

تعمیم یک روش "آپ و ویند"<sup>۱</sup> به نواحی زیر صوت در حل معادلات سهموی شده ناویر-استوکس

حسن خالقی\*، مسعود میرزایی\* و سید محمد حسین کریمیان\*\*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی هوا فضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت مقاله ۷۹/۶/۱۹ - دریافت نسخه نهایی ۸۱/۱۱/۷)

چکیده - در این مقاله یک روش "آپ ویند" که اصول اولیه آن را روش "رو" تشکیل می‌دهد برای محاسبه شارهای غیر لزج در حل عددی معادلات سهموی شده ناویر-استوکس PNS ارائه می‌شود و معادلات مذکور به صورت ضمنی و غیر تکراری با استفاده از روش حجمهای محدود حل می‌شوند. مزیت اصلی روش ارائه شده نسبت به روشهای دیگر در این زمینه، کاهش شدید نوسانات در مجاورت خط صوتی است. این مزیت سبب می‌شود که روش حاضر قادر به تحلیل جریان های مافوق صوت با عدد ماخ نزدیک به یک باشد. این در شرایطی است که روشهای "آپ ویند" دیگر توانایی چنین کاری را ندارند. اعتبار روش مذکور با تحلیل سه مسئله نمونه بررسی شده است این مسائل شامل جریان ابر صوتی دو بعدی حول گوشه تراکمی با زاویه ۱۵ درجه، جریان مافوق صوت دو بعدی حول یک صفحه تخت و جریان مافوق صوت تقارن محوری حول یک دماغه مماسی است. نتایج به دست آمده با نتایج روشهای عددی دیگر مانند روش "بیم-وارمینگ" مقایسه شده است

واژگان کلیدی: آپ ویند، ناویر-استوکس، ابر صوتی

## Development of an Upwind Algorithm at Subsonic Regions in the Solution of PNS Equations

H. Khaleghi, M. Mirzaee and S.M.H. Karimian

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University.

**Abstract:** In this paper an upwind algorithm based on Roe's scheme is presented for solution of PNS equations. Non iterative-implicit method using finite volume technique is used. The main advantage of this approach, in comparison with similar upwind methods, is reduction of oscillations around sonic line. This advantage causes the present method to be able to analyze supersonic flows with free stream Mach number near to one, where similar upwind methods normally fail. Some two dimensional/axisymmetric test cases have been computed to validate the present method. These cases are: Hypersonic flow over a 15-degree compression ramp, two-dimensional supersonic flow over a flat plate and axisymmetric supersonic flow over a tangent

\*\* دانشیار

\* استادیار

ogive. The results are compared with the results of other numerical schemes, such as Beam and Warming scheme

**Keywords:** Upwind, Navier stokes, Hypersonic

## فهرست علائم

A	ماتریس ژاکوبین شار	$\alpha$	پارامتر تراکم خطوط شبکه
B	ماتریس ژاکوبین شار	$\gamma$	ثابت گاز
C	ماتریس ژاکوبین شار	$\xi$	جهت اصلی جریان
D	ماتریس مسئله ریمان	$\eta$	جهت عرضی جریان
E	شار در جهت اصلی جریان	$\omega$	ضریب روش "ویگنرون"
F	شار در جهت عرضی جریان	$\lambda$	مقدار مشخصه
H	شار اضافه در جریانهای تقارن محوری	$\mu$	ویسکوزیته سیال
J	ژاکوبین تبدیل مختصات	$\sigma$	ضریب اطمینان در تقریب ویگنرون
j	موقعیت نقاط شبکه در جهت عرضی	$\tau$	زمان بدون بعد
L	طول مشخصه	$\rho$	دانسیته سیال
M	عدد ماخ	<b>زیر نویسها و بالا نویسها</b>	
n	موقعیت پیشروی	i	شار غیر لزج
p	فشار بدون بعد	v	شار لزج
$\bar{Q}$	بردار متغیرهای مستقل	$\infty$	شرایط جریان آزاد
-	ماتریس مقادیر ویژه سمت راست	~	پارامترهای بعد دار
$R^{-1}$	ماتریس مقادیر ویژه سمت چپ	*	شار لزج با حذف مشتقات در جهت $\xi$
T	دمای بدون بعد	s	پارامتر مجاور خط صوتی
u	مولفه بدون بعد سرعت x	$\approx$	پارامترهای مربوط به شار مرتبه دوم
v	مولفه بدون بعد سرعت y		

