



An enrichment Technique for the Finite Point Method by Equilibrated Singular Basis Functions for Weak Singularities

Mehran Abolghasemi and Nima Noormohammadi*^{ID}

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran.

Abstract: This paper presents a novel approach to improve the accuracy and stability of the finite point method (FPM) in the vicinity of points with weak singularities by incorporating equilibrated singular basis functions (EqSBFs). Singular points play a crucial role in the intensification of the flux field in applied physics. Conventional numerical methods fail to correctly capture the solution function in singular areas due to the usage of smooth basis functions. FPM is a meshfree method based on strong point-wise application of the governing partial differential equation (PDE) along with the boundary conditions, which in its classical form suffers from inconsistency of its polynomial type basis functions with the singular region, leading to accuracy reduction, slow convergence, and local instabilities. To address this issue, EqSBFs are incorporated alongside the conventional smooth basis functions. EqSBFs are derived by the weighted residual imposition of the homogeneous PDE, with the capability of automatically identifying the singularity order of the problem, thus avoiding the solution of a parallel identical problem to extract the required singular terms. EqSBFs may be simply merged with the smooth basis functions of the FPM through the weighted least squares (WLS) approximation. The proposed formulation significantly improves the numerical representation of the singular solution, while maintaining the desirable advantages of the FPM.

Keywords: Harmonic, Weak singularity, Equilibrated Singular Basis Functions, Finite Point Method, Enrichment.

Received: Apr. 07, 2026; Revised: May 08, 2026; Accepted: May 10, 2026; Published Online: June. 25, 2026.

* Corresponding Author: noormohammadi@iut.ac.ir

How to Cite: Abolghasemi Mehran, Noormohammadi Nima, An enrichment technique for the finite point method by equilibrated singular basis functions for weak singularities, Journal of Computational Methods in Engineering; 2026, 45(1), 117-129; doi.org/10.47176/jcme.45.1.1081.





مقاله پژوهشی

غنی‌سازی روش نقاط محدود با استفاده از توابع پایه متعادل‌شده تکین

برای مسائل دارای تکینگی ضعیف

مهران ابوالقاسمی و نیما نورمحمدی*

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

چکیده- در این مقاله، رویکردی نوین برای بهبود دقت و پایداری روش بدون شبکه نقاط محدود در تحلیل مسائل هارمونیک با به‌کارگیری توابع پایه متعادل‌شده تکین ارائه می‌شود. هدف این رویکرد، ارتقای توان مدل‌سازی تابع پاسخ در موضعی است که دارای تکینگی ضعیف بوده و مشتق تابع پاسخ دچار ناپیوستگی موضعی می‌شود. روش نقاط محدود روشی بدون شبکه بر مبنای اعمال فرم قوی معادلات دیفرانسیل بوده و به دلیل استفاده از بسط‌های هموار، در مجاورت تکینگی دچار آشفتگی پاسخ و افت کیفیت حل می‌شود؛ زیرا چنین بسط‌هایی فاقد توانایی بازنمایی جمله‌های غیرهموار هستند. در مقابل، توابع پایه متعادل‌شده تکین قابلیت بازسازی جملات غنی‌کننده حل با مرتبه متناسب با هندسه مسئله را دارا می‌باشند. این توابع از ارضای انتگرال باقی‌مانده وزنی صورت همگن معادله دیفرانسیل توسط تبدیلی ویژه با قابلیت بازسازی جملات تکین به دست می‌آیند. ویژگی مهم آن‌ها قابلیت تشخیص خودکار مرتبه تکینگی مسئله است، بدون آن که نیازمند تحلیل یک مسئله معادل در کنار مسئله اصلی، چنان که در روش‌های مشابه همچون اجزای محدود توسعه‌یافته مرسوم است، باشند. این توابع به سادگی با پایه‌های هموار روش نقاط محدود در ضمن عملیات تقریب حداقل مربعات وزن‌دار ترکیب می‌شوند و از این منظر، درجات آزادی جدیدی به سیستم نهایی حل اضافه نمی‌کنند. مقایسه نتایج روش پیشنهادی در مسئله موزن نشان‌دهنده قابلیت مناسب تقریب و ارتقای آن نسبت به روش نقاط محدود استاندارد است.

واژه‌های کلیدی: هارمونیک، تکینگی ضعیف، توابع پایه متعادل‌شده تکین، روش نقاط محدود، غنی‌سازی.

دریافت مقاله: ۱۴۰۵/۰۱/۱۸، بازنگری: ۱۴۰۵/۰۲/۱۸، پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۲۰، اولین انتشار: ۱۴۰۵/۰۳/۲۵

* نویسنده مسئول، رایانامه: noormohammadi@iut.ac.ir

حق انتشار این مستند، متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است. © ۱۴۰۳

این مقاله تحت گواهی زیر منتشر شده و هر نوع استفاده غیرتجاری از آن مشروط بر استناد صحیح به مقاله و با رعایت شرایط مندرج در آدرس زیر مجاز است:



فهرست علائم

| | | | |
|---------------------|--|-------------------------|---|
| Q | تابع منبع | a | بردار ضرایب مجهول در تقریب حداقل مربعات |
| S | ماتریس عمل‌گر دیفرانسیلی | | وزن‌دار |
| $T_j(\xi)$ | چند جمله ای چبی شف نوع اول مرتبه j | c | بردار ضرایب نامعلوم |
| U | تابع مجهول | $c_j^{n,c}$ | ضرایب جملات کسینوسی در بسط فوریه |
| \bar{U}_h | تابع تقریب مجهول | $c_j^{n,s}$ | ضرایب جملات سینوسی در بسط فوریه |
| \bar{U}_i | مقدار تابع حل بر روی مرز ضروری در نقطه i ام | D | ماتریس ضرایب ماده |
| w | ماتریس توابع وزن | F | توابع پایه متعادل‌شده |
| Γ_0 | مرز دامنه مجازی | $f_n^s(r)$ | ضرایب بسط فوریه برای جملات سینوسی |
| Φ | ماتریس پایه‌های مستقل فضای پوچ | $f_n^c(r)$ | ضرایب بسط فوریه برای جملات کسینوسی |
| ξ | پارامتر بدون بعد مختصات شعاعی | n_{wr} | تعداد توابع وزن در راستای شعاعی |
| Ω | دامنه اصلی | N(x) | توابع شکل حاصل از روش حداقل مربعات وزن‌دار |
| Ω_0 | دامنه مجازی | N_E(x) | توابع شکل غنی‌شده به روش حداقل مربعات وزن‌دار |
| Γ | مرز دامنه اصلی | O_r | حداکثر مرتبه توابع پایه در راستای شعاعی |
| ξ_i | مختصات نرمال‌شده مرکز وزن i ام در راستای شعاعی | O_t | حداکثر مرتبه توابع پایه در راستای زاویه‌ای |
| γ, β | پارامترهای نگاشت تکین | P(x) | بردار توابع پایه در روش حداقل مربعات وزن‌دار |
| ρ | تابع کنترل غنی‌سازی | q | شار نرمال بر مرز طبیعی |
| ε_{ave} | درصد خطای میانگین | | |

