_I(\mathbf{x})$  دارای ویژگی‌های مهمی از جمله برقرار نمودن شرط دلتای کرونگر و افراز یکه هستند. مشتق‌های مرتبه

$$\sum_{j=1}^n E[u(x_i)u(x_j)]\lambda_j + \sum_{k=1}^l \mu_k p_k(x_i) = E[u(x)u(x_i)], \quad 1 \leq i \leq n \quad (38)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j p_k(\mathbf{x}_j) = p_k(\mathbf{x}), \quad 1 \leq k \leq l \quad (39)$$

که در آن ضرایب‌های لاگرانژ<sup>۳۳</sup>، مربوط به قیدها هستند.

با توجه به این که مربع خطای تخمین همیشه غیرمنفی است، فرم مربعی در رابطه (۳۷) باید مثبت باشد و اگر مثبت معین باشد، سیستم کریجینگ جواب یکتا خواهد داشت. با فرض ایستایی ذاتی، کوواریانس<sup>۳۴</sup>  $E[u(\mathbf{x})u(\mathbf{x}_i)]$  با نیم واریوگرام<sup>۳۵</sup>  $\gamma(\eta)$  جایگزین می‌شود (۱۵ و ۱۶).

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \gamma(\eta) = \frac{1}{2} E \left[ (u(\mathbf{x} + \eta) - u(\mathbf{x}))^2 \right] \quad (40)$$

که در آن  $\eta$  فاصله اقلیدسی بین  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}_i$  است.

دستگاه معادله‌های (۳۸) و (۳۹) به صورت ماتریسی رابطه (۴۱) نوشته می‌شوند (۱۵، ۱۶، ۱۸ و ۲۴):

$$\mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{g} \quad (41)$$

که در آن:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = [\gamma(\mathbf{x}) \quad \mathbf{p}(\mathbf{x})]^T$$

$$\mathbf{V} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n \quad \mu_1 \quad \dots \quad \mu_l]^T$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & \gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & \dots & \gamma(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}$$

$$\gamma(\mathbf{x})^T = [\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \quad \dots \quad \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)]^T$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x})^T = [p_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad p_l(\mathbf{x})]^T$$

در روش بدون شبکه، دقت و عملکرد تابع‌های شکل کریجینگ به انتخاب ضریب همبستگی در تابع کوواریانس و تعداد گره‌های ناحیه تأثیر وابسته است. تعیین مقدار بهینه برای ضریب همبستگی دشوار است، زیرا به شدت بر اجرای شرط دلتا کرونگر<sup>۳۶</sup> تأثیر

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\varepsilon_0 \quad \varepsilon_1\}^T = \sum_{l=1}^n \{\mathbf{B}_l^m \quad \mathbf{B}_l^b\}^T \mathbf{q}_l = \sum_{l=1}^n \mathbf{B}_l^T \mathbf{q}_l \quad (59)$$

که در آن:

$$\mathbf{B}_l^m = \begin{bmatrix} \Phi_{l,x} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{l,y} & 0 \\ \Phi_{l,y} & \Phi_{l,x} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_l^b = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{l,xx} \\ 0 & 0 & \Phi_{l,yy} \\ 0 & 0 & 2\Phi_{l,xy} \end{bmatrix} \quad (60)$$

ماتریس  $\mathbf{B}^g$  به صورت رابطه (61) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{B}^g = \left\{ \begin{matrix} w_{0,x} \\ w_{0,y} \end{matrix} \right\} = \sum_{l=1}^n \mathbf{B}_l^g \mathbf{q}_l \quad (61)$$

$$\mathbf{B}_l^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{l,x} \\ 0 & 0 & \Phi_{l,y} \end{bmatrix}$$

با جایگذاری معادله‌های (58) تا (61) در معادله‌های (28) و (29)، فرم ضعیف برای تحلیل کمانش نانو صفحه تابعی مدرج تقویت شده با گرافن به صورت رابطه (62) به دست می‌آید:

$$(\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_g) \bar{\mathbf{q}} = 0 \quad (62)$$

که در آن، ضریب مقاومت کمانشی  $\lambda_{cr}$  ماتریس سختی کل  $\mathbf{K}$  و ماتریس سختی هندسی  $\mathbf{K}_g$  به ترتیب به صورت رابطه (63) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^b + \mathbf{K}^w + \mathbf{K}^p + (\mathbf{K}^w)^{NL} + (\mathbf{K}^p)^{NL} + \mathbf{K}^\theta \quad (63)$$

که در آن:

$$\mathbf{K}^b = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{B} d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{B} d\Omega \quad (\nabla^2 \mathbf{B})^T \quad (64)$$

$$\mathbf{K}_g^w = \int_{\Omega} [0 \quad 0 \quad \Phi_l]^T k_w^* [0 \quad 0 \quad \Phi_l] d\Omega \quad (65)$$

$$(\mathbf{K}^w)^{NL} = \int_{\Omega} \mu^2 \left[ \begin{matrix} ([0 \quad 0 \quad \Phi_{l,x}]^T k_w^* [0 \quad 0 \quad \Phi_{l,x}]) \\ + ([0 \quad 0 \quad \Phi_{l,y}]^T k_w^* [0 \quad 0 \quad \Phi_{l,y}]) \end{matrix} \right] d\Omega \quad (66)$$

جدول ۱. ضریب مقاومت کمانشی بدون بعد صفحه‌های مربعی شکل با تکیه‌گاه ساده با استفاده از NSGT ( $a/h=50$ ).

چیدمان	$\mu=0$			$\mu=1$			$\mu=2$		
	$\lambda=0$	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=0$	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=0$	$\lambda=1$	$\lambda=2$

اول، دوم و سوم تابع‌های شکل کریجینگ متحرک نیز به ترتیب به صورت رابطه‌های (50) تا (57) تعریف می‌شوند:

$$\Phi_{l,x}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_{j,x}(\mathbf{x}) Y_{jl} \pm \sum_{k=1}^n \gamma_{k,x}(\mathbf{x}) S_{kl} \quad (50)$$

$$\Phi_{l,y}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_{j,y}(\mathbf{x}) Y_{jl} \pm \sum_{k=1}^n \gamma_{k,y}(\mathbf{x}) S_{kl} \quad (51)$$

$$\Phi_{l,xx}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_{j,xx}(\mathbf{x}) Y_{jl} \pm \sum_{k=1}^n \gamma_{k,xx}(\mathbf{x}) S_{kl} \quad (52)$$

$$\Phi_{l,yy}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_{j,yy}(\mathbf{x}) Y_{jl} \pm \sum_{k=1}^n \gamma_{k,yy}(\mathbf{x}) S_{kl} \quad (53)$$

$$\Phi_{l,xxx}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_{j,xxx}(\mathbf{x}) Y_{jl} \pm \sum_{k=1}^n \gamma_{k,xxx}(\mathbf{x}) S_{kl} \quad (54)$$

$$\Phi_{l,yyy}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_{j,yyy}(\mathbf{x}) Y_{jl} \pm \sum_{k=1}^n \gamma_{k,yyy}(\mathbf{x}) S_{kl} \quad (55)$$

$$\Phi_{l,xy}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_{j,xy}(\mathbf{x}) Y_{jl} \pm \sum_{k=1}^n \gamma_{k,xy}(\mathbf{x}) S_{kl} \quad (56)$$

$$\Phi_{l,yx}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_{j,yx}(\mathbf{x}) Y_{jl} \pm \sum_{k=1}^n \gamma_{k,yx}(\mathbf{x}) S_{kl} \quad (57)$$

۲. ۳. نظریه گرادیان کرنش غیرمحللی بر اساس تابع شکل کریجینگ متحرک

با توجه به تابع کریجینگ متحرک، میدان جابجایی می‌تواند به صورت رابطه زیر بیان شود:

$$\mathbf{u}^h(x, y) = \sum_{l=1}^n \begin{bmatrix} \Phi_l & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_l & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_l \end{bmatrix} \mathbf{q}_l \quad (58)$$

که در آن،  $\mathbf{q}_l = \{u_{0l} \quad v_{0l} \quad w_{0l}\}^T$  یک بردار شامل درجه‌های آزادی گره  $l$  است.

با جایگذاری رابطه (58) در معادله‌های (12)، مولفه‌های کرنش به صورت (59) بازنویسی می‌شوند:

۷×۷	۰/۰۶۸۸	۰/۰۶۹۵	۰/۰۷۱۷	۰/۰۶۸۳	۰/۰۶۹۰	۰/۰۷۱۱	۰/۰۶۶۷	۰/۰۶۷۴	۰/۰۶۹۵
۹×۹	۰/۰۶۹۰	۰/۰۶۹۶	۰/۰۷۱۵	۰/۰۶۸۴	۰/۰۶۹۱	۰/۰۷۱۰	۰/۰۶۶۹	۰/۰۶۷۵	۰/۰۶۹۴
۱۱×۱۱	۰/۰۶۹۰	۰/۰۶۹۷	۰/۰۷۱۵	۰/۰۶۸۵	۰/۰۶۹۱	۰/۰۷۰۹	۰/۰۶۶۹	۰/۰۶۷۶	۰/۰۶۹۳
۱۳×۱۳	۰/۰۶۹۳	۰/۰۶۹۹	۰/۰۷۱۶	۰/۰۶۸۸	۰/۰۶۹۳	۰/۰۷۱۰	۰/۰۶۷۲	۰/۰۶۷۸	۰/۰۶۹۴
۱۵×۱۵	۰/۰۶۹۳	۰/۰۶۹۹	۰/۰۷۱۶	۰/۰۶۸۸	۰/۰۶۹۴	۰/۰۷۱۱	۰/۰۶۷۲	۰/۰۶۷۸	۰/۰۶۹۴
۱۷×۱۷	۰/۰۶۹۵	۰/۰۶۹۹	۰/۰۷۱۸	۰/۰۶۸۹	۰/۰۶۹۵	۰/۰۷۱۲	۰/۰۶۷۳	۰/۰۶۷۹	۰/۰۶۹۶
۱۹×۱۹	۰/۰۶۹۵	۰/۰۷۰۱	۰/۰۷۱۷	۰/۰۶۹۰	۰/۰۶۹۶	۰/۰۷۱۲	۰/۰۶۷۴	۰/۰۶۸۰	۰/۰۶۹۵
۲۱×۲۱	۰/۰۶۹۶	۰/۰۷۰۲	۰/۰۷۱۸	۰/۰۶۹۰	۰/۰۶۹۶	۰/۰۷۱۲	۰/۰۶۷۴	۰/۰۶۸۰	۰/۰۶۹۶
۲۳×۲۳	۰/۰۶۹۶	۰/۰۷۰۲	۰/۰۷۱۸	۰/۰۶۹۱	۰/۰۶۹۶	۰/۰۷۱۲	۰/۰۶۷۵	۰/۰۶۸۰	۰/۰۶۹۶
۲۵×۲۵	۰/۰۶۹۶	۰/۰۷۰۲	۰/۰۷۱۸	۰/۰۶۹۱	۰/۰۶۹۶	۰/۰۷۱۲	۰/۰۶۷۵	۰/۰۶۸۰	۰/۰۶۹۶
مرجع (۱۳)	۰/۰۶۹۸	۰/۰۷۰۴	۰/۰۷۲۰	۰/۰۶۹۳	۰/۰۶۹۸	۰/۰۷۱۵	۰/۰۶۷۷	۰/۰۶۸۲	۰/۰۶۹۸