## ۱- مقدمه

محاسبات نسبت به معادلات کامل ناویر-استوکس مزیت داشته باشند. معادلات PNS از معادلات کامل ناویر-استوکس استخراج می‌شوند و بر خلاف معادلات لایه مرزی تمامی عبارات معادلات اوایلر را دارند و در نتیجه هم در ناحیه لزج و هم در ناحیه غیر لزج جریان اعتبار دارند. تاکنون تلاشهای زیادی برای حل این معادلات با استفاده از روشهای تفاضل محدود انجام گرفته است که به عنوان نمونه می‌توان به مراجع [۱-۳] اشاره کرد. روشهای مذکور توسط "لیندمات"<sup>۱</sup>

معادلات ناویر-استوکس سهموی شده ناویر-استوکس برای تحلیل میدانهای جریان پیچیده دائم، مافوق صوت ولزج به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱-۷]. تحت شرایطی این معادلات با استفاده از روش "پیشروی مکانی"<sup>۲</sup> (در "جهت اصلی جریان"<sup>۳</sup>) قابل حل‌اند. این موضوع سبب شده است که استفاده از این معادلات در تحلیل بسیاری از میدانهای جریان پیچیده از نظر اشغال حافظه محاسباتی و همچنین زمان

و "کلین" [۸]، "مک دونالد" [۹] و همچنین "بیم" و "وارمینگ" [۱۰] برای حل معادلات ناویر-استوکس وابسته به زمان ارائه شده است. در این روشها برای انفصال شارهای غیر لزج از "تفاضل مرکزی" استفاده می شود که این موضوع باعث ایجاد نوسان در مجاورت ناپیوستگیهای موجود در میدان جریان (مانند "امواج ضربه‌ای") می شود. برای رفع این اشکال عبارات اتلاف مصنوعی (هموار کننده) به معادلات اضافه میشود که اندازه بهینه ضرایب مربوط به این عبارات با استفاده از روش سعی و خطا محاسبه می شود که روندی زمانبر است. این مسئله سبب شده است که در چند سال اخیر برای حل این معادلات روشهای "آپ ویند" مورد توجه قرار گیرند. که به عنوان نمونه می توان به کارهای ارائه شده در مراجع [۴-۷] کرد. این روشها ابتدا برای حل مسائل غیر دائم و حل معادلات مربوطه با استفاده از "پیشروی در زمان" [۱۳ و ۱۴] مطرح شد و سپس برای حل مسائل دائم به روش "پیشروی مکانی" تعمیم داده شد، [۴-۶]. روش "آپ ویند" ارائه شده در مرجع [۴] برای تحلیل جریانهای مافوق صوت با جدایش محدود در مراجع [۱۱ و ۱۲] تعمیم داده شد.

در این مقاله یک روش "آپ ویند" بر مبنای روش "رو" برای حل معادلات سهموی شده ناویر-استوکس ارائه می شود. در کارهای انجام شده به روش "آپ ویند" در این زمینه مراجع [۴-۶] و [۱۱ و ۱۲]، برای محاسبه عبارات غیر لزج در مرزهای سلولهای محاسباتی در نواحی زیر صوت جریان از تقریب مرکزی و در نواحی مافوق صوت از تقریب "آپ ویند" استفاده شده است این کار باعث می شود که به دلیل تغییر روش در محاسبه شارهای غیر لزج در مجاورت خط صوتی نوسانات شدیدی در نتایج ظاهر می شود. این نوسانات در اعداد ماخ پایین (نزدیک به یک) به حدی است که روش استفاده شده توانایی حل مسئله را نخواهد داشت. در روش ارائه شده در این مقاله تا حد زیادی این مسئله برطرف شده است و در تمامی نواحی میدان حل (زیر صوت و مافوق صوت) از روش "آپ ویند" استفاده می شود.

## ۲- معادلات حاکم

معادلات PNS از معادلات کامل ناویر-استوکس با اعمال فرضیاتی استخراج می شوند. تاکنون انواع مختلفی از این معادلات استخراج شده است که عمدتاً تقریبهای اعمال شده در استخراج آنها به شرایط فیزیکی مسائل مربوط می شود. به طور کلی در استخراج انواع مختلف این معادلات از این فرضیات استفاده می شود: ۱- حذف عبارات غیر دائم در معادلات کامل ناویر-استوکس ۲- حذف مشتقات لزج در جهت اصلی جریان. ۳- تصحیح عبارت گرادیان فشار در جهت اصلی جریان برای ایجاد شرایط پایدار پیشروی.