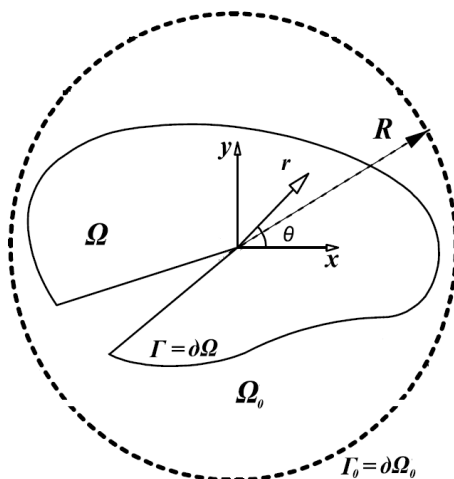
۱- مقدمه

تحلیل تقریبی مسائل مهندسی مطرح است. می‌توان روش‌های عددی را به دو دسته مبتنی بر المان‌بندی و بدون شبکه^۲ تقسیم نمود. روش اجزای محدود^۳ به عنوان توسعه‌یافته‌ترین روش عددی مبتنی بر المان‌بندی شناخته می‌شود. اگرچه این روش در بسیاری از زمینه‌های مهندسی عملکرد موفقی داشته است، اما وابستگی آن به کیفیت شبکه‌بندی دامنه و نیز استفاده از توابع پایه هموار در مجاورت نقاط تکین می‌تواند منجر به کاهش دقت شود. به منظور رفع محدودیت‌های مرتبط با شبکه‌بندی، روش‌های بدون شبکه توسعه یافته‌اند. در این روش‌ها تقریب پاسخ بر اساس مجموعه‌ای از نقاط پراکنده در دامنه انجام شده و نیازی به ایجاد شبکه المان وجود ندارد، که این موضوع سادگی و انعطاف‌پذیری بهتری در تحلیل هندسه‌های پیچیده به همراه دارد. روش نقاط محدود^۴ یکی از روش‌های شناخته شده در این

پدیده تکینگی^۱ در میدان‌های فیزیکی به نقاطی در دامنه حل اشاره دارد که در آن‌ها تابع پاسخ یا مشتقات آن رفتار نامتعرفی از خود نشان داده و ممکن است تعریف‌پذیر یا تحلیلی نباشند. در مکانیک جامدات مبتنی بر معادلات مشتقات جزئی، تکینگی به شرایطی گفته می‌شود که تابع حل یا مشتقات آن که بیانگر کمیت‌های فیزیکی نظیر تنش یا شار هستند، رفتار ناپیوسته از خود نشان دهند. این پدیده می‌تواند ناشی از نواقص هندسی یا تغییرات نامتجانس شرایط مرزی باشد. به عنوان مثال ناحیه مجاور نوک ترک دارای چنین شرایطی است. از آنجا که نواحی دارای تکینگی اغلب نقشی تعیین‌کننده در رفتار سیستم دارند، تحلیل دقیق میدان‌های فیزیکی در مجاورت این نقاط اهمیت دارد. امروزه استفاده از روش‌های عددی به عنوان رویکردی کارآمد در

نموده‌اند. این روش مبتنی بر توابع پایه متعادل‌شده تکین است که در ادامه تحقیقات در حوزه توابع پایه متعادل‌شده توسعه یافتند (۱۲). در این رویکرد، با توسعه حل در دستگاه قطبی بر مبنای تبدیلی ویژه، امکان استخراج جملات تکین بدون نیاز به دانش قبلی از مرتبه تکینگی مسئله فراهم می‌شود (۱۳). در ادامه، توابع تکین مذکور با روش اجزای محدود برای حل برخی مسائل دارای تکینگی ترکیب گردیدند (۱۴). قربانی و همکاران این توابع را برای غنی‌سازی روش بدون شبکه گالرکین استفاده نمودند (۱۵). در مقاله حاضر توابع پایه متعادل‌شده تکین با روش بدون شبکه نقاط محدود ترکیب می‌شوند. حاصل کار رویکردی کارآمد برای حل مسائل هارمونیک دارای تکینگی ضعیف است که موجب افزایش دقت و پایداری روش به ویژه در نواحی نزدیک به تکینگی خواهد شد. آزمایش روش توسط مسئله مرسوم موتز^۹، نشان‌دهنده عملکرد مناسب آن است. در این پژوهش، از ترکیب توابع پایه متعادل‌شده تکین به عنوان غنی‌کننده تابع پاسخ در روش نقاط محدود استفاده شده است. این روش به دلیل سادگی در به‌کارگیری، قابلیت بالایی برای حل مسائل گوناگون دارد و تحقیق حاضر راه را برای اعمال موثر آن بر مسائل دچار تکینگی هموار می‌سازد. نوآوری دیگر این تحقیق، قابلیت تشخیص خودکار مرتبه تکینگی مسئله و در نتیجه بازسازی پایه‌های تکین بدون نیاز به حل یک مسئله معادل، چنان که در سایر روش‌های غنی‌سازی عددی همچون روش اجزای محدود توسعه‌یافته مرسوم است، می‌باشد. به عبارت دیگر، تنها با پیمودن مراحل عادی حل مسئله شامل درون‌یابی به شیوه حداقل مربعات وزن‌دار، اعمال معادله و ارضای شرایط مرزی، ترکیب لازم از توابع پایه متعادل‌شده تکین برای سازگاری با ماهیت تکینگی به وجود آمده و لزومی به تشخیص دقیق جملات تکین مورد نیاز نیست. این نکته پیشرفت قابل توجهی در اعمال روش‌های عددی برای تحلیل مسائل دارای تکینگی است.

دسته است که در سال ۱۹۹۶ توسط اونیاته و همکاران معرفی شد (۱). این روش بر پایه ارضای فرم قوی معادلات دیفرانسیل حاکم به صورت نقطه‌ای در تعدادی نقطه پراکنده در دامنه حل، و استفاده از تکنیک تقریب حداقل مربعات وزن‌دار^۵ بنا شده است. از ویژگی‌های این روش می‌توان به سادگی فرمول‌بندی، کارایی مناسب در هندسه‌های پیچیده و عدم حساسیت بالا به چگونگی توزیع نقاط اشاره کرد. با این حال استفاده از توابع تقریب هموار در مواجهه با ماهیت تکینگی موجب کاهش دقت محاسبات می‌شود. در سال‌های اخیر رویکردهای مختلفی برای بهبود عملکرد روش‌های عددی در حضور تکینگی ارائه شده است. بابوشکا و گو نشان دادند که در مسائل دارای تکینگی، در نظر گرفتن رفتار مجانبی میدان‌ها می‌تواند همگرایی روش اجزای محدود را بهبود بخشد (۲). ملنک و همکاران با معرفی روش افزاز واحد^۶ چارچوبی برای افزودن توابع غنی‌سازی به فضای تقریب ارائه کردند (۳). بلیچکو و بلک و همچنین موئس و همکاران با معرفی روش اجزای محدود توسعه‌یافته^۷ امکان مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها و میدان‌های تکین را بدون نیاز به بازتولید شبکه فراهم کردند (۴، ۵). استروبلیس و همکاران با ارائه روش اجزای محدود تعمیم‌یافته رویکرد دیگری مبتنی بر استفاده از توابع غنی‌سازی محلی را نشان دادند (۶). سوکومار و همکاران کاربرد روش اجزای محدود توسعه‌یافته را برای مدل‌سازی حفرات و ناپیوستگی‌های داخلی توسعه دادند (۷). رویکرد این تحقیقات، استفاده از توابع غنی‌سازی^۸ در کنار بسط هموار پاسخ در مجاورت تکینگی است (۸-۱۱). منظور از غنی‌سازی، افزودن توابع تقریب خاصی متناسب با تکینگی مسئله به فضای تقریب است. در مورد تکینگی ضعیف، این غنی‌سازی شامل توابعی با مشتقات ناپیوسته متمرکز بر نقطه تکین است. با وجود کارایی، این روش‌ها نیازمند آگاهی قبلی از مرتبه تکینگی مسئله هستند که تعیین آن نیازمند حل یک مسئله معادل و استخراج پاسخ آن به صورت تحلیلی است. برای رفع این محدودیت، نورمحمدی و همکاران روشی نوین برای تولید خودکار توابع تکین ارائه



شکل ۱. دامنه‌های اصلی و مجازی و مرز آن‌ها.