نسبت پواسون برابر با ۰/۲۴ است (۱۳). به منظور ارزیابی همگرایی روش بدون شبکه، صفحه مربعی شکل با تعداد مختلف گره‌ها در دامنه سازه در نظر گرفته شده است. سه مقدار صفر، یک و دو برای متغیر گرادین کرنش ماده  $\lambda$  و متغیر غیرمحملی  $\mu^2$  در معادله (۲۲) بررسی شده‌اند، مقادیر همگرایی روش بدون شبکه در تخمین ضریب بدون بعد کمانش صفحه مربعی شکل در جدول (۱) ملاحظه می‌شود.

نتیجه مطالعه حاضر با حل دقیق ارائه شده توسط لو و همکاران (۱۳) مقایسه شده است. این مقایسه نشان‌دهنده تطابق خوب روش‌ها است به طوری که درصد اختلاف حدود ۰/۳ درصد است. برای محاسباتی که اثر اندازه را در نظر می‌گیرند، مرتبه چندجمله‌ای  $m=10$  یعنی تعداد جمله‌های رابطه (۳۶) و ضریب مقیاس  $\alpha=2/7$  در رابطه (۴۵) انتخاب شده است. به منظور انتگرال‌گیری عددی، ناحیه به شبکه با جزءهای<sup>۳۸</sup> مستطیلی تقسیم شده و از روش گوس<sup>۳۹</sup>  $4 \times 4$  برای هر جزء شبکه استفاده شده است.

در ادامه، یک صفحه همسانگرد با شکل مربعی و لبه‌های گیردار، با مشخصات مشابه صفحه با تکیه‌گاه ساده، ذکر شده در بالا، جدول ۲. ضریب بار بدون بعد کمانش نانوصفحه‌های مربعی شکل با تکیه‌گاه گیردار بر اساس نظریه گرادین کرنش غیرمحملی ( $a/h=50$ ).

پژوهش حاضر	مرجع (۱۳)	این پژوهش	مرجع (۱۳)	این پژوهش	مرجع (۱۳)	این پژوهش
	$\lambda=2$		$\lambda=1$		$\lambda=0$	
۰/۲۱۲۷۶۳	۰/۲۰۰۸	۰/۱۹۱۴۷۱	۰/۱۹۰۸	۰/۱۸۴۳۴۷	۰/۱۸۷۴	$\mu=0$

$$\mathbf{K}_U^p = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{I,x} \end{bmatrix}^T \mathbf{G}_f^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{J,x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (67)$$

$$+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{I,y} \end{bmatrix}^T \mathbf{G}_f^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{J,y} \end{bmatrix} d\Omega$$

$$\left( \mathbf{K}^p \right)_U^{NL} = \int_{\Omega} \mu^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{I,xx} + \Phi_{I,yy} \end{bmatrix}^T \mathbf{G}_f^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{J,xx} + \Phi_{J,yy} \end{bmatrix} d\Omega \quad (68)$$

$$\mathbf{K}_g = \int_{\Omega} \left( \mathbf{B}^g \right)^{\top} \begin{bmatrix} N_x^0 & N_{xy}^0 \\ N_{xy}^0 & N_y^0 \end{bmatrix} \left( \mathbf{B}^g - \mu^2 \nabla^2 \mathbf{B}^g \right) d\Omega \quad (69)$$

$$\mathbf{K}_U^{\theta} = \int_{\Gamma_s} \left( \mathbf{B}_I^{\theta} \right)^{\top} k_{\theta}^* \left( \mathbf{B}_J^{\theta} - \mu^2 \nabla^2 \mathbf{B}_J^{\theta} \right) d\Gamma_s \quad (70)$$

$$\mathbf{B}_I^{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{I,m} \end{bmatrix} \quad (71)$$

#### ۴. تحلیل و بررسی

##### ۱.۴ راستی آزمایی

ابتدا چگونگی همگرایی روش پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک نانو صفحه سیلیکونی با ضخامت  $h=1\text{nm}$  و نسبت طول به ضخامت ۵۰ در نظر گرفته شده است. ویژگی‌های مصالح این صفحه شامل ضریب کشسانی برابر با ۲۱۰ گیگاپاسکال و

$\mu=1$	۰/۱۸۴۱	۰/۱۸۰۳۲۵	۰/۱۸۷۴	۰/۱۸۷۲۹۴	۰/۱۹۷۳	۰/۲۰۸۱۱۹
$\mu=2$	۰/۱۷۴۹	۰/۱۶۹۲۴۸	۰/۱۷۸	۰/۱۷۵۷۸۷	۰/۱۸۷۴	۰/۱۹۵۳۲۷

جدول ۳. بارهای بی‌بعد کمانشی برای صفحه‌های چندلایه با تکیه‌گاه ساده و دارای توزیع تابعی مواد (FG) تقویت‌شده با گرافن (GPLRC) تحت بارگذاری مکانیکی ( $a/h=10, a/b=1$ ).

نوع صفحه چندلایه	درصد وزنی گرافن	مرجع (۲۷)	پژوهش حاضر
FG_X	۰/۱	۰/۰۴۶	۰/۰۴۶۳۴۶
	۰/۳	۰/۰۷۵۸	۰/۰۷۶۲۸
	۰/۵	۰/۰۱۰۵۵	۰/۰۱۰۶۱۹۳
FG_V	۰/۱	۰/۰۴۱۳	۰/۰۴۱۵۰۱
	۰/۳	۰/۰۶۱۹	۰/۰۶۰۸۵۴
	۰/۵	۰/۰۸۲۵	۰/۰۷۹۶۸۸
FG_O	۰/۱	۰/۰۳۶۶	۰/۰۳۷۲۲۲
	۰/۳	۰/۰۴۷۸	۰/۰۴۸۹۱۹
	۰/۵	۰/۰۵۸۸	۰/۰۶۰۶۱۳
اپوکسی خالص	۰/۰	۰/۰۳۱	۰/۰۳۱۳۷۲

که از روش تفاضل مربعات استفاده کرده‌اند، مقایسه شده است. جدول ۳ نتیجه‌های مقاومت کمانشی صفحه‌های چندلایه تقویت شده با نانو گرافن، با نسبت ابعاد  $a/b=1$  و  $al/h=10$  و شامل ۱۰ لایه، تحت اثر بار یکنواخت محوری در راستای محور x را نشان می‌دهد. اپوکسی به عنوان ماتریس و گرافن‌های تقویت‌کننده با ابعاد  $2/5 \times 1/5$  میکرومتر و با ضخامت  $1/5$  نانومتر (۲۷) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. ویژگی‌های مواد در جدول ۴ ارائه شده است.

یک مطالعه مقایسه‌ای به منظور اعتبارسنجی روش بدون شبکه پیشنهادی، برای نانوصفحه‌های تابعی مدرج تقویت شده با

مورد ارزیابی قرار گرفته شده است. مقادیر مختلف متغیرگردیان کرنش و متغیر غیرمحملی به منظور بررسی تأثیر آنها بر رفتار کمانشی در نظر گرفته شده است. نتایج برای ضریب بدون بعد مقاومت کمانشی در جدول ۲ ارائه شده است. شرط‌های مرزی گیردار شامل مقدار شیب صفر در تکیه‌گاه‌ها است که با صفر کردن جابجایی در گره‌های مرزی و گره‌های مجاور آن اعمال شده است. مقایسه روش حاضر با نتیجه‌های دقیق لو و همکاران (۱۳) نشان‌دهنده تطابق بسیار خوب آن‌ها است.

در ادامه به منظور صحت‌سنجی روش پیشنهادی برای تحلیل صفحه‌های تقویت شده با لایه‌های گرافن، روش بدون شبکه مطالعه حاضر با پژوهش گزارش شده توسط وو و همکاران (۲۷)

جدول ۴. ویژگی‌های مواد اپوکسی و گرافن (۲۷).

ویژگی‌های ماده	اپوکسی	گرافن (GPL)
ضریب کشسان (گیگاپاسکال)	۳	۱۰۱۰
چگالی (کیلوگرم بر متر مکعب)	۱۲۰۰	۱۰۶۲/۵

جدول ۵. بار کمانشی صفحه بر روی بستر کشسان.