معادلات دو بعدی-تقارن محوری ناویر-استوکس غیر دائم در سیستم مختصات عمومی  $(\xi - \eta)$  در شکل "بقای" چنین است:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + \alpha \bar{H} = 0 \quad (1)$$

با اعمال فرضیات فوق شکل نهایی معادلات PNS به شکل بقای برای یک جریان دو بعدی-تقارن محوری در سیستم مختصات عمومی  $(\xi - \eta)$  چنین خواهد شد:

$$\frac{\partial \bar{E}_i^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{E}_p}{\partial \xi} + \alpha \bar{H}_i = \frac{\partial \bar{F}_v^*}{\partial \eta} + \alpha \bar{H}_v^* \quad (2)$$

که علامت "\*" بر روی شارهای لزج  $\bar{H}_v$  و  $\bar{F}_v$  بیانگر این است که کلیه مشتقات لزجت در جهت اصلی جریان (جهت  $\xi$ ) حذف شده است. بردار شار غیر لزج  $\bar{E}_i$  شامل عبارت فشار است و بنابر این عبارت گرادیان فشار در جهت اصلی جریان در عبارت  $\frac{\partial \bar{E}_i}{\partial \xi}$  ظاهر خواهد شد. وجود این گرادیان سبب می شود که در ناحیه زیر صوت لایه مرزی اطلاعات از پایین دست جریان به بالا دست منتشر شود. در واقع در این ناحیه از جریان معادلات ماهیت بیضوی داشته و استفاده از روش پیشروی مکانی سبب بزرگ شدن حل به صورت نمایی در مجاورت دیواره های میدان جریان می شود و پیشروی مکانی ناپایدار می شود. لذا برای حذف اثرات بالا دست جریان، گرادیان فشار مذکور باید به نحوی تصحیح شود.

با اعمال تکنیک "حجمهای محدود" بر روی معادله ۴ و بعد از خطی سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \left\{ A_j^* + \Delta \xi \alpha [(C_i)_j - (C_v)_j] + \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} [B_v(j-1/2, j) - B_v(j+1/2, j)] \right\} \delta^{n+1} \bar{U}_j + \\ & \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} [B_v(j-1/2, j)] \delta^{n+1} \bar{U}_{j-1} - \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} [B_v(j+1/2, j)] \delta^{n+1} \bar{U}_{j+1} + \\ & \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} [(\bar{F}_i)_{j+1/2}^{n+1} - (\bar{F}_i)_{j-1/2}^{n+1}] = -(\Delta \bar{E}_p)^n + \\ & \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} [(\bar{F}_v)_{j+1/2}^n - (\bar{F}_v)_{j-1/2}^n] - \Delta \xi \alpha (\bar{H}_i^n - \bar{H}_v^n) \end{aligned} \quad (6)$$

که در این معادله  $A_j^*$ ,  $(C_i)_j$ ,  $(C_v)_j$ ,  $B_v(k, l)$  ماتریسهای ژاکوبین بردارهای شار لزج و غیر لزج اند.

تا این مرحله برای تعیین شارهای غیر لزج  $(\bar{F}_i)_{j+1/2}^{n+1}$  و  $(\bar{F}_i)_{j-1/2}^{n+1}$  هیچ اقدامی انجام نشده است در واقع تفاوت اساسی بین الگوریتمها در حل معادلات PNS در چگونگی تعیین این شارها است. روشی که در این مقاله برای تعیین شارهای مذکور از آن استفاده شده است بر اساس روش "رو" [۱۳] است. روش "رو" به گروهی از روشهای "آپ و بند" موسوم به "حل کنندههای ریمان"<sup>۱۵</sup> متعلق است و همان طور که از اسم آنها پیداست برای تعیین شارها از حل مسئله "ریمان" استفاده می شود در روش "رو" برای ساده سازی مسئله از نظر عددی از مسئله تقریبی (خطی شده) "ریمان" استفاده می شود. مسئله تقریبی "ریمان" برای مقطع  $j+1/2$  چنین است:

$$\frac{\partial \bar{E}^*}{\partial \xi} + D_{j+1/2} \frac{\partial \bar{E}^*}{\partial \eta} = 0 \quad (7)$$

با شرایط اولیه:

$$(\bar{E}^*)^n = \begin{cases} (1/J)_{j+1/2} E_{j+1}^* & \eta > \eta_{j+1/2} \\ (1/J)_{j+1/2} E_j^* & \eta < \eta_{j+1/2} \end{cases}$$