۲- توابع پایه متعادل‌شده تکین

مسئله مورد بررسی در ناحیه فیزیکی Ω در قالب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی به صورت رابطه (۱) مفروض است،

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{U} + \mathbf{Q} = 0 \quad (1)$$

\mathbf{S} بیان‌گر عمل‌گر گرادیان، \mathbf{D} ماتریس ضرایب مادی، U تابع پتانسیل مجهول و Q تابع منبع^{۱۰} است. به‌منظور تسهیل فرآیند تقریب و انتگرال‌گیری، ناحیه مجازی^{۱۱} Ω_0 با هندسه ساده‌تر نسبت به ناحیه فیزیکی، به صورت دایره در نظر گرفته می‌شود. مرز دامنه اصلی با $\Gamma = \partial\Omega$ و مرز ناحیه مجازی با $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ مشخص می‌گردد. لازم است مبدأ دستگاه مختصات قطبی منطبق بر نقطه تکین باشد (شکل ۱). با فرض $Q = 0$ دستگاه معادلات همگن رابطه (۲) حاصل می‌شود،

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{U}_h = 0 \quad (2)$$

پاسخ این مسئله مطابق رابطه (۳) تقریب زده می‌شود،

$$U_h \simeq \hat{U}_h = \sum_{i=1}^N f_i c_i = \mathbf{f}^T \mathbf{c} \quad (3)$$

$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T$ ، $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T$
 توابع پایه اولیه هستند که لزوماً صورت همگن معادله را ارضا نمی‌کنند، و c_i ضرایب نامعلوم متناظر آن‌ها می‌باشند. به دلیل عدم ارضای دقیق معادله توسط توابع پایه، از اعمال فرم ضعیف انتگرال وزنی مطابق رابطه (۴) استفاده می‌شود،

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{w} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{f}^T \mathbf{c}) d\Omega = \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

در رابطه (۴) w_i تابع وزن است. برای برقراری تساوی، بردار \mathbf{c} باید عضو فضای پوچ^{۱۱} ماتریس \mathbf{A} مطابق رابطه (۵) باشد،

$$\text{null}(\mathbf{A}) = \Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{\bar{M}}] \quad (5)$$

\bar{M} تعداد پایه‌های مستقل فضای پوچ را نشان می‌دهد، بنابراین می‌توان پاسخ را به صورت ترکیب خطی دلخواه ستون‌های Φ مطابق رابطه (۶) نوشت،

$$\mathbf{c} = \sum_{k=1}^{\bar{M}} \Phi_k d_k = \Phi^T \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_{\bar{M}}]^T \quad (6)$$

با جایگذاری رابطه (۶) در رابطه (۳)، رابطه (۷) به دست می‌آید،

$$\hat{U}_h = \sum_{k=1}^{\bar{M}} \mathbf{f}^T \Phi_k d_k = \sum_{k=1}^{\bar{M}} F_k d_k = \mathbf{F}^T \mathbf{d}, \quad (7)$$

F_k توابع پایه متعادل‌شده و d_k ضرایب مجهول جدید متناظر آن‌ها را نشان می‌دهند. به‌منظور تقریب پاسخ معادله دیفرانسیل همگن در دستگاه قطبی متناسب با ساختار مسئله، ابتدا مطابق رابطه (۸) توسط تبدیلی ویژه، مولفه‌های شعاعی و قطبی مختصات به محدوده‌ای تصویر می‌شوند که بتوانند توابع تکین را بازسازی نمایند،

$$\bar{r} = r^\beta, \quad \bar{\theta} = \gamma\theta, \quad 0 < \beta, \gamma < 1 \quad (8)$$

$$, T_0(\xi) \cos \bar{\theta}, \dots, T_{O_r}(\xi) \cos \bar{\theta}, \dots, T_{O_r}(\xi) \cos O_t \bar{\theta}] \quad (13)$$

همچنین توابع وزن مطابق رابطه (۱۴) به گونه‌ای تعریف شده‌اند که از نظر ساختاری سازگار با توابع پایه باشند،

$$\mathbf{w} = [\dots \mathbf{w}_m^s \quad \mathbf{w}_m^c \dots]^T, \quad m = 0, \dots, O_t \quad (14)$$

در رابطه (۱۴) اندیس‌های s و c توابع وزن متناظر با جملات سینوسی و کسینوسی را مطابق رابطه (۱۵) نشان می‌دهند،

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_m^s &= [w_1, \dots, w_{n_{wr}}] \sin m \bar{\theta}, \\ \mathbf{w}_m^c &= [w_1, \dots, w_{n_{wr}}] \cos m \bar{\theta} \end{aligned} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵) تعداد توابع وزن مورد استفاده در راستای شعاعی است که مطابق رابطه (۱۶) با مرتبه تقریب راستای شعاعی مرتبط می‌شود،

$$n_{wr} = O_r - 1 \quad (16)$$

بخش شعاعی توابع وزن در رابطه (۱۵) به صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شوند،

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1 + \xi}{2} e^{-W(\xi - \xi_i)^2}, \\ \xi_i &= -1 + \frac{2i - 1}{n_{wr}} \end{aligned} \quad (17)$$

پارامتر W یک ضریب کنترل است که شدت تمرکز شعاعی توابع وزن را تنظیم می‌کند و در صورتی که مرتبه جملات شعاعی کمتر از ۲۵ باشد، برابر با ۲۵ در نظر گرفته می‌شود (۱۶). همچنین وجود ضریب چندجمله‌ای در رابطه (۱۷) برای از بین بردن تاثیر عبارات تقسیم بر r در مجاورت مبدا است که در شکل قطبی معادلات هارمونیک بروز می‌کند.

۲-۱- فرمول‌بندی توابع پایه متعادل‌شده تکین برای مسئله هارمونیک

معادله دیفرانسیل مسئله لاپلاس را با فرض $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ در دستگاه قطبی مطابق رابطه (۱۸) است،

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0 \quad (18)$$

اعمال این معادله در قالب انتگرال باقیمانده وزنی توسط وزن‌های معرفی شده در روابط (۱۵) به ازای فرکانس m ام توابع مثلثاتی سینوسی یا کسینوسی، رابطه (۱۹) را نتیجه می‌دهد،

عمل‌گرهای مشتق موثر به واسطه تبدیل‌های (۸) به صورت رابطه (۹) تغییر می‌کنند،

$$\frac{\partial}{\partial r} = \beta \bar{r}^{(1-\frac{1}{\beta})} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \beta^2 \bar{r}^{(2-\frac{2}{\beta})} \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \beta^2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \bar{r}^{(1-\frac{2}{\beta})} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}$$

عناصر دیفرانسیلی طول و زاویه نیز مطابق رابطه (۱۰) تبدیل می‌شوند،

$$dr = \frac{1}{\beta} \bar{r}^{(\frac{1}{\beta}-1)} d\bar{r}, \quad (10)$$

$$d\theta = \frac{1}{\gamma} d\bar{\theta}$$

با استفاده از بسط کامل فوریه در امتداد زاویه‌ای، تابع پاسخ به صورت رابطه (۱۱) تقریب زده می‌شود،

$$\bar{U}_h = \sum_{n=0}^{O_t} f_n^s(\bar{r}) \sin n \bar{\theta} + f_n^c(\bar{r}) \cos n \bar{\theta} \quad (11)$$

در رابطه (۱۱) حداکثر مرتبه جملات بسط فوریه در راستای زاویه‌ای است. $f_n^{s,c}(\bar{r})$ ضرایب بسط فوریه برای جملات سینوسی و کسینوسی هستند که هر کدام در واقع یک بسط چندجمله‌ای در راستای شعاعی مطابق رابطه (۱۲) می‌باشند،

$$\begin{aligned} f_n^s(\bar{r}) &= \sum_{j=0}^{O_r} T_j(\xi) c_j^{n,s} \\ f_n^c(\bar{r}) &= \sum_{j=0}^{O_r} T_j(\xi) c_j^{n,c} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\xi = \frac{2\bar{r}}{\bar{R}} - 1, \quad \bar{r} \in [0, \bar{R}], \quad \bar{R} = R^\beta$$