$a/h$	$(k_w, G_f)$	مرجع (۲۸) ضریب بدون بعد کمانش	مرجع (۲۹) مقاومت کمانشی	پژوهش حاضر
۱۰۰	(۰,۰)	۴	—	۳/۹۹۵۶۲
	(۱۰۰,۰)	۵/۰۲	—	۵/۰۲۱۴۱۳
	(۰,۱۰۰)	۱۸/۹۲	—	۱۸/۹۲۹۶۵
۱۰	(۰,۰)	—	۳۷/۴۴۷۷	۳۹/۴۳۵۱۹
	(۱۰۰,۱۰)	—	۶۷/۵۷۹۸	۶۹/۵۴۸۱۴
	(۱۰۰۰,۱۰۰)	—	۲۰۴/۶۵۱	۲۱۱/۹۹۵۷

$$G_f = G_f^* a^2 / D$$

$$k_w = k_w^* a^4 / D \quad (۷۲)$$

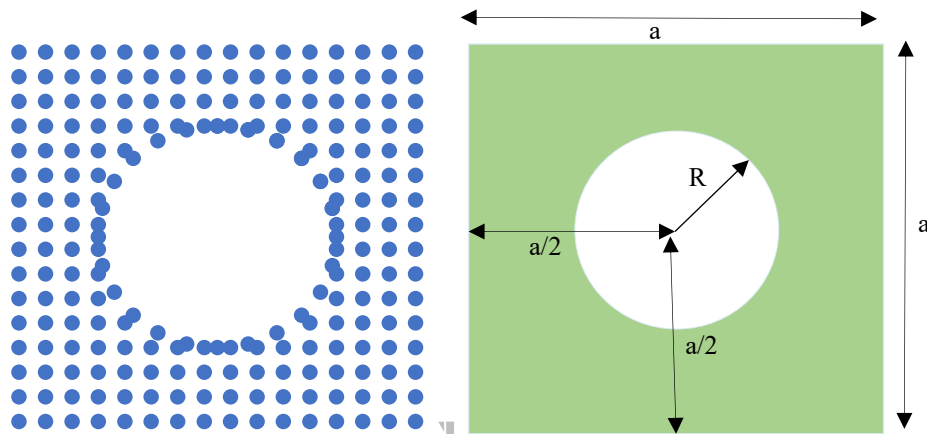
$$D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$$

به منظور اعتبارسنجی چارچوب عددی پیشنهادی در تحلیل کمانش صفحه‌های دارای بازشو (شکل ۳)، بارهای بحرانی نرمال‌شده یک صفحه مربعی شکل با بازشوی دایره‌ای مرکزی و نسبت شعاع بازشو به بعد صفحه برابر با ۰/۳، تحت شرایط بارگذاری مختلف با داده‌های مرجع (۳۰) مقایسه شده است (جدول ۷). این مقایسه نشان می‌دهد که نتایج حاضر برای کمانش مکانیکی صفحه‌های دارای بازشو با داده‌های موجود تطابق بسیار خوبی دارند.

نمونه‌های اعتبارسنجی ارائه شده در جدول‌های ۱ تا ۳ و همچنین (۵ و ۶) نشان‌دهنده سازگاری مناسب نتیجه‌ها با پاسخ‌های مرجع هستند و دقت و اثربخشی روش پیشنهادی در شبیه‌سازی رفتارهای پیچیده سازه‌ای، شامل ناپیوستگی‌های هندسی مانند بازشوها، و نیز اثرهای وابسته به اندازه و تعامل با بستر کشسان را تأیید می‌کنند. این اعتبارسنجی کارآیی و قابلیت بالای روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

نانوصفحه‌های گرافن (GPLR-FG)، انجام شده است. نتایج متناظر با نتایج تحلیلی گزارش شده توسط نگویان و همکاران (۱۴) مقایسه شده است. اگر مقدار پارامترهای غیر محلی و گرادیان کرنش برابر با دو، نسبت طول به عرض صفحه برابر با یک، نسبت طول به ضخامت صفحه برابر با پنجاه، مقدار ضریب توزیع توانی برابر با دو و مقدار گرافن دو درصد باشد، ضریب کمانش بدست آمده با استفاده از روش حاضر ۱/۸۷۳۹ است که با مقایسه با ضریب کمانش بدست آمده توسط نگویان و همکاران که ۱/۸۸۹۲ است که اختلاف حدود ۰/۷ درصد را نشان می‌دهند.

به منظور اعتبارسنجی روش پیشنهادی به منظور تحلیل صفحه‌های قرار گرفته بر بستر کشسان، دقت روش پیشنهادی با نتیجه‌های مرجع‌های (۲۸ و ۲۹) مقایسه و ارزیابی شده است. همان‌طور که در جدول ۵ مشاهده می‌شود، روش بدون شبکه حاضر دقت بسیار خوبی برای متغیرهای سختی مختلف بستر کشسان و نسبت‌های مختلف بعدهای صفحه دارد. در این جا  $G_f$  ثابت سختی پاسترناک و  $k_w$  ثابت سختی وینکلر به صورت زیر تعریف می‌شوند:



شکل ۳. توزیع گره‌ها در روش بدون شبکه به منظور تحلیل صفحه دارای بازشوی دایره‌ای.

جدول ۶. بار کمانشی صفحه مربعی با بازشوی دایره‌ای شکل.

بار تک‌محوری	بار دو‌محوری	نظریه صفحه	پژوهش حاضر
۱/۹۸۴	۱/۰۳۵	(KPT)	
۱/۹۸۶	۱/۰۲۱	(FSDPT)	مرجع (۳۰)
۱/۹۶۹	۱/۰۳۲	(TSDT)	

جدول ۷. ویژگی‌های ماده‌ای فلز و سیلیکون (۱۴).

ضریب پواسون	ضریب کشسانی (گیگاپاسکال)	مصالح
۰/۳۳	۱۰۷	Si
۰/۲۳	۹۰	Al

#### ۲.۴. بررسی رفتار سازه

در این بخش، رفتار کمانش نانوصفحه‌های تابعی مدرج تقویت‌شده با نانوصفحه‌گرافن (GPLR-FG) که روی یک بستر کشسان از نوع وینکلر-پاسترناک قرار دارند، بررسی شده است. برای این هدف یک نانوصفحه مستطیلی GPLR-FG با ۱۰ لایه در نظر گرفته شده است. ویژگی‌های مصالح صفحه‌های گرافن به صورت زیر هستند:

ضریب کشسانی **۱۰۱۰ گیگاپاسکال**، چگالی  $۱۰۶۲/۵$  کیلوگرم بر متر مکعب، ضریب پواسون  $۰/۱۸۶$  و طول نانوغرافن‌ها  $۲/۵$  نانومتر، عرض آن‌ها  $۱/۵$  نانومتر و ضخامت آن‌ها  $۰/۳$  نانومتر است. ماتریس تابعی پایه از سیلیکون (Si) و آلومینیوم

(Al) تشکیل شده است و ویژگی‌های مصالح آنها در جدول ۷

ارائه شده است. در این بخش، مقدار ضریب کمانشی (NBCL)

به صورت  $\tilde{N} = N_{cr}(a/h)^2/E_{si}$  تعریف شده است.

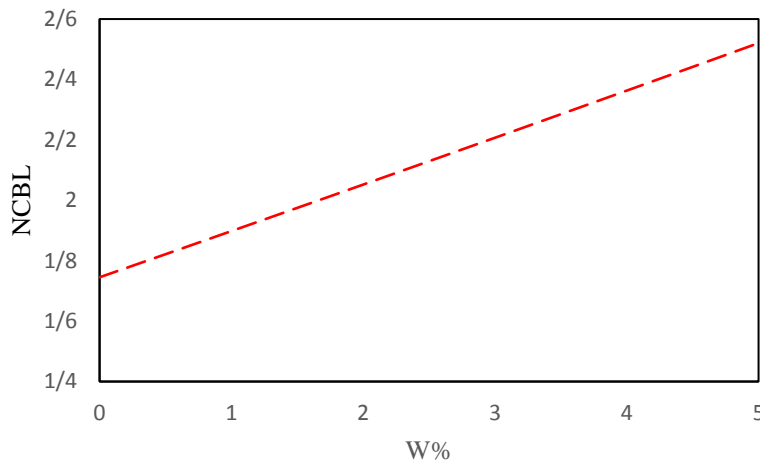
چند نوع تکیه‌گاه در نظر گرفته شده است:

- تکیه‌گاه ساده در تمام لبه‌ها:

- برای صفحه تحت اثر بار دو‌محوری، در همه لبه‌های مرزی، جابجایی‌ها یعنی  $w$ ،  $u$  و  $v$  برابر صفر می‌باشند،
- برای صفحه تحت اثر بار تک‌محوری، در همه لبه‌های مرزی  $w=v=0$ ، و  $u$  در لبه‌های موازی محور  $x$  برابر صفر می‌باشد،

- تکیه‌گاه گیردار در تمام لبه‌ها:

$$k_w=G_f=0, FG\_X, P\_FGM, p=5, \mu=\lambda=2, a/h=10, h=3$$



شکل ۴. تغییرات ضریب کمانشی بار تک محوری نانوصفحه GPLR-FG بر حسب سهم وزنی نانوصفحه‌های گرافن (GPL).

شکل ۵ تغییر ضریب کمانشی بار تک محوری نانوصفحه‌های با تکیه‌گاه ساده بر حسب متغیر غیرمحملی  $\mu^2$  در چارچوب NSGT را نشان می‌دهد. تأثیر کشسانی غیرمحملی ضریب مقاومت کمانشی را کاهش می‌دهد، که اهمیت تأثیرهای غیرمحملی در پایداری نانوصفحه‌ها را نشان می‌دهد. افزایش  $\mu^2$  باعث کاهش ضریب مقاومت کمانشی می‌شود، که نشان‌دهنده کاهش سختی مؤثر و کاهش مقاومت کمانشی نانوصفحه‌ها است. با رسیدن  $\mu^2$  به پنج مقاومت کمانشی حدود دو درصد کاهش پیدا می‌کند. نکته دیگر این‌که کاهش مقاومت با مقدار  $\mu^2$  رابطه خطی دارد.