و ماتریس  $D_{j+1/2}$  چنین محاسبه می شود:

$$D_{j+1/2} = (\eta_x)_{j+1/2} \left( \frac{\partial E_i}{\partial E^*} \right)_{j+1/2} + (\eta_y)_{j+1/2} \left( \frac{\partial F_i}{\partial E^*} \right)_{j+1/2}$$

علی رغم شکل غیر بقیایی معادله (۷)، اگر خواصی از جریان که در تشکیل ماتریس  $D_{j+1/2}$  به کار رفته است چنان متوسط گیری شود که در رابطه زیر صدق کند:

در مرجع [۱۵] روشهای مختلفی برای تصحیح این عبارات پیشنهاد شده است که هر کدام دارای نقاط ضعف و قوت هستند. یکی از روشهای نسبتاً موفق که در اینجا از آن استفاده شده است "روش ویگنرون"<sup>۱۳</sup> است. در این روش بردار شار غیر لزج  $\bar{E}_i$  به دو بردار تفکیک می شود:

$$\bar{E}_i = \bar{E}_p + \bar{E}_i^* \quad (3)$$

که در این معادله:

$$\bar{E}_p = \frac{1}{J} [\xi_x E_p + \xi_y F_p] \quad \bar{E}_i^* = \frac{1}{J} [\xi_x E_i^* + \xi_y F_i^*]$$

$$E_i^* = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \omega \\ \rho uv \\ (E_t + p)v \end{bmatrix} \quad F_i^* = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + \omega p \\ (E_t + p)v \end{bmatrix}$$

$$E_p = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\omega)p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-\omega)p \\ 0 \end{bmatrix}$$

پارامتر  $\omega$  با توجه به تحلیل مقادیر ویژه چنین محاسبه می شود.

$$\omega = \min \left[ \frac{\sigma \gamma M_\xi^2}{1 + (\gamma - 1) M_\xi^2}, 1 \right]$$

$\sigma$  یک ضریب اطمینان است که مقدار آن بین ۰/۷۵ و ۰/۹۵ انتخاب می شود و  $M_\xi$  عدد ماخ در جهت  $\xi$  است. با ترکیب معادلات (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \bar{E}_i^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{E}_p}{\partial \xi} + \alpha \bar{H}_i = \frac{\partial \bar{F}_v^*}{\partial \eta} + \alpha \bar{H}_v \quad (8)$$

ضریب هدایت گرمایی با فرض ثابت بودن عدد پرانتل بر حسب ویسکوزیته جایگزین می شود. ویسکوزیته از رابطه "ساترلند"<sup>۱۴</sup> محاسبه می شود.

$$\mu = T^{3/2} \left( \frac{1 + 110.4 / \bar{T}_\infty}{T + 110.4 / \bar{T}_\infty} \right) \quad (5)$$

برای بستن سیستم معادلات (۱) نیاز به معادله حالت گاز است. در این مقاله از فرض گاز ایدئال استفاده شده است که معادله حالت را می توان به صورتهای زیر نوشت:

$$T = \gamma M_\infty^2 p / \rho e \quad \text{و} \quad p = (\gamma - 1) \rho e$$

$$(F_{it})_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\eta_x / J)_{j+1/2}[(E_i)_j + (E_i)_{j+1}] + \frac{1}{2}(\eta_y / J)_{j+1/2}[(F_i)_j + (F_i)_{j+1}] + [\varepsilon][(\eta_x / J)_{j+1/2} \Delta E_i + (\eta_y / J)_{j+1/2} \Delta F_i] \quad (10)$$

که در این معادله  $[\varepsilon]$  یک ماتریس قطری است که برای نقاط ناحیه زیر صوت جریان تعریف شده است. اعضای روی قطر این ماتریس در نقاط مجاور خط صوتی (ماتریس  $[\varepsilon_s]$ ) را چنین تعریف می‌کنیم:

بر روی سطح جامد که کلیه عبارات جابه‌جایی صفر است و مکانیزم انتقال شار از نوع پخش است. اعضای روی قطر ماتریس  $[\varepsilon]$  صفر در نظر گرفته می‌شود. و در واقع از عبارت "آپ ویند" روی سطح جامد در معادله (10) صرف نظر می‌شود. در اولین سطح کنترل از دیوار که عدد ماخ بزرگتر از یک (با توجه به متوسط گیری رو) است شار محاسبه شده از معادله (9) باید با شار محاسبه از معادله (10) برابر باشد. با تساوی این دو شار اعضای ماتریس قطری  $[\varepsilon_s]$  در سطح کنترل ذکر شده محاسبه می‌شود:

$$[\varepsilon_s] \left[ \left( \frac{\eta_x}{J} \right)_{j+1/2} \Delta E_i + \left( \frac{\eta_y}{J} \right)_{j+1/2} \Delta F_i \right] = -\frac{1}{2}(\text{sgn } D)_{j+1/2} \left[ \left( \frac{\kappa_x}{J} \right)_{j+1/2} \Delta E_i + \left( \frac{\kappa_y}{J} \right)_{j+1/2} \Delta F_i \right] \quad (11)$$