در رابطه (۱۲) T_j چندجمله‌ای چبی شف نوع اول مرتبه j است که در دامنه $[-1, +1]$ تعریف می‌شود و به همین دلیل از متغیر بدون بعد ξ استفاده شده است. O_r مرتبه تقریب راستای شعاعی، $c_j^{n,c}$ و $c_j^{n,s}$ به ترتیب ضرایب مربوط به جمله m ام سینوسی و کسینوسی بسط فوریه راستای زاویه‌ای، و جمله j ام بسط چندجمله‌ای شعاعی می‌باشند. به این ترتیب بردار توابع پایه اولیه به صورت رابطه (۱۳) خواهد بود،

$$\mathbf{f}^T = [T_0(\xi), T_1(\xi), \dots, T_{O_r}(\xi), T_0(\xi) \sin \bar{\theta}, \dots, T_{O_r}(\xi) \sin \bar{\theta}]$$

شبکه محقق می‌شود. به منظور تولید پایه‌های غنی شده سازگار با تکنیکی ضعیف، مطابق رابطه (۳۰) مجموعه پایه‌های هموار همراه با توابع پایه متعادل شده تکین در تقریب حداقل مربعات وزن‌دار به کار گرفته می‌شوند،

$$\mathbf{P}_E(\mathbf{x}) = [\mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad \rho \mathbf{f}^T \boldsymbol{\phi}]^T \quad (30)$$

باید توجه شود که استفاده از پایه‌های غنی شده در کل دامنه مسئله ضرورت ندارد، زیرا تنها مجاورت تکنیکی نیازمند غنی‌سازی بوده و چنین اقدامی می‌تواند هزینه محاسباتی را به طور غیرضروری افزایش دهد. راهکار مناسب آن است که با استفاده از یک تابع گذار تدریجی، عبور از ناحیه غنی شده به ناحیه‌ای که استفاده از پایه‌های هموار کفایت می‌کند، به صورت پیوسته انجام گیرد (شکل ۲). برای این منظور تابع گذار ρ معرفی می‌شود، به گونه‌ای که در ناحیه غنی شده مقدار آن برابر با واحد و در ناحیه هموار صفر بوده و در ناحیه گذار به طور پیوسته کاهش یابد. در این تحقیق دو تابع گذار مطابق رابطه (۳۱) در نظر گرفته شده‌اند،

$$\rho = \begin{cases} 1 - \zeta & \text{تابع گذار مرتبه یک} \\ 1 - 10\zeta^3 + 15\zeta^4 - 6\zeta^5 & \text{تابع گذار مرتبه پنج} \end{cases}$$

$$\zeta = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \quad (31)$$

در رابطه (۳۱) R_2 و R_1 شعاع ناحیه تکین و شعاع ناحیه گذار مطابق شکل ۲ می‌باشند. نکته مهمی که در رابطه (۳۱) باید به آن توجه شود این است که مقدار تابع گذار برای همه نقاط همسایگی یک گره باید یکسان و متناسب با موقعیت خود نقطه مرکزی باشند. با استفاده از این مجموعه غنی شده به عنوان پایه در رابطه (۲۴)، سایر مراحل مشابه روابط (۲۷-۲۵) خواهد بود. حاصل این فرایند توابع تقریب غنی شده متناسب با موقعیت نقطه مرکزی زیرناحیه مطابق رابطه (۳۲) است،

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_E^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} = \mathbf{N}_E(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{U}} \quad (32)$$

$w_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)$ مقدار تابع وزن متناظر گره i در موقعیت گره همسایگی j است. با کمینه کردن تابع خطا نسبت به ضرایب مجهول، دستگاه معادلات (۲۶) حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \mathbf{a} &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} \\ \mathbf{C} &= \sum_{j=1}^{n_i} w_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{P}(\mathbf{x}_j), \\ \mathbf{B} &= \sum_{j=1}^{n_i} w_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (26)$$

با حل دستگاه (۲۶) ضرایب تقریب مطابق رابطه (۲۷) بدست آمده و عبارت پاسخ تقریبی بر حسب مقادیر گره‌ای بازنویسی می‌شود،

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} \\ \rightarrow \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}} \\ &= \mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (27)$$

کیفیت تقریب در روش حداقل مربعات وزنی به انتخاب تابع وزن بستگی دارد. این تابع باید بیشترین مقدار خود را در گره مرکزی داشته و با افزایش فاصله از آن به طور یکنواخت در راستاهای مختلف شعاعی کاهش یابد تا سهم نقاط دورتر در تقریب پاسخ گره مرکزی کمتر شود. عموماً برای این منظور از تابع وزن گاوسی مطابق رابطه (۲۸) استفاده می‌شود،

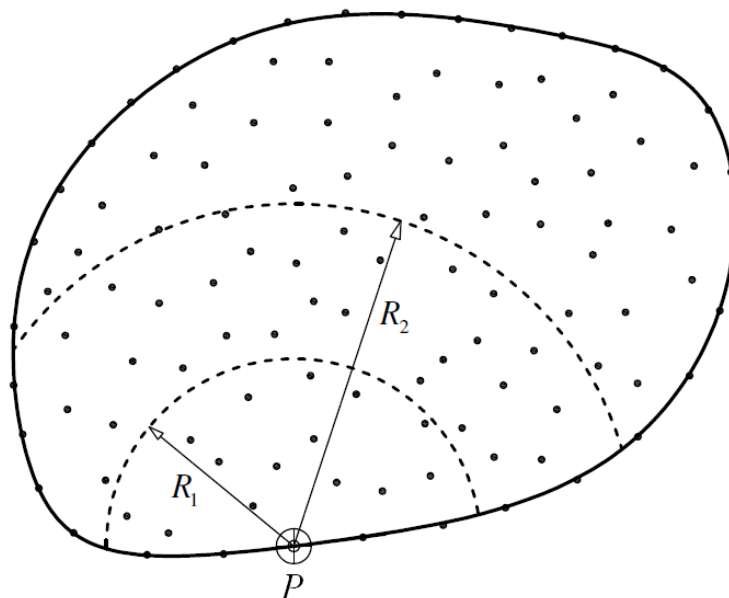
$$\begin{aligned} w_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) &= \exp\left(\frac{-(x_j - x_i)^2 - (y_j - y_i)^2}{h^2}\right) \end{aligned} \quad (28)$$

در رابطه فوق h پارامتر کنترل‌کننده پهنای تابع وزن است که ضریبی (عموماً واحد) از فواصل میانگین گره‌ها در نظر گرفته می‌شود. در روش نقاط محدود مختصات در هر زیردامنه نسبت به نقطه مرکزی آن سنجیده می‌شود. به طور مثال با استفاده از بسط خطی، پایه‌های حل مطابق رابطه (۲۹) خواهند بود،

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [1, x - x_i, y - y_i]^T \quad (29)$$

۳-۱- غنی‌سازی پایه‌ها در مجاورت تکنیکی ضعیف

در صورت وجود تکنیکی، لازم است که نقاط گره‌ای روی نقطه تکین قرار نگیرند یا به طور غیرعادی به آن نزدیک نشوند. این مهم با رعایت حداقل فاصله برابر با میانگین فاصله بین نقاط



شکل ۲. تفکیک نواحی غنی‌شده، گذار، و هموار (P نقطه تکین است).