شکل ۶ ضریب کمانشی بار دو محوری نانوصفحه‌های با تکیه‌گاه گیردار را بر حسب متغیر غیرمحملی  $\mu^2$  نشان می‌دهد. مانند حالت با تکیه‌گاه ساده، افزایش  $\mu^2$  باعث کاهش ضریب مقاومت کمانشی می‌شود، که نشان‌دهنده کاهش سختی مؤثر و کاهش مقاومت کمانشی نانوصفحه‌ها است. با رسیدن  $\mu^2$  به پنج مقاومت کمانشی حدود چهار درصد کاهش پیدا می‌کند. با مقایسه شکل‌های ۵ و ۶ می‌توان دریافت که برای صفحه با تکیه‌گاه گیردار نسبت به صفحه با تکیه‌گاه ساده تأثیر افزایش متغیر غیر محلی حدود دو برابر است.

شکل ۷ تغییر ضریب مقاومت کمانشی نانوصفحه‌های با تکیه‌گاه ساده تحت اثر بار دو محوری بر حسب متغیر ضریب

$w=v=u=\partial w/\partial n=0$  هستند که در آن  $n$  محور عمود بر لبه‌ها است.

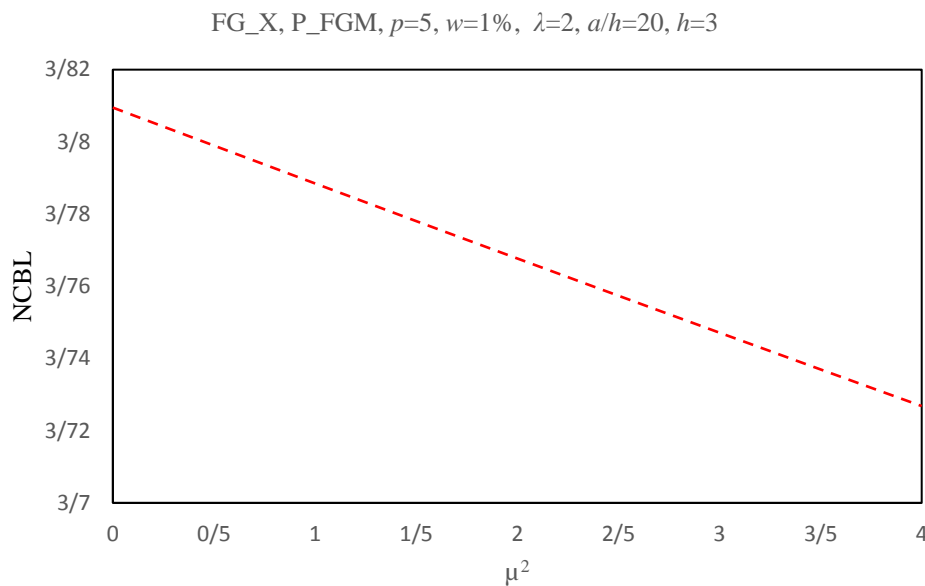
- تکیه‌گاه ساده یا آزاد در لبه‌ها (آزاد-آزاد-آزاد-ساده):

• در  $w=0$ ؛  $y=0, b$  در  $u=v=0$  و صفحه تحت اثر بار دومحوری قرار دارد.

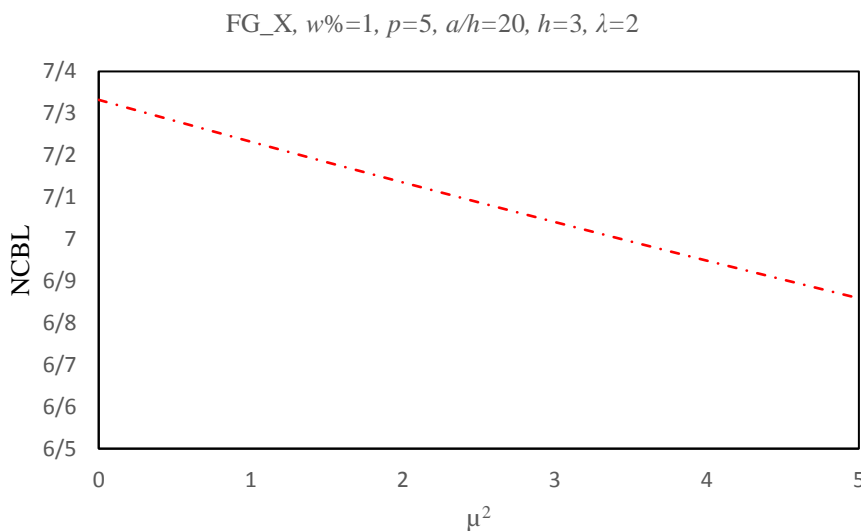
- تکیه‌گاه غیرکلاسیک:

• مهار کشسان چرخشی در لبه و صفحه تحت اثر بار دومحوری.

شکل ۴ ضریب کمانشی بار تک محوری نانوصفحه‌های GPLR-FG را بر حسب درصد وزن گرافن (W%) نشان می‌دهد. نتیجه‌ها نشان‌دهنده همبستگی مثبت بین NCB و W% است که به دلیل افزایش سختی مؤثر ناشی از تقویت با گرافن است. با افزایش درصد وزنی نانوغرافن‌ها ضریب کمانش به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند. با توجه به شکل ۴ مشخص می‌شود که با افزایش هر یک درصد نانوصفحه گرافنی حدود هشت درصد به مقاومت کمانشی نانوصفحه تابعی مدرج تقویت شده افزوده می‌گردد. لازم به ذکر است که ویژگی‌های صفحه مورد نظر و مقدار هر کدام از متغیرهای مربوط به تحلیل در شکل آورده شده است.



شکل ۵. تغییرات ضریب کمانشی بار تک محوری نانوصفحه GPLR-FG با تکیه‌گاه ساده بر حسب پارامتر غیرمحلی.



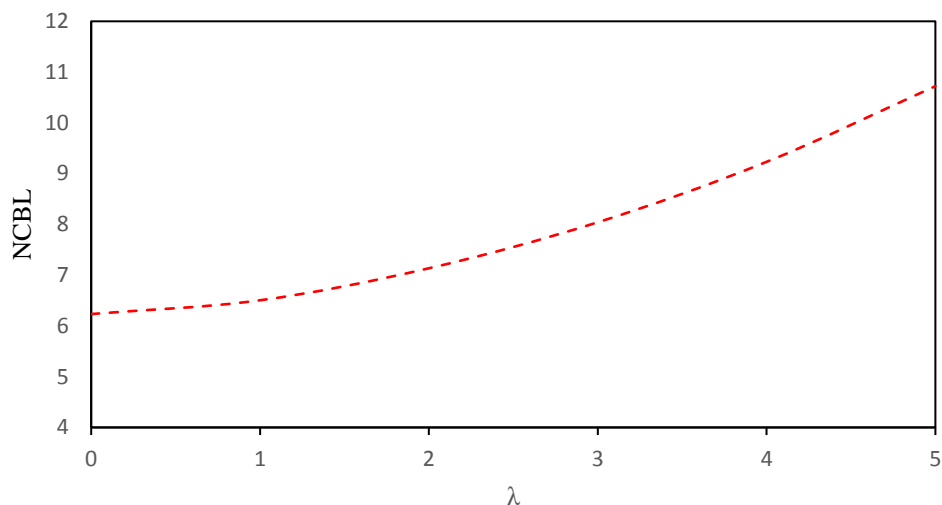
شکل ۶. تغییرات ضریب کمانشی بار دو محوری نانوصفحه GPLR-FG با تکیه‌گاه گیردار بر حسب متغیر غیرمحلی.

درصد بزرگتر از  $\lambda$  برابر با صفر است در حالی که با در نظر گرفتن  $\lambda$  برابر با ۵، میزان بزرگتر شدن ضریب مقاومت کمانشی حدود ۷۲ درصد است.

شکل ۸ تأثیر متغیر بستر کشسان وینکلر  $k_w$  بر ضریب بدون بعد مقاومت کمانشی نانوصفحه‌ها با تکیه‌گاه با تکیه‌گاه گیردار را نشان می‌دهد. برای استفاده از رابطه (۷۲) سختی خمشی

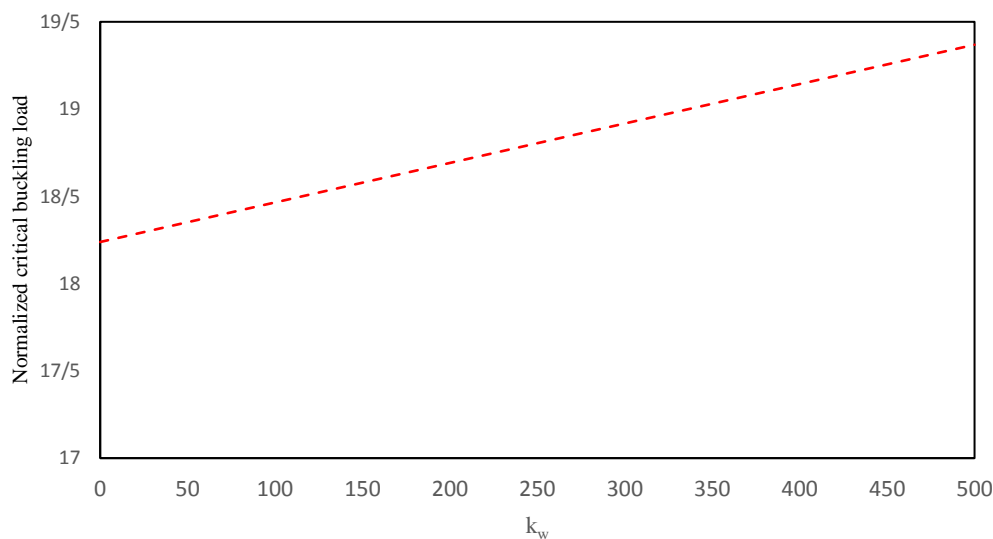
گرادیان کرنش  $\lambda$  را نشان می‌دهد. که نشان‌دهنده افزایش غیر یکنواخت NCB با افزایش  $\lambda$  است. ضریب گرادیان کرنش بزرگ‌تر باعث افزایش بیشتر سختی و مقاومت کمانشی نانوصفحه‌ها می‌شود یعنی با بزرگتر شدن ضریب گرادیان کرنش، شیب افزایش مقاومت کمانشی بیشتر می‌شود. اگر ضریب گرادیان کرنش برابر یک فرض شود ضریب کمانش تخمینی حدود چهار

$$h=5, a/h=50, FG\_X, w=1\%, \mu^2=2, p=5$$



شکل ۷. تغییر ضریب کمانشی بار دو محوری نانوصفحه GPLR-FG با تکیه‌گاه ساده بر حسب متغیر گرایان کرنش.