بسط معادله فوق اعضای ماتریس قطری  $[\varepsilon_s]$  چنین محاسبه می‌شوند:

$$[\varepsilon_s]_K = -\frac{1}{2} \sum_{L=1}^4 (\text{sgn } D)_{K,L} \frac{\left[ \left( \frac{\eta_x}{J} \right)_{j+1/2} \Delta E_i + \left( \frac{\eta_y}{J} \right)_{j+1/2} \Delta F_i \right]_L}{\left[ \left( \frac{\eta_x}{J} \right)_{m+1/2} \Delta E_i + \left( \frac{\eta_y}{J} \right)_{m+1/2} \Delta F_i \right]_K} \quad (12)$$

که در معادله فوق  $(K=1,2, \dots, 5)$  است.

با توجه به تعیین اعضای ماتریس  $[\varepsilon_s]$  روی سطح کنترل ذکر شده و همچنین مقادیر این اعضا روی سطح جامد توزیع

$$D_{j+1/2} (1/J)_{j+1/2} \Delta E^* = (\eta_x / J)_{j+1/2} \Delta E_i + (\eta_y / J)_{j+1/2} \Delta F_i \quad (8)$$

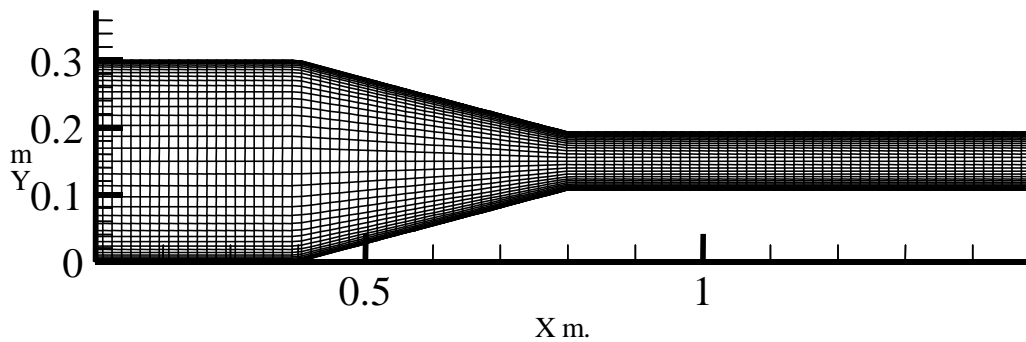
قابلیت "تسخیر شوک"<sup>16</sup> الگوریتم حفظ می‌شود جزئیات این متوسط گیری در مرجع [11] آورده شده است. پس از حل مسئله فوق شار غیر لزج که از مقطع  $j+1/2$  عبور می‌کند با دقت مرتبه اول عبارت است از:

$$(F_{it})_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\eta_x / J)_{j+1/2}[(E_i)_j + (E_i)_{j+1}] + \frac{1}{2}(\eta_y / J)_{j+1/2}[(F_i)_j + (F_i)_{j+1}] - \frac{1}{2}(\text{sgn } D)_{j+1/2}[(\eta_x / J)_{j+1/2} \Delta E_i + (\eta_y / J)_{j+1/2} \Delta F_i] \quad (9)$$

در معادله (9)،  $\text{sgn } D$  چنین تعریف می‌شود:

$\text{sgn } D = R(\text{sgn } \Lambda)R^{-1}$  که  $R$  ماتریس بردارهای ویژه سمت راست و  $\text{sgn } \Lambda$  یک ماتریس قطری است که اعضای روی قطر آن با توجه به علامت مقادیرهای ویژه نظیر  $+1$  و  $-1$  است. برای جزئیات مربوط به استخراج معادله (9) می‌توان به مرجع [4] رجوع کرد.