۳-۲- اعمال معادله و شرایط مرزی

معادله تعادل و شرایط مرزی حاکم بر مسئله هارمونیک در دامنه Ω به صورت رابطه (۳۳) بیان می‌شوند،

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= 0 & \text{درون } \Omega \\ \mathbf{n} \cdot \nabla U &= n_x \frac{\partial U}{\partial x} + n_y \frac{\partial U}{\partial y} = q(\mathbf{x}) & \text{در امتداد } \Gamma_t \quad (33) \\ U &= \bar{U} & \text{در امتداد } \Gamma_u \end{aligned}$$

در رابطه (۳۳) بردار یکه عمود بر مرز و $q(x)$ شار عبوری از مرز نویمان (Γ_t) است. همچنین \bar{U} مقدار معلوم در مرز درিশله (Γ_u) است. دامنه توسط N نقطه گسسته می‌شود که \mathbf{x}_i مختصات گره نام از مجموعه ذکر شده است. شکل گسسته باقیمانده وزنی معادلات حاکم و شرایط مرزی طبق روابط (۳۴) بیان می‌شوند،

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \nabla^2 U \, d\Omega &= \nabla^2 U(\mathbf{x}_i) = 0 \\ \int_{\Gamma_t} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{n} \cdot \nabla U - q(\mathbf{x})] \, d\Omega &= \mathbf{n} \cdot \nabla U(\mathbf{x}_i) - q(\mathbf{x}_i) = 0 \quad (34) \\ \int_{\Gamma_u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [U - \bar{U}] \, d\Omega &= U(\mathbf{x}_i) - \bar{U}(\mathbf{x}_i) \\ &= 0 \\ i &= 1, \dots, N \end{aligned}$$

میدان مجهول در همسایگی گره \mathbf{x}_i توسط مقادیر گره‌های مجاور

بر اساس رابطه (۳۵) تقریب زده می‌شود،

$$U(\mathbf{x}) \approx \mathbf{N}_{E_i}(\mathbf{x}) \bar{U}_i \quad (35)$$

با جایگذاری رابطه (۳۵) در روابط (۳۴)، رابطه (۳۶) به دست

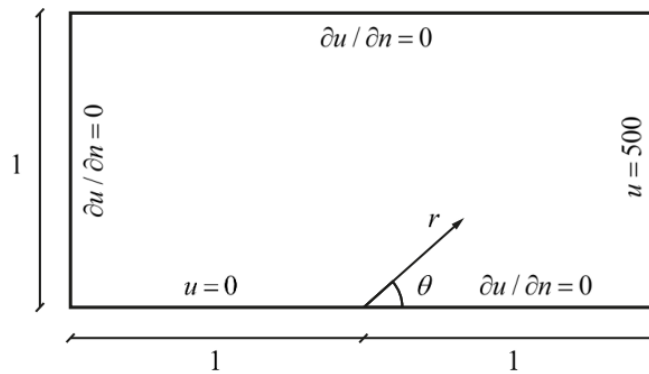
می‌آید،

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (36)$$

درایه‌های ماتریس سختی \mathbf{K} حاصل اعمال عمل‌گرهای معادله (در گره‌های داخلی) یا شرایط مرزی (در گره‌های مرزی) مطابق روابط (۳۴) بر توابع شکل همسایگی آن گره با جانمایی مناسب هستند. همچنین درایه‌های بردار بارگذاری معادل با مقدار تابع منبع (Q)، شار (q) یا میدان پتانسیل معلوم (\bar{U}) حسب مورد در گره مزبور می‌باشند. در مجموع فرمول‌بندی روش نقاط محدود بسیار ساده بوده و نیازمند انتگرال‌گیری عددی در دامنه یا مرز نمی‌باشد.

۴- نتایج عددی

در این بخش به منظور بررسی کارایی روش پیشنهادی در حل مسائل دارای تکنیکی ضعیف، حل مسئله عددی مرسوم موتز ارائه



شکل ۳. هندسه و شرایط مرزی حاکم بر مسئله موتز.

تبدیل برابر با ۰/۱ و ۰/۲ در شکل ۴ بررسی شده‌اند. تاثیر مثبت غنی‌سازی در مجاورت تکینگی بر بهبود دقت حل عددی در نمودارهای مذکور قابل مشاهده است. همچنین درجات تقریب برای پارامترهای غنی‌سازی $\beta = \gamma = 0.1$ در محدوده ۲۰-۱۵، و برای $\beta = \gamma = 0.2$ در محدوده ۱۵-۱۰ پیشنهاد می‌گردد. در شکل ۵ پاسخ دقیق مسئله موتز در کنار اختلاف آن با پاسخ حاصل از روش نقاط محدود کلاسیک و غنی‌شده به شیوه پیشنهادی نمایش داده شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که پس از غنی‌سازی، انطباق مطلوبی میان پاسخ عددی و پاسخ دقیق برقرار است که بیان‌گر عملکرد قابل قبول روش پیشنهادی است. این هم‌خوانی به‌ویژه در نواحی نزدیک به تکینگی به صورت محسوس قابل مشاهده است. خطای میانگین در کل دامنه در حالت بدون غنی‌سازی برابر با ۲/۰۶۵ درصد و برای حالت دارای غنی‌سازی با استفاده از توابع پایه متعادل‌شده تکین ۰/۴۰۹۳۳۶ درصد است.

برای بررسی بیشتر، در ادامه مقایسه پاسخ‌های دقیق و عددی در راستای زوایای صفر و ۹۰ درجه در شکل ۶، و در فواصل شعاعی ۰/۱ و ۰/۳ در شکل ۷ انجام شده است. هر دو شکل بیان‌گر بهبود قابل ملاحظه دقت تقریب روش پس از افزودن پایه‌های متعادل‌شده تکین، نسبت به حالت استاندارد روش می‌باشند.

نهایتاً به‌منظور مقایسه عملکرد روش مورد مطالعه، تحلیل خطای میانگین نسبت به حل تحلیلی حاصل از روش حاضر و

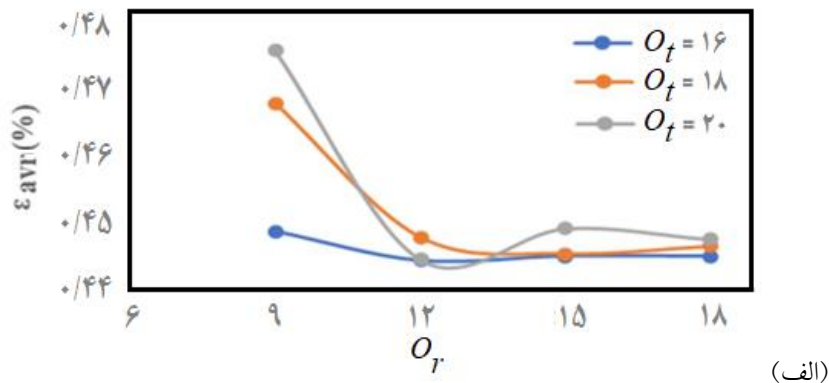
می‌شود. درصد خطای میانگین نسبت به پاسخ تحلیلی بر اساس رابطه (۳۷) برآورد می‌گردد،

$$\varepsilon_{ave}(\%) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (U_{ex}|_{x_i} - U_{ap}|_{x_i})^2}{\sum_{i=1}^N (U_{ex}|_{x_i})^2}} \times 100 \quad (37)$$