$$FG\_O, w=0.5\%, p=5, \mu^2=\lambda=2, G_f=100$$



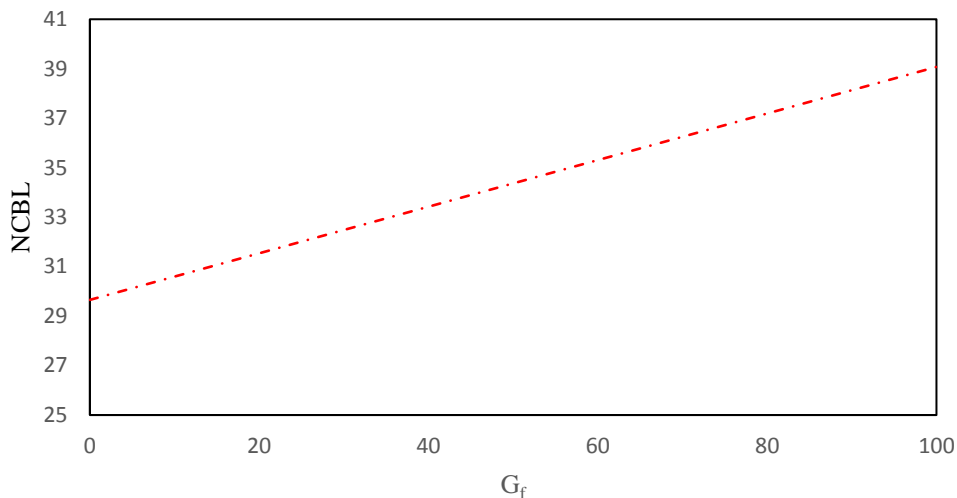
شکل ۸. تأثیر سختی وینکلر بر بار کمانش محوری نانوصفحه با تکیه‌گاه گیردار.

در شکل ۹ اثر متغیر برشی بستر پاسترناک  $G_f$  بر ضریب کمانشی نانوصفحه‌های GPLR-FG تحت شرط‌های مرزی ساده و گیردار نشان داده شده است. وجود بستر کشسان وینکلر-پاسترناک نقش قابل توجهی در افزایش مقاومت کمانشی نانوصفحه ایفا می‌کند. در شرایط هندسی و مادی یکسان،

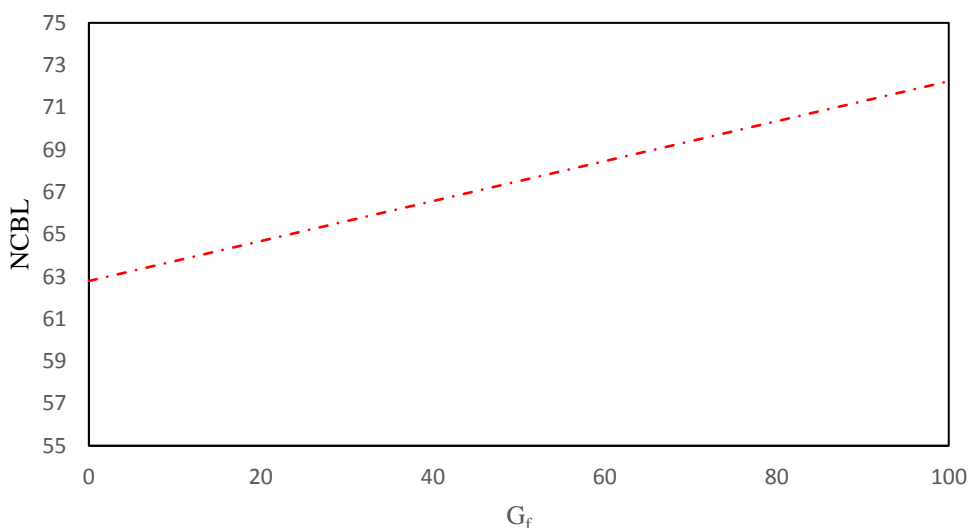
نانوصفحه تابعی مدرج به صورت رابطه (۷۳) تعریف می‌شود. افزایش  $k_w$  باعث افزایش ۶/۲ درصدی ضریب کمانش می‌شود و نشان‌دهنده نقش بستر در افزایش مقاومت نانوصفحه‌ها است.

$$D = E_2 h^3 / (12(1 - \nu_2^2)) \quad (73)$$

شکل ۹. تأثیر پارامتر بستر الاستیک پاسترناک بر ضریب کمانشی نانوصفحه، (الف) با تکیه‌گاه ساده و (ب) با تکیه‌گاه گیردار.  $FG\_O, w\%=0.5, p=5, \lambda=\mu^2=2, k_w=100$



شکل ۹. تأثیر پارامتر بستر الاستیک پاسترناک بر ضریب کمانشی نانوصفحه، (ب) با تکیه‌گاه گیردار.  $FG\_O, w\%=0.5, p=5, \lambda=\mu^2=2, k_w=100$

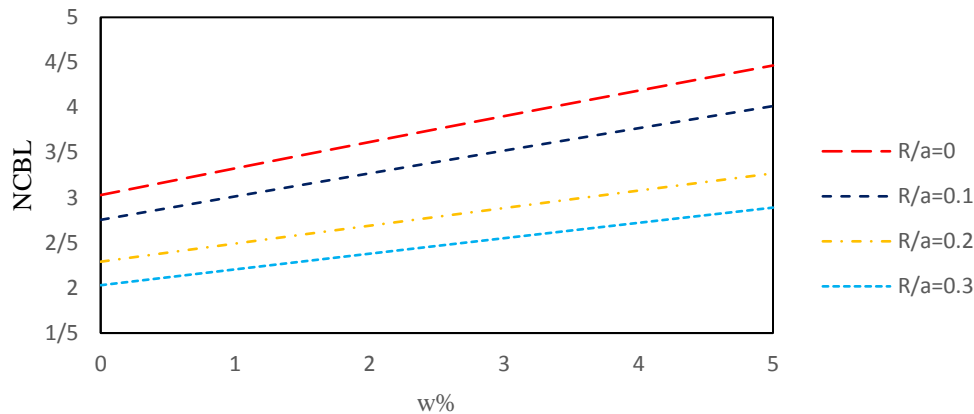


شکل ۹. تأثیر پارامتر بستر الاستیک پاسترناک بر ضریب کمانشی نانوصفحه، (الف) با تکیه‌گاه ساده و (ب) با تکیه‌گاه گیردار.

متغیر برشی بستر پاسترناک به مقدار ۱۰۰، حدود ۲۵ درصد ضریب کمانش افزایش می‌یابد که در مقایسه با تأثیر ضریب وینکلر بر مقاومت کمانشی (در شکل ۸) بسیار بیشتر است. شکل‌های ۱۰ و ۱۱ اثر نسبت اندازه بازشوی دایره‌ای مرکزی  $(R/a)$  بر ضریب کمانشی (NCBL) نانوصفحه‌های تابعی

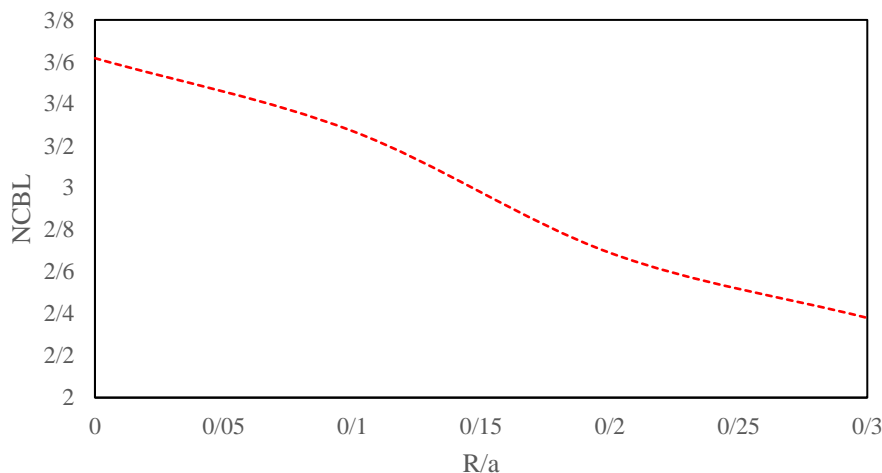
نانوصفحه‌های قرار گرفته بر روی بستر کشسان دارای مقادیر ضریب کمانش (NCBL) بالاتری هستند. بستر کشسان با ایجاد قیدهای اضافی در راستای جابجایی عرضی و همچنین تأمین سختی برشی (در مدل پاسترناک)، تغییر شکل‌های خارج از صفحه را محدود کرده و شروع کمانش را به تأخیر می‌اندازد. با افزایش

$\lambda=\mu=2, a/h=30, h=5, p=2, P\_FGM, FG\_X, w\%=1, k_w=100, G_f=10, \text{Biaxial load}$



شکل ۱۰. تأثیر درصد وزنی نانوصفحه گرافن برای نسبت‌های مختلف اندازه بازشوی دایره‌ای بر ضریب کمانشی بار دو محوری نانوصفحه GPLR-FG با تکیه‌گاه ساده قرار گرفته بر روی بستر کشسان.