شار محاسبه شده در معادله (9) از دو عبارت تشکیل شده است، اولین عبارت در واقع متوسط شارهای غیر لزج عبوری از مراکز دو سلول مجاور است و دومین عبارت که ضریب آن  $\text{sgn } D$  است، یک عبارت "آپ ویند" است. در مرجع [4]، در نواحی زیر صوت جریان از عبارت "آپ ویند" صرف نظر شده است و در نواحی مافوق صوت این عبارت به شار اضافه می‌شود. این کار باعث نوسان نتایج در مجاورت خط صوتی می‌شود. به طوری که در بعضی از موارد در اعداد ماخ جریان آزاد نزدیک به یک، نوسانات به حدی است که باعث ناپایداری روش "پیشروی مکانی" می‌شود. در این مقاله با توسعه روش "آپ ویند" در ناحیه زیر صوت جریان، این نوسانات کاهش می‌یابد. برای این کار ابتدا یک بردار شار مانند معادله (9) بصورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۱- هندسه و شبکه محاسباتی برای یک جریان ابرصوتی در داخل کانال

$y = y_w + Z(\eta)\delta_y$        $x = x_w + Z(\eta)\delta_x$   
 که  $x_w$  و  $y_w$  مختصات نقاط روی دیواره جسم و  $\delta_x$  و  $\delta_y$  اختلاف مختصات مرز آزاد جریان با مختصات روی دیواره جسم است.

#### ۴- شرایط اولیه و شرایط مرزی

برای حل معادلات PNS با استفاده از روش پیشروی مکانی نیاز به یک صفحه اطلاعات اولیه است. این صفحه اطلاعات باید در جایی باشد که مولفه سرعت عمود بر این صفحه در خارج لایه مرزی مافوق صوت باشد. برای اجسامی که لبه نوک تیز دارند اطلاعات اولیه را می‌توان به طور مستقیم از حل معادلات PNS به دست آورد ولی برای اجسام سر پخ اطلاعات اولیه را به طریقی فراهم کرد که در این تحقیق از کد ARC3D که حل کننده معادلات TLNS<sup>۱۷</sup> است استفاده کرد.

بر روی دیواره های جسم شرط عدم لغزش اعمال می‌شود و علاوه بر آن گرادیان فشار در جهت عمود بر سطح صفر در نظر گرفته می‌شود. از نظر گرمایی دو شرط دمای سطح ثابت و یا آدیاباتیک بودن سطح قابل اعمال است. برای جریانهای خارجی در لبه مرز آزاد جریان کلیه گرادیانها در جهت عمود بر جهت جریان آزاد صفر در نظر گرفته می‌شود.

مناسبی بر حسب عدد ماخ از این اعضا بین سطوح جامد و سطح مذکور در نظر می‌گیریم. توزیعهای مختلفی بر حسب عدد ماخ سطح کنترل (که با توجه به متوسط گیری "رو" محاسبه شده است) مورد آزمایش قرار گرفته است که البته پس از اعمال آنها، این نتیجه گرفته شد که مناسبترین توزیع، توزیع خطی است:

$$\varepsilon_K = \frac{(\varepsilon_S)_K}{M_S} M \quad (۱۳)$$

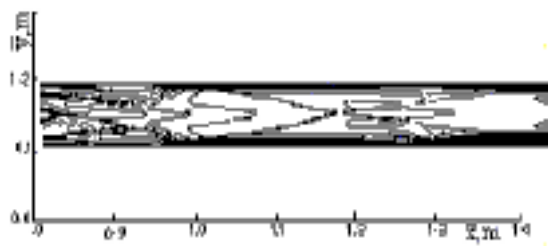
در معادله (۱۳)،  $M_S$  بیانگر عدد ماخ در اولین سطح کنترلی است که معادله (۹) روی آن اعمال می‌شود و  $M$  عدد ماخ موضعی روی سطوح کنترل بین سطح جامد و سطح  $S$  است. برای افزایش دقت الگوریتم به مرتبه دوم از روشی که در مرجع [۱۴] برای حل معادلات اویلر غیر دائم ارائه شده است استفاده می‌شود.