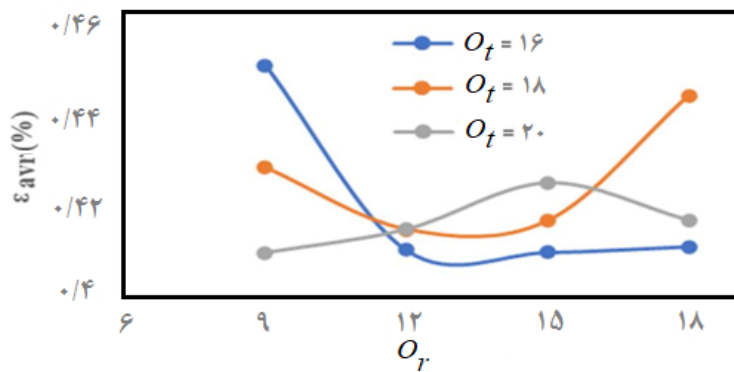
در این رابطه U_{ex} پاسخ تحلیلی مسئله و U_{ap} پاسخ عددی در نقاط گره‌ای می‌باشند. مسئله موتز به عنوان یک معیار شناخته‌شده در بررسی عملکرد روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مطرح است. هندسه و شرایط مرزی حاکم بر مسئله مطابق با شکل ۳ بوده و دارای تکینگی ضعیف با مرتبه ۰/۵ در مبدا مختصات است. حل نیمه تحلیلی آن را می‌توان مطابق با رابطه (۳۸) بیان نمود، که ضرایب مجهول آن در مرجع (۱۷) ارائه شده‌اند،

$$U_{ex} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+\frac{1}{2}} \cos\left(i + \frac{1}{2}\right) \theta \quad (38)$$

به عنوان نقاط گره‌ای روش پیشنهادی، شبکه‌ای منظم شامل ۴۱ ستون و ۲۱ ردیف با فواصل یکنواخت در نظر گرفته شد، با این توضیح که هیچ گره‌ای نباید روی نقطه تکین قرار گیرد. در صورت استفاده از حل ترکیبی، شعاع ناحیه غنی‌سازی برابر با ۰/۲۲ و شعاعی بیرونی ناحیه گذار برابر با ۰/۴۴ فرض گردید. همچنین جهت اطمینان از پوشش کامل نواحی غنی‌سازی، شعاع تعریف توابع پایه متعادل‌شده تکین برابر با ۱/۴۳ انتخاب گردید. برای تعیین مقادیر بهینه پارامترهای غنی‌سازی، درجات مختلف θ_r و θ_t همراه با دو مقدار متفاوت پارامترهای تبدیل β و γ مورد ارزیابی قرار گرفتند. درصد خطای میانگین برای پارامترهای

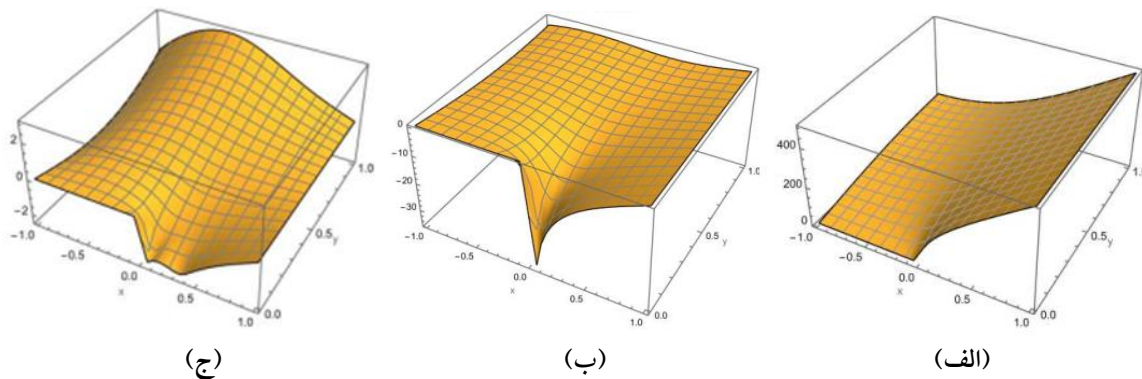


(الف)



(ب)

شکل ۴. نمودار درصد خطای میانگین برای درجات تقریب مختلف به ازای (الف) $\gamma = \beta = 0.1$ و (ب) $\gamma = \beta = 0.2$



(ج)

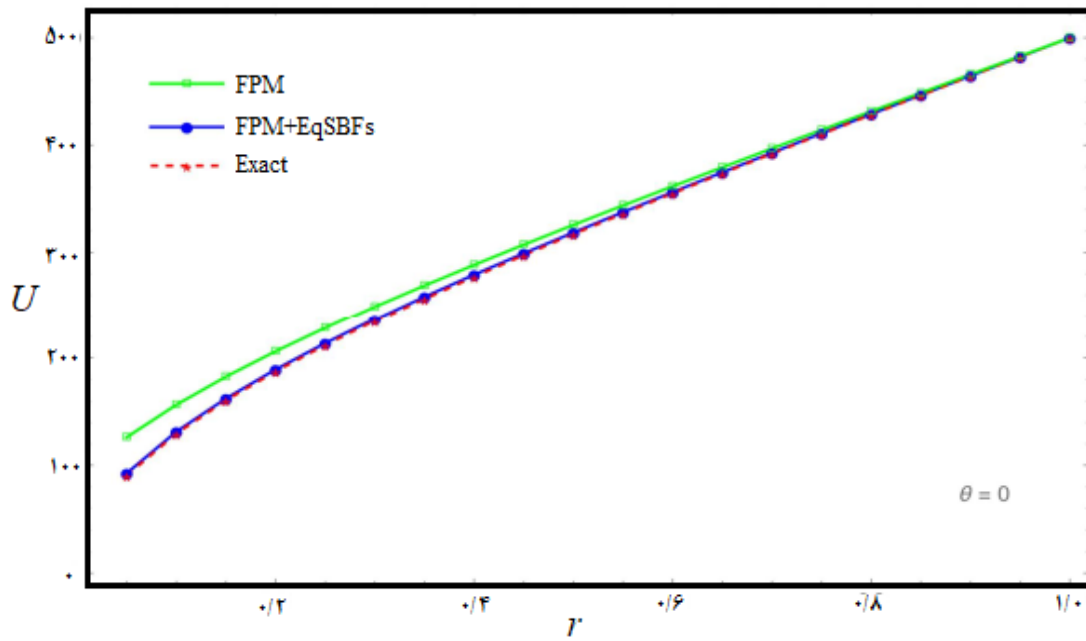
(ب)

(الف)

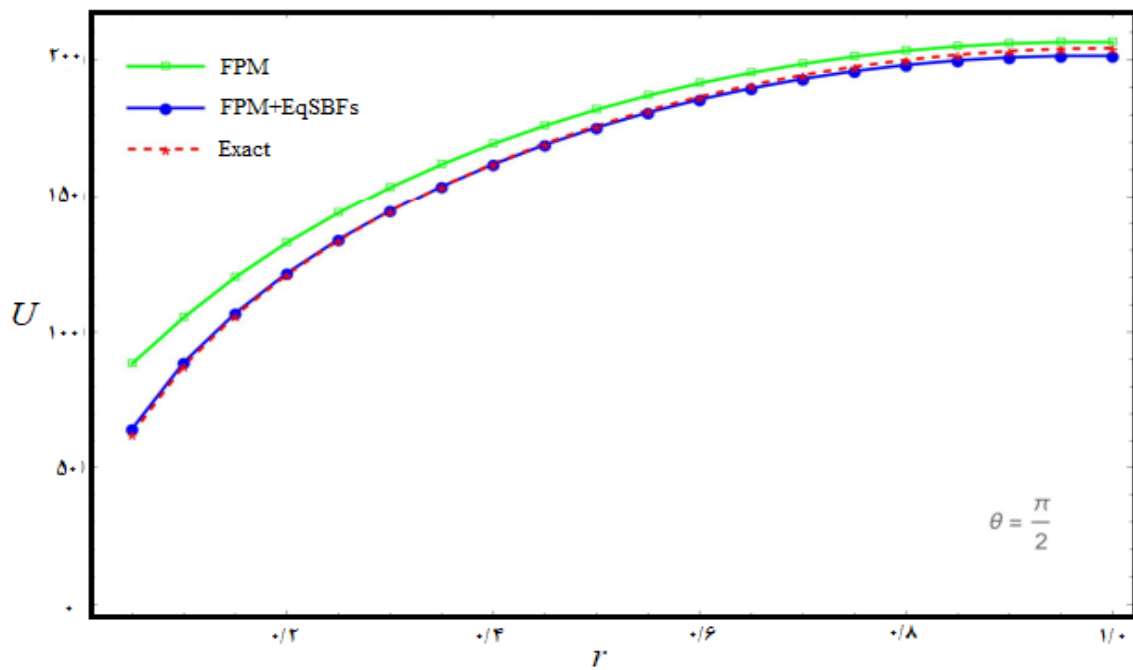
شکل ۵. نتایج حل مسئله موتز: (الف) حل دقیق، (ب) اختلاف حل دقیق و حل عددی بدون غنی‌سازی، (ج) اختلاف حل دقیق و حل عددی پس از اعمال غنی‌سازی.