$a/h=30, h=5, p=2, P\_FGM, FG\_X, w=2\%, \text{Biaxial}, k_w=100, G_f=10$

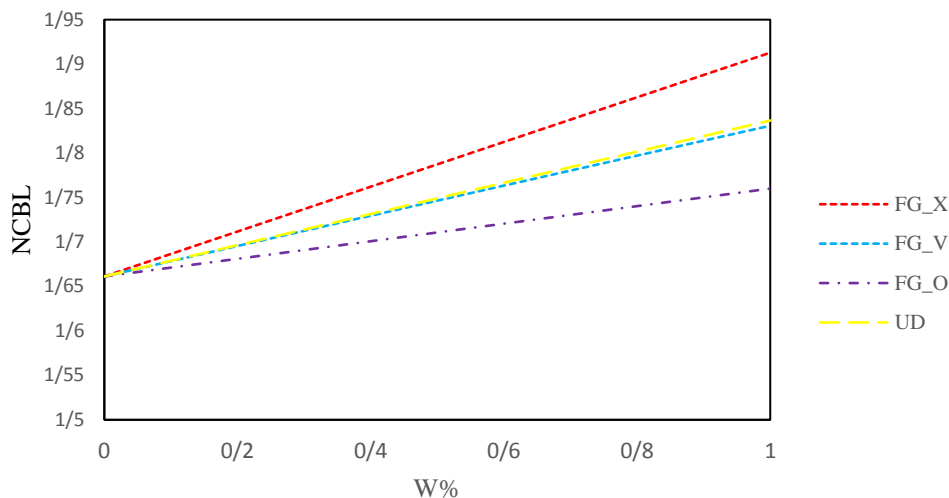


شکل ۱۱. تأثیر نسبت اندازه بازشوی دایره‌ای بر ضریب کمانشی بار دو محوری نانوصفحه GPLR-FG با تکیه‌گاه ساده قرار گرفته بر روی بستر کشسان.

مرکزی نانوصفحه دانست که منجر به کاهش سختی خمشی و سختی غشایی مؤثر سازه می‌شود. وجود بازشوی دایره‌ای موجب برهم خوردن توزیع یکنواخت تنش و ایجاد تمرکز تنش در اطراف لبه بازشو می‌گردد که این پدیده، آغاز ناپایداری را تسریع کرده و مقاومت کمانشی نانوصفحه را کاهش می‌دهد.

تقویت‌شده با نانوصفحه‌های گرافنی (GPLR-FG) تحت بارگذاری فشاری دو محوری را نشان می‌دهند. ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت اندازه بازشو ( $R/a$ )، مقدار ضریب کمانش به‌طور قابل توجهی یعنی حدود ۳۰ درصد کاهش می‌یابد. این رفتار را می‌توان ناشی از حذف بخشی از ماده برابر در ناحیه

$$a/h=50, a/b=1, p=5, R/a=0.2, \mu=4, \lambda=2,$$



شکل ۱۲. تأثیر الگوهای توزیع نانوصفحه‌های گرافن (GPL) بر ضریب کماتش نانوصفحه.

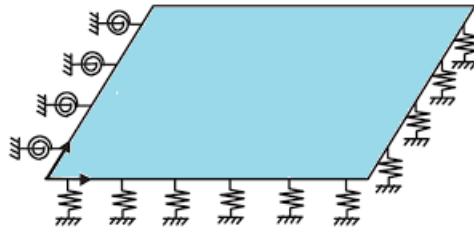
توزیع‌ها با افزایش درصد وزنی نانوگرافن‌ها، مقاومت کماتشی به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند. بیشترین مقاومت در توزیع FG\_X حاصل می‌شود، که اهمیت توزیع بهینه تقویت‌کننده‌ها را تأکید می‌کند. در الگوی توزیع FG\_X با رسیدن درصد وزنی نانوصفحه گرافن به یک درصد، مقاومت کماتشی حدود ۱۳ درصد افزایش می‌یابد. از طرفی توزیع با الگوی‌های FG\_V و UD تأثیرگذاری مشابهی با همدیگر دارند و افزایش یک درصد نانوصفحه گرافن ۸/۲۸ درصد افزایش مقاومت کماتشی ایجاد می‌کند. کمترین افزایش مقاومت مربوط به الگوی توزیع FG\_O است که تنها باعث افزایش چهار درصدی مقاومت کماتشی می‌شود اگر درصد وزنی نانوصفحه‌های گرافنی یک درصد باشد. در مطالعه حاضر رفتار کماتشی نانوصفحه تابعی مدرج تقویت شده با گرافن و دارای بازشو و مهار چرخشی کشسان در لبه‌ها مورد ارزیابی قرار گرفته شده است. در این جا  $k_{\theta}$  ثابت سختی چرخشی مهار کشسان لبه‌ای (شکل ۱۳) است که در رابطه (۷۴) تعریف شده است:

$$k_{\theta} = k_{\theta}^* a / D_2 \quad (74)$$

$$D_2 = E_2 h^3 / (12(1 - \nu_2^2))$$

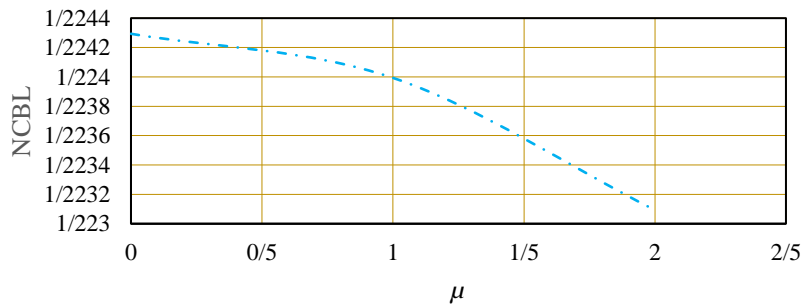
با افزایش اندازه بازشو، این اثرها تشدید شده و حساسیت پاسخ کماتشی نانوصفحه نسبت به ناپیوستگی‌های هندسی -به‌ویژه اگر نسبت  $R/a$  از ۰/۱ بزرگ‌تر باشد و از ۰/۲ کوچک‌تر- افزایش می‌یابد.

افزایش درصد وزنی نانوصفحه‌های گرافنی منجر به افزایش مقاومت کماتشی در تمامی مقدارهای نسبت  $R/a$  می‌شود. این پدیده ناشی از بهبود خواص مکانیکی مؤثر نانوصفحه است که بر اساس مدل میکرومکانیکی اصلاح‌شده هالپین-تسای قابل توجیه است. نانوصفحه‌های گرافنی به دلیل ضریب کشسانی بسیار بالا و نسبت ابعادی مناسب، انتقال تنش مؤثری را در ماتریس فلز-نیمه‌هادی فراهم می‌کنند و موجب افزایش سختی خمشی و درون‌صفحه‌ای نانوصفحه می‌شوند. در نتیجه، حتی با وجود بازشوی مرکزی، نانوصفحه‌های با درصد تقویت بالاتر گرافن، پایداری کماتشی بیشتری (حدود ۳۳ درصد برای ۵ درصد نانوصفحه گرافن) نسبت به نمونه‌های با تقویت کمتر از خود نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که با افزایش درصد وزنی نانوگرافن‌ها ضریب کماتش به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند. شکل ۱۲ اثر الگوهای توزیع نانوگرافن به صورت FG\_X، FG\_V، FG\_O و UD بر NCB نشان داده شده است. برای همه

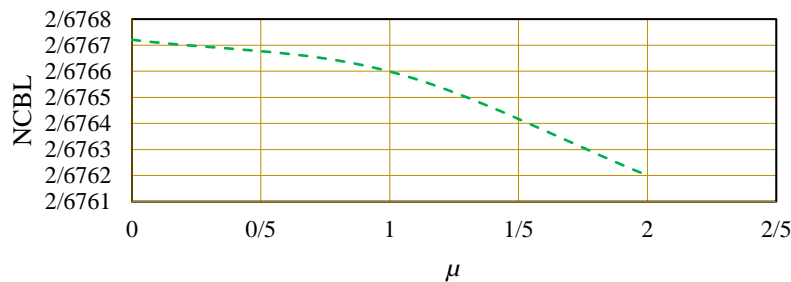


شکل ۱۳. صفحه با مهار تکیه‌گاهی کشسان در لبه و قرار گرفته بر بستر کشسان.

(الف)  $k_{\theta} = 0$



(ب)  $k_{\theta} = 1$



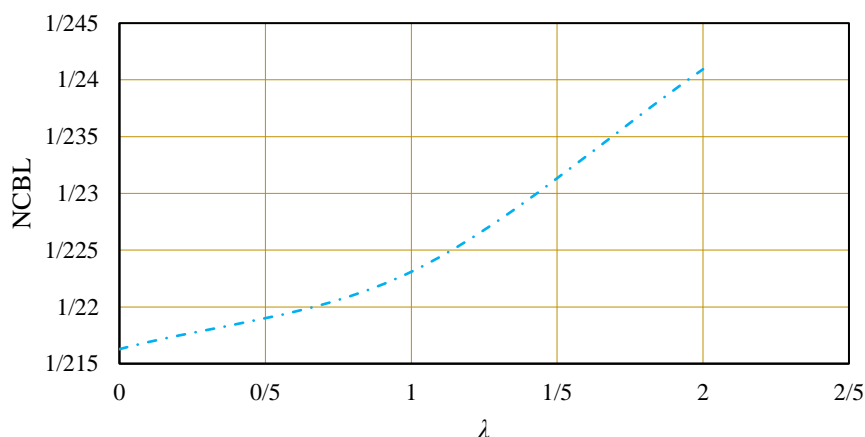
شکل ۱۴. تغییرات ضریب کمابشی بار دومحوری نانوصفحه GPLR-FG با (الف) تکیه‌گاه ساده و (ب) مهار خمشی کشسان در مرزها بر حسب متغیر غیرمحلّی.