#### ۳- شبکه محاسباتی

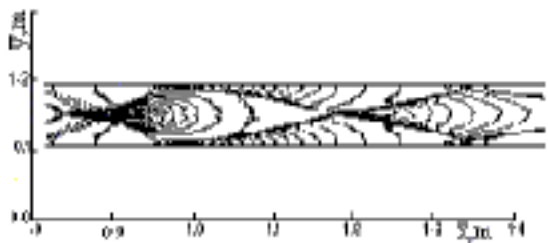
شبکه محاسباتی در هر مرحله از پیشروی با استفاده از روش جبری تولید می‌شود و در ناحیه لایه مرزی برای ریز کردن شبکه از تابع کشش که به صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده شده است:

$$z(\eta) = \frac{\beta + 1 - \alpha}{\alpha + 1} \quad \alpha = \left( \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1-\eta}$$

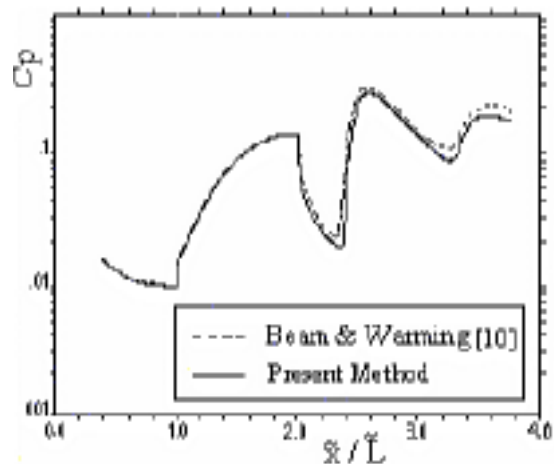
مختصات نقاط شبکه چنین به دست می‌آید:



الف-



ب-



شکل ۲- توزیع ضریب فشار در طول دیواره کانال

شکل ۴- نتایج روش "بیم-وارمینگ" در مسئله اول  
الف- خطوط عدد ماخ ثابت ب- خطوط فشار ثابت

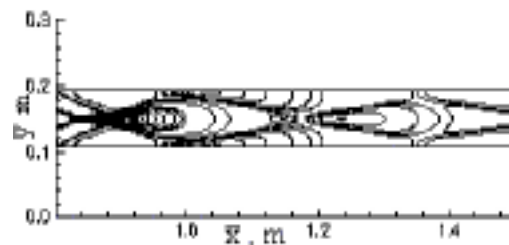
خطوط شبکه محاسباتی تعدادی از آنها حذف شده اند ابعاد واقعی شبکه ۳۵۱ سلول در جهت طولی و ۱۵۶ سلول در امتداد عرضی است. پیشروی با گامهای یکنواخت ۰/۰۰۲ متر شروع می شود و تا مقطع ۱/۵ متری ادامه پیدا می کند. دیواره کانال در دمای ثابت ۱۰۰۰ درجه کلوین فرض شده است شرایط ورودی به کانال چنین است:

$$M_1 = 15 \quad \tilde{T}_\infty = 100^\circ K \quad Re_L = 8 \times 10^4 \quad Pr = 0.72$$

در این مثال صفحه اطلاعات اولیه برای پیشروی از خود حل معادلات PNS با تقریب مرتبه دوم تهیه شده است. در این مسئله تداخل شدید بین امواج ضربه ای و امواج انبساطی وجود دارد. در شکل (۲) توزیع فشار در طول دیواره کانال آورده شده است و نتایج به دست آمده با نتایج روش "بیم-وارمینگ" که در مرجع [۴] آورده شده است مقایسه شده است. با توجه به این شکل ملاحظه می شود که اختلاف این دو روش در مناطق ماکزیمم و مینیمم (نواحی برخورد امواج به دیواره) از دیگر مناطق بیشتر است که این موضوع به تفاوت اساسی روشهای انفعال شارهای غیر لزج است. در شکل های (۳) و (۴) به ترتیب خطوط فشار ثابت و خطوط عدد ماخ ثابت در طول کانال برای



الف-



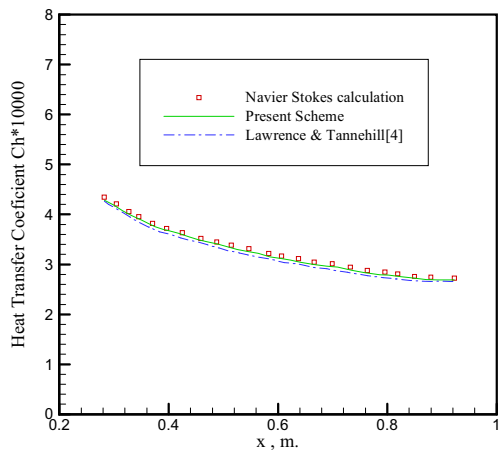
ب-

شکل ۳- نتایج روش ارائه شده در مقاله در مسئله اول  
الف- خطوط عدد ماخ ثابت ب- خطوط فشار ثابت