برای جملات غنی‌سازی از $\gamma = \beta = 0.2$ با مراتب تقریب شعاعی و زاویه‌ای معادل ۱۰ استفاده گردید. مشاهده می‌شود که هر چند روش اجزای محدود نسبت به روش نقاط محدود استاندارد دقت بهتری از خود نشان می‌دهد، اما با اعمال غنی‌سازی به روش نقاط محدود دقت آن از روش اجزای محدود

روش اجزای محدود استاندارد انجام پذیرفته است. در شکل ۸ درصد خطای میانگین برای روش نقاط محدود غنی‌شده پیشنهادی، روش نقاط محدود استاندارد و روش اجزای محدود برحسب فاصله میانگین بین گره‌ها (در روش اجزای محدود معادل با بعد المان مربعی چهاروجهی) با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

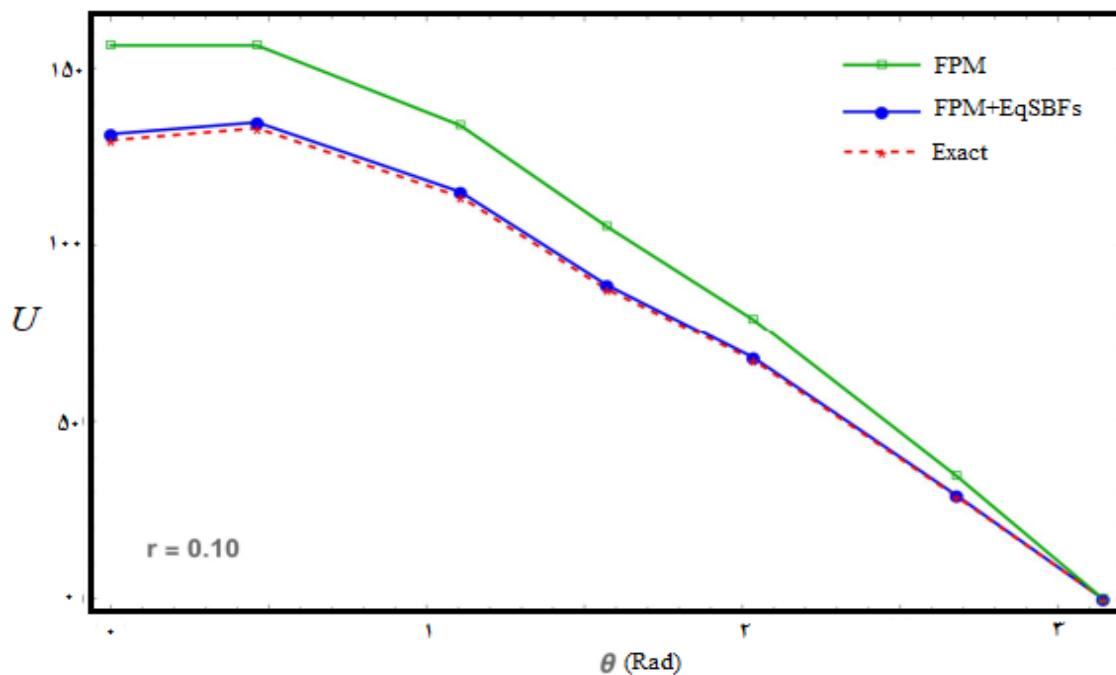


(الف)

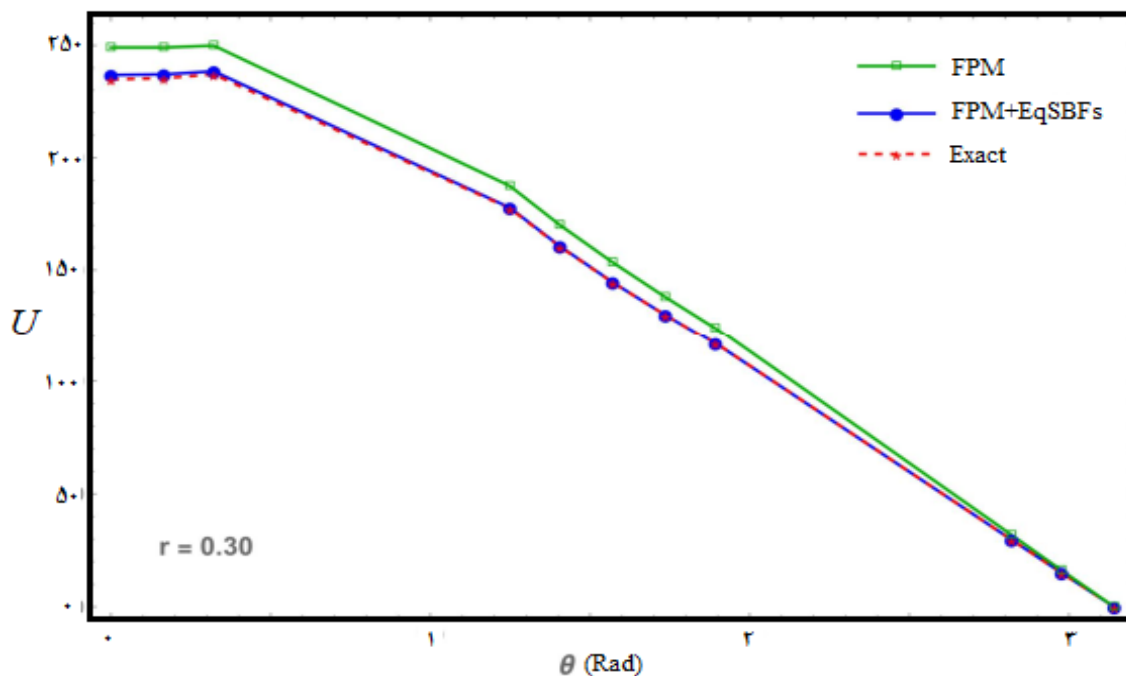


(ب)

شکل ۶. مقایسه مقادیر پاسخ در راستای زوایای مختلف، (الف) صفر درجه و (ب) ۹۰ درجه.