طول صفحه برابر با  $0/2$  که بر حسب متغیر غیرمحلّی  $\mu$  در چارچوب NSGT را نشان می‌دهد. شکل ۱۴-الف، نانوصفحه با تکیه‌گاه ساده و بدون مهار مرزی کشسان چرخشی در لبه‌های مرزی است در حالی که شکل ۱۴-ب وابستگی مقاومت کمابشی نانوصفحه با تکیه‌گاه ساده و با وجود مهار مرزی کشسان چرخشی در مرزها را نشان می‌دهد. تأثیر ضریب غیرمحلّی مقاومت کمابشی را کاهش می‌دهد، که اهمیت تأثیرهای

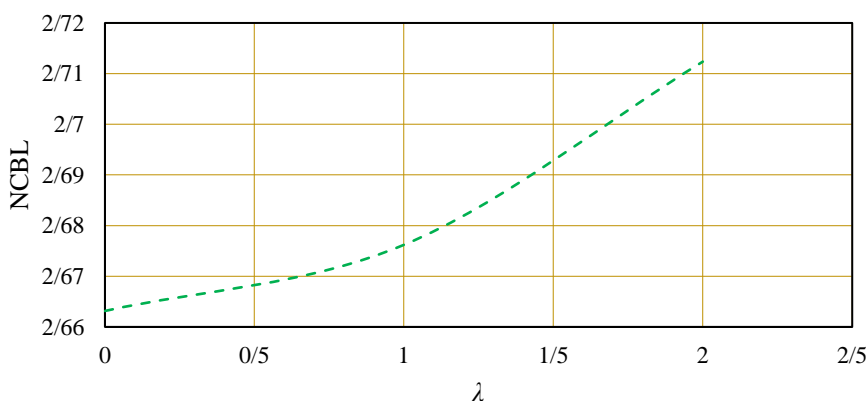
در همه مثال‌های بعدی ضخامت صفحه پنج نانومتر، نسبت طول به ضخامت  $50$ ، نسبت طول به عرض برابر با یک، مقدار ضریب توزیع توانی برابر با پنج، درصد وزنی گرافن برابر با یک درصد و نوع توزیع تقویت‌کننده‌ها FG\_X است. مشخصات مصالح همانند مثال‌های قبل فرض شده است.

شکل ۱۴ تغییر ضریب کمابشی بار دومحوری نانوصفحه‌های با تکیه‌گاه ساده دارای بازشوی دایره‌ای مرکزی با نسبت شعاع به

(الف)  $k_{\theta}=0$



(ب)  $k_{\theta}=1$

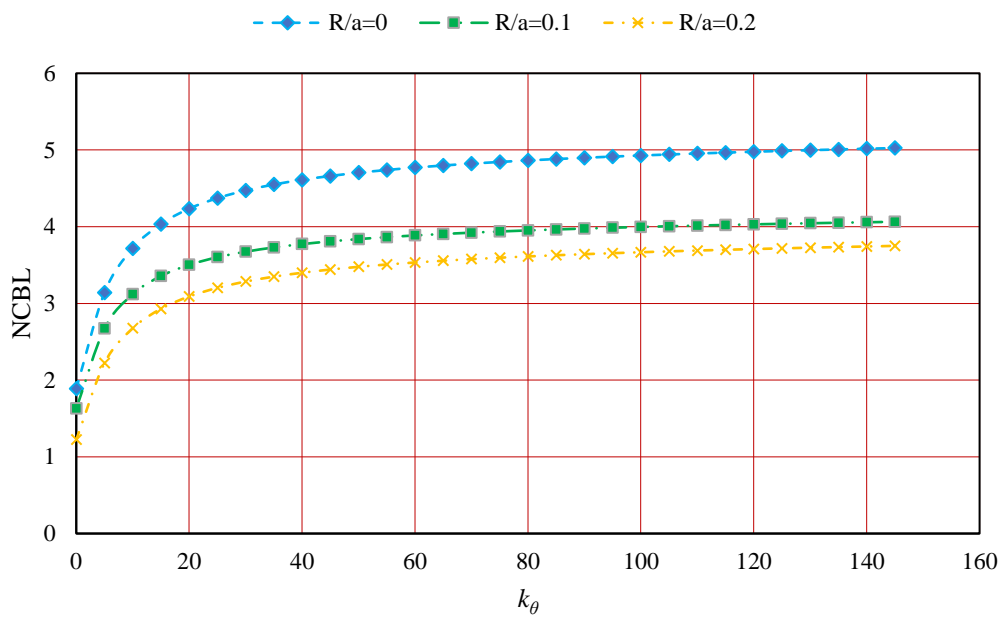


شکل ۱۵. تغییر ضریب کمانشی بار دومحوری نانوصفحه GPLR-FG دارای بازشو و با (الف) تکیه‌گاه ساده و (ب) مهار خمشی کشسان در مرزها بر حسب متغیر گرادیان کرنش.

بزرگ‌تر باعث افزایش سختی و مقاومت کمانشی نانوصفحه‌ها می‌شود یعنی با بزرگتر شدن ضریب گرادیان کرنش، شیب افزایش مقاومت کمانشی بیشتر می‌شود. شکل ۱۵- الف، نانوصفحه با تکیه‌گاه ساده و بدون مهار مرزی کشسان چرخشی در لبه‌های مرزی است در حالی که شکل ۱۵- ب وابستگی مقاومت کمانشی نانوصفحه با تکیه‌گاه ساده و با وجود مهار مرزی کشسان چرخشی در مرزها را نشان می‌دهد. تأثیر ضریب گرادیان کرنش مقاومت کمانشی را افزایش می‌دهد، که اهمیت تأثیرهای گرادیان کرنش در پایداری نانوصفحه‌ها را نشان می‌دهد.

غیرمحملی در پایداری نانوصفحه‌ها در این شرایط خاص را نشان می‌دهد. مقایسه شکل‌های ۱۴- الف و ب نشان‌دهنده روند کاهش ضریب کمانش برای هر دو حالت ذکر شده در بالا به صورت کاملاً مشابه است.

شکل ۱۵ تغییر ضریب مقاومت کمانشی نانوصفحه‌های با تکیه‌گاه ساده دارای بازشوی دایره‌ای مرکزی با نسبت شعاع به طول صفحه برابر با  $\frac{1}{2}$  تحت اثر بار دو محوری بر حسب متغیر ضریب گرادیان کرنش  $\lambda$  را نشان می‌دهد و بیان‌گر افزایش غیر یکنواخت NCB با افزایش  $\lambda$  است. ضریب گرادیان کرنش



شکل ۱۶. اثر بزرگ‌تر شدن ثابت سختی چرخشی مهار تکیه‌گاهی کشسان نانوصفحه تابعی مدرج تقویت شده با گرافن.

جدول ۸. ضریب کماتش نانوصفحه با تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه ترکیبی ساده-آزاد و دارای مهار چرخشی کشسان در همه مرزها و تحت اثر بار دومحوری.

$k_\theta$	$(k_w, G_f)$	ضریب اندازه	با تکیه‌گاه به ترتیب آزاد-آزاد-ساده-آزاد در چهار لبه			با تکیه‌گاه ساده در چهار لبه		
			$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=2$
0	(0,0)	$\lambda=0$	0/6346	0/6345	0/6343	1/2175	1/2172	1/2163
		$\lambda=1$	0/6353	0/6352	0/6350	1/2192	1/2189	1/2180
		$\lambda=2$	0/6371	0/6370	0/6368	1/2243	1/2240	1/2231
	(100,10)	$\lambda=0$	2/2680	2/2679	2/2677	2/4299	2/4295	2/4284
		$\lambda=1$	2/2691	2/2690	2/2687	2/4317	2/4313	2/4302
		$\lambda=2$	2/2721	2/2720	2/2717	2/4369	2/4365	2/4354
5	(0,0)	$\lambda=0$	1/7072	1/7071	1/7068	2/2129	2/2125	2/2113
		$\lambda=1$	1/7087	1/7086	1/7084	2/2156	2/2152	2/2139
		$\lambda=2$	1/7132	1/7131	1/7129	2/2233	2/2228	2/2216
	(100,10)	$\lambda=0$	3/2189	3/2187	3/2178	3/3900	3/3894	3/3877
		$\lambda=1$	3/2210	3/2207	3/2199	3/3928	3/3922	3/3904
		$\lambda=2$	3/2270	3/2268	3/2259	3/4007	3/4001	3/3983

مقایسه شکل‌های ۱۵- الف و ب نشان‌دهنده روند افزایشی ضریب کماتش برای هر دو حالت ذکر شده در بالا به صورت کاملاً مشابه است.

در شکل ۱۶ اثر بزرگ‌تر شدن ثابت سختی چرخشی مهار تکیه‌گاهی کشسان نانوصفحه نمایان است. با توجه به شکل مشخص است که با رسیدن ثابت کشسان چرخشی به مقدار ۱۱۰، همگرایی اتفاق می‌افتد. علت ثابت ماندن ضریب کماتش با وجود زیاد شدن ثابت کشسانی چرخشی، تبدیل شدن تکیه‌گاه نیمه‌گیردار به تکیه‌گاه گیردار است. توجه شود که اگر ثابت کشسانی مهار چرخشی کوچک‌تر از ۱۱۰ و بزرگ‌تر از صفر باشد تکیه‌گاه به صورت غیرکلاسیک یا نیمه‌گیردار است.