(الف)

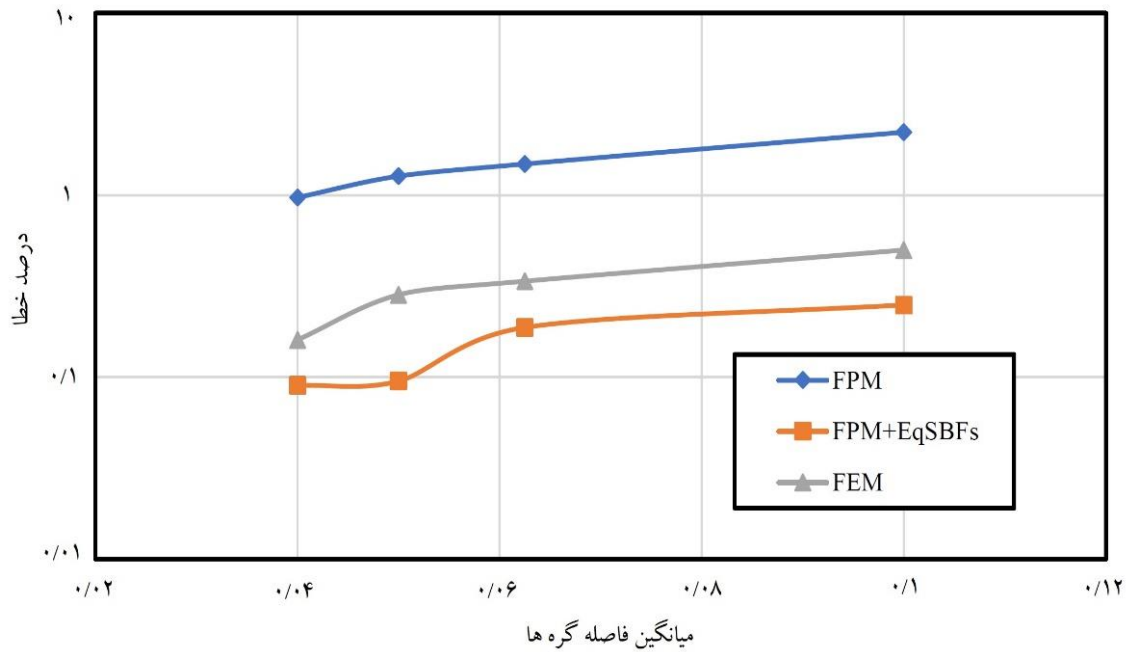


(ب)

شکل ۷. مقایسه مقادیر پاسخ در فواصل شعاعی مختلف، (الف) فاصله شعاعی ۰/۱، (ب) فاصله شعاعی ۰/۳.

به مجاورت نقطه تکین می‌تواند فاصله خطای حاصل از روش پیشنهادی را با روش‌های استاندارد بیشتر کند.

بهرتر می‌شود. لازم به ذکر است که برای محاسبه خطا از داده‌های کلیه گره‌های دامنه استفاده شده است، و محدود کردن این دامنه



شکل ۸. نمودار مقایسه تغییرات درصد خطا با افزایش تراکم شبکه بین روش حاضر و روش اجزای محدود.

به عنوان یک روش بدون شبکه ارائه می‌دهد. نتایج پژوهش نشان داد که پایه‌های تکین به سادگی با پایه‌های هموار روش نقاط محدود در ضمن فرایند حداقل مربعات وزن‌دار ترکیب می‌شوند. با استفاده از توابع گذار می‌توان غنی‌سازی را به همسایگی نقطه تکین محدود نموده و از افزایش هزینه محاسباتی جلوگیری نمود. نتایج عددی به دست آمده در ضمن بررسی مسئله مرسوم موتز در نواحی مختلف دامنه نشان داد که روش ارائه شده قادر است پاسخ مسئله را با دقت بالا و تطابق نزدیک با حل دقیق بازسازی نماید، بنابراین این روش بهبودیافته می‌تواند به عنوان یک ابزار کارآمد و قابل اعتماد برای حل مسائل دارای تکینگی ضعیف بدون نیاز به آگاهی قبلی از مرتبه تکینگی مورد استفاده قرار گیرد.

۵- جمع‌بندی

در این پژوهش یک چارچوب عددی مبتنی بر غنی‌سازی روش نقاط محدود برای حل مسائل دارای تکینگی ضعیف ارائه و ارزیابی شد. برخلاف روش‌های کلاسیک که به تعیین دقیق شدت تکینگی وابسته هستند، رویکرد پیشنهادی با تکیه بر توابع مستخرج از شکل انتگرال باقیمانده وزنی معادله حاکم، بازتولید رفتار غیرهموار میدان پاسخ را به صورت ضمنی فراهم می‌کند. توابع متعادل‌شده تکین حاصل قادر به تشخیص خودکار مرتبه تکینگی و ایجاد جملات تکین متناسب هستند. روش نقاط محدود با اعمال قوی معادله و شرایط مرزی، ساختاری ساده را

واژه‌نامه

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| 1- singularity | 5- Weighted Least Squares (WLS) | 9- Motz's problem |
| 2- meshfree methods | 6- Partition of Unity (PU) | 10- source function |
| 3- Finite Element Method (FEM) | 7- Extended Finite Element Method | 11- fictitious domain |
| 4- Finite Point Method (FPM) | 8- Enrichment | 12- null-space |

مراجع

- [1] Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L. A Finite Point Method in Computational Mechanics: Applications to Convective Transport and Fluid Flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996; 39(22): 3839-3866. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19961130\)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961130)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R)
- [2] Babuška, I., and Guo, B.Q. The h - p Version of the Finite Element Method for Domains with Corner Singularities, *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1992; 29(5): 1261-1291. <https://doi.org/10.1137/0725048>
- [3] Melenk, J. M., and Babuška, I. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996; 139(1-4): 289-314. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01087-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01087-0)
- [4] Belytschko, T., and Black, T. Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999; 45(5): 601-620. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990620\)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S)
- [5] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999; 46(1): 131-150. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990910\)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J)
- [6] Strouboulis, T., Coppers, K., and Babuška, I. The Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000; 190(32-33): 4081-4193. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00188-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00188-8)
- [7] Sukumar, N., Chopp, D.L., Moës, N., and Belytschko, T. Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001; 190(46-47): 6183-6200. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00215-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00215-8)
- [8] Pageau S.S., and Biggers Jr S.B. Enrichment of finite elements with numerical solutions for singular stress fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997; 40(14): 2693-2713. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970730\)40:14<2693::AID-NME190>3.0.CO;2-X](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970730)40:14<2693::AID-NME190>3.0.CO;2-X)
- [9] Zhang Q., Babuška I., and Banerjee U. Robustness in stable generalized finite element methods (SGFEM) applied to Poisson problems with crack singularities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2016; 311: 476-502. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.08.019>
- [10] Akhondzadeh S., Khoei A.R., and Broumand P. An efficient enrichment strategy for modeling stress singularities in isotropic composite materials with X-FEM technique. *Engineering Fracture Mechanics*. 2017; 169: 201-25. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.11.019>
- [11] Fries, T.P., and Belytschko, T. The Extended/Generalized Finite Element Method: An Overview. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2010; 84(3): 253-304. <https://doi.org/10.1002/nme.2914>
- [12] Azizpooryan, M., and Noormohammadi, N. Static Analysis of in-Plane Heterogeneous Laminated Composite Plates Using Equilibrated Basis Functions Based on FSDT. *Journal of Computational Methods in Engineering*. 2022; 40(1): 59-77. <https://doi.org/10.47176/jcme.40.1.6241>
- [13] Noormohammadi, N., and Boroomand, B. Construction of Equilibrated Singular Basis Functions without a Priori Knowledge of Analytical Singularity Order. *Computers & Mathematics with Applications*. 2017; 73(7): 1611-1626. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.02.004>
- [14] Bateniparvar, O., Noormohammadi, N., and MohammadSalehi, A. Solution of Harmonic Problems with Weak Singularities Using Equilibrated Basis Functions in Finite Element Method, *Journal of Computational Methods in Engineering*. 2022; 39(2): 119-146. <https://doi.org/10.47176/jcme.39.2.6242>
- [15] Ghorbani, M., Noormohammadi, N., and Boroomand, B. Enrichment of the Element Free Galerkin Method for Cracks and Notches without a Priori Knowledge of the Analytical Singularity Order. *Computers & Mathematics with Applications*. 2024; 162: 155-179. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2024.03.007>
- [16] Pirhaji Kouzani, N., and Noormohammadi, N. Scaled Boundary Finite Element Method Coupled with Equilibrated Basis Functions for Heat Transfer Problems. *Journal of Computational Methods in Engineering*. 2023; 42(1): 105-123. <https://doi.org/10.47176/jcme.42.1.1005>
- [17] Lu, T.T., Hu H.Y., and Li Z.C. Highly accurate solutions of Motz's and the cracked beam problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2004; 28: 1387-1403. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2004.03.005>