در جدول ۸ نتایج تحلیل برای نانوصفحه دارای بازشوی دایره‌ای مرکزی با نسبت شعاع به طول صفحه برابر با ۰/۲ و با تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه ترکیبی ساده-آزاد و دارای مهار چرخشی کشسان در همه مرزها و تحت اثر بار دومحوری با استفاده از روش بدون شبکه پیشنهادی آورده شده است. لازم به ذکر است که اثر قرار گرفتن صفحه بر بستر کشسان وینکلر-پاسترناک نیز ارزیابی شده است. بررسی نتیجه‌های تحلیل نشان می‌دهد که اثر بستر کشسان و مهار تکیه‌گاهی چرخشی بر روی ضریب کماتش نانوصفحه دارای تکیه‌گاه ترکیبی بسیار بزرگ‌تر است.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک روش بدون شبکه مبتنی بر نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی (NSGT) توسعه یافته است که امکان مدل‌سازی نانوصفحه‌های تقویت‌شده با گرافن (GPL) را عملی می‌سازد. در این راستا، یک بررسی جامع از رفتار کماتشی نانوصفحه‌های سیلیکون-آلومینیم تقویت‌شده با گرافن و قرار گرفته بر روی بستر کشسان وینکلر-پاسترناک انجام شده است. نتیجه‌های حاصل از تحلیل نشان می‌دهند که مقاومت کماتشی به سختی بستر کشسان، الگوی توزیع GPL و متغیرهای هندسی مانند نسبت ابعاد و اندازه

بازشوی احتمالی وابسته است. در ادامه نتیجه‌های مهم آورده شده است.

۱. با افزایش درصد وزنی نانوگرافن‌ها ضریب کماتش به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند. برای نانوصفحه دارای تکیه‌گاه ساده با افزایش هر یک درصد نانوصفحه گرافنی حدود ۸ درصد به مقاومت کماتشی اضافه می‌شود. برای همه توزیع‌های نانوگرافن یعنی FG\_X, FG\_V, FG\_O و UD با افزایش درصد وزنی نانوگرافن‌ها، مقاومت کماتشی به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند. بیشترین مقاومت در توزیع FG\_X حاصل می‌شود. در الگوی توزیع FG\_X با رسیدن درصد وزنی نانوصفحه گرافن به یک درصد، مقاومت کماتشی حدود ۱۳ درصد افزایش می‌یابد. از طرفی توزیع با الگوی‌های FG\_V و UD تأثیرگذاری مشابهی با هم‌دیگر دارند و افزایش یک درصد نانوصفحه گرافن ۸/۲۸ درصد افزایش مقاومت کماتشی ایجاد می‌کند. کمترین افزایش مقاومت مربوط به الگوی توزیع FG\_O است که تنها باعث افزایش چهار درصدی مقاومت کماتشی می‌شود اگر درصد وزنی نانوصفحه‌های گرافنی یک درصد باشد.

۲. با افزایش متغیر برشی بستر پاسترناک به مقدار ۱۰۰، حدود ۲۵ درصد ضریب کماتش افزایش می‌یابد که در مقایسه با تأثیر ضریب وینکلر بر مقاومت کماتشی (حدود ۶ درصد) بسیار بیشتر است.

۳. با افزایش نسبت اندازه بازشو ( $R/a$ ) به ۰/۳، مقدار ضریب کماتش حدود ۳۰ درصد کاهش می‌یابد.

۴. اثر بستر کشسان و مهار تکیه‌گاهی چرخشی بر روی ضریب کماتش نانوصفحه‌های دارای تکیه‌گاه ترکیبی آزاد-ساده نسبت به صفحه با تکیه‌گاه‌های ساده در چهار طرف بسیار بزرگ‌تر است.

پژوهش حاضر نشان می‌دهد که روش بدون شبکه مبتنی بر نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی توانایی بالایی در مدل‌سازی و پیش‌بینی رفتار کماتشی نانوصفحه‌های GPLR-FG دارای بازشوی احتمالی دارد.

- |                                       |  |   |
|---------------------------------------|--|---|
| 1. nano                               | 2. micro                                 | 3. interatomic                                  |
| 4. intermolecular                     | 5. van der Waals                         | 6. electrostatic                                |
| 7. static                             | 8. dynamic                               | 9. molecular                                    |
| 10. nonlocal elasticity theory        | 11. couple stress                        | 12. modified strain gradient                    |
| 13. multiscale                        | 14. metal–semiconductor functional       | 15. resonators                                  |
| 16. actuators                         | 17. microelectromechanical (MEMS)        | 18. optoelectronic                              |
| 19. isogeometric                      | 20. Kirchhoff                            | 21. kriging                                     |
| 22. graphene                          | 23. Winkler–Pasternak elastic foundation | 24. matrix material                             |
| 25. elastic modulus                   | 26. Poisson’s ratio                      | 27. power-law distribution                      |
| 28. kernel functions                  | 29. Hooke’s law                          | 30. principle of minimum total potential energy |
| 31. Galerkin weak form                | 32. random field                         | 33. Lagrange multipliers                        |
| 34. covariance                        | 35. semivariogram                        | 36. Kronecker                                   |
| 37. compactly supported step function | 38. cells                                | 39. Gaussian integration (Gauss quadrature)     |

## References

- Edelstein AS, Cammaratra R. Nanomaterials: synthesis, properties and applications: CRC press; 1998. <https://doi.org/10.1201/9781482268591>
- Bhushan B. Nanotribology and nanomechanics. Wear. 2005; 259(7-12):1507–31. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-77608-6>
- Nasr Esfahani M, Alaca BE. A review on size-dependent mechanical properties of nanowires. Advanced Engineering Materials. 2019; 21(8):1900192. <https://doi.org/10.1002/adem.201900192>
- Lee C, Wei X, Kysar JW, Hone J. Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene. Science. 2008; 321(5887):385–8. <https://doi.org/10.1126/science.1157996>
- Eringen A, Wegner J. Nonlocal continuum field theories. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection; 2003. <https://doi.org/10.1115/1.1553434>
- Reddy JN. Theory and analysis of elastic plates and shells: CRC press; 2006. <https://doi.org/10.1201/9780849384165>
- Mindlin RD. Microstructure in linear elasticity. 1963. <https://doi.org/10.1007/BF00248490>
- Aifantis EC. Strain gradient interpretation of size effects. International Journal of Fracture. 1999; 95(1):299–314. <https://doi.org/10.1023/A:1018625006804>
- Mindlin RD. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. International journal of solids and structures. 1965; 1(4):417–38. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(65\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(65)90006-5)
- Yang F, Chong A, Lam DCC, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. International journal of solids and structures. 2002; 39(10):2731–43. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
- Lam DC, Yang F, Chong A, Wang J, Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2003; 51(8):1477–508. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00053-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00053-X)
- Lim C, Zhang G, Reddy J. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2015; 78:298–313. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.02.001>
- Lu L, Guo X, Zhao J. A unified size-dependent plate model based on nonlocal strain gradient theory including surface effects. Applied Mathematical Modelling. 2019; 68:583–602. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.023>
- Nguyen V-L, Nguyen V-L, Tran M-T, Dang X-T. Investigation of static buckling and bending of nanoplates made of new functionally graded materials considering surface effects on an elastic foundation. Acta Mechanica. 2024; 235(12):7807–33. <https://doi.org/10.1007/s00707-024-04127-2>
- Gu L. Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method. International journal for numerical methods in engineering. 2003; 56(1):1–11. <https://doi.org/10.1002/nme.553>
- Li H, Wang Q, Lam K. Development of a novel meshless Local Kriging (LoKriging) method for structural dynamic analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2004; 193(23-26):2599–619. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.010>

17. Bui TQ, Nguyen TN, Nguyen-Dang H. A moving Kriging interpolation-based meshless method for numerical simulation of Kirchhoff plate problems. *International journal for numerical methods in engineering*. 2009; 77(10):1371–95. <https://doi.org/10.1002/nme.2462>
18. Thai CH, Nguyen-Xuan H, Nguyen LB, Phung-Van P. A modified strain gradient meshfree approach for functionally graded microplates. *Engineering with Computers*. 2022; 38(Suppl 5):4545–67. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01493-6>
19. Thai CH, Ferreira A, Nguyen-Xuan H, Phung-Van P. A size dependent meshfree model for functionally graded plates based on the nonlocal strain gradient theory. *Composite Structures*. 2021; 272:114169. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114169>
20. Hou D, Wang L, Yan J. Vibration analysis of higher-order nonlocal strain gradient plate via meshfree moving Kriging interpolation method. *Engineering Structures*. 2023; 297:117001. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117001>
21. Gawah Q, Al-Osta MA, Abdullah MA, Bourada F, Tounsi A, Ahmad S, et al. Wave propagation analysis of graphene platelet-reinforced functionally graded porous plates resting on viscoelastic foundations using an integral HSDT. *Thin-Walled Structures*. 2025; 215:113502. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2025.113502>
22. Hassaine A, Mahi A. Effects of graphene-platelets reinforcement on the free vibration, bending, and buckling of porous functionally-graded metal-ceramic plates. *Journal of Composite Materials*. 2023; 57(25):3909–30. <https://doi.org/10.1177/00219983231196276>
23. Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*: CRC press; 2003. <https://doi.org/10.1201/b12409>
24. Nguyen TN, Thai CH, Nguyen-Xuan H, Lee J. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded material plates using an improved moving Kriging meshfree method based on a refined plate theory. *Composite Structures*. 2018; 193:268–80. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.036>
25. Van Do VN, Chang K-H, Lee C-H. Post-buckling analysis of FGM plates under in-plane mechanical compressive loading by using a mesh-free approximation. *Archive of Applied Mechanics*. 2019; 89(7):1421–46. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01512-5>
26. Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in computational Mathematics*. 1995; 4(1):389–96. <https://doi.org/10.1007/BF02123482>
27. Wu H, Yang J, Kitipornchai S. Parametric instability of thermo-mechanically loaded functionally graded graphene reinforced nanocomposite plates. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018; 135:431–40. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.11.039>
28. Lam K, Wang C, He X. Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions. *Engineering Structures*. 2000; 22(4):364–78. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(98\)00116-3](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(98)00116-3)
29. Akhavan H, Hashemi SH, Taher HRD, Alibeigloo A, Vahabi S. Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part II: Frequency analysis. *Computational Materials Science*. 2009; 44(3):951–61. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2008.07.001>
30. Liu G-R. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*: CRC press; 2009. <https://doi.org/10.1201/9781420082104>