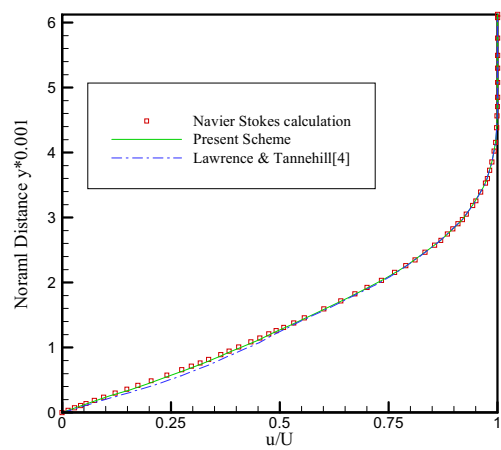
## ۵- نتایج

اعتبار روش ارائه شده با تحلیل سه مسئله مورد بررسی قرار گرفته است:

اولین مسئله جریان دو بعدی ابرصوتی در ورودی یک کانال همگرا شونده است که در شکل (۱) میدان حل به همراه شبکه محاسباتی آن آورده شده است. در این شکل به علت تراکم



شکل ۸- توزیع ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در امتداد سطح در مسئله دوم



شکل ۵- نیمرخ سرعت در جهت x در مسئله دوم در مقطع x=0.91 m

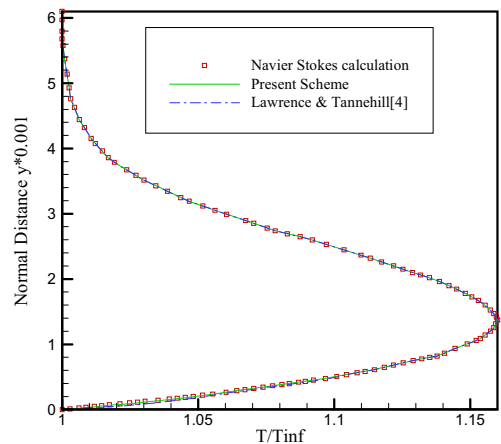
شده است. با مقایسه این اشکال ملاحظه می‌شود که در نواحی مرکزی کانال جوابهای روش "بیم-وارمینگ" علی‌رغم اضافه شدن عبارات هموار کننده (اتلاف مصنوعی) نوسان دارند در حالی که این مسئله در نتایج الگوریتم مورد بحث مشاهده نمی‌شود. در این مسئله به علت بالا بودن عدد ماخ ورودی و در نتیجه نزدیکی بیش از حد خط صوتی با دیواره های کانال و کوچک بودن ناحیه مادون صوت تفاوت چندانی بین نتایج به دست آمده از روش ارائه شده در این مقاله و روش "رو" ارائه شده در مرجع [۴] دیده نمی‌شود. تفاوت بین این دو روش در مثالهای بعدی مشخص می‌شود.

دومین مسئله جریان مافوق صوت حول یک صفحه تخت به طول ۱ متر است. شرایط این جریان عبارت است از:

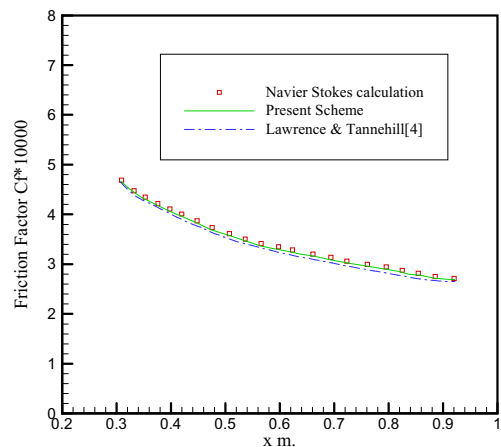
$$M_{\infty} = 2.0 \quad Re_{\infty} = 1.65 \times 10^6$$

$$T_{\infty} = T_w = 221.6^{\circ} K \quad Pr = 0.72$$

این مسئله نتایج حاصل از اعمال این الگوریتم با نتایج به دست آمده از روش "آپ ویند" ارائه شده در مرجع [۴] و همچنین نتایج یک حل کننده ناویر-استوکس موسوم به NSC2KE که بر اساس روش "رو" عمل می‌کند و جزئیات مربوط به آن در مرجع [۱۶] موجود است. در این مسئله برخلاف مثال ۱ ضخامت لایه صوتی قابل توجه بوده و تفاوت بین نتایج روش اصلاحی این مقاله و روش مرجع [۴] آشکار می‌شود. علاوه بر



شکل ۶- نیمرخ دما در جهت x در مسئله دوم در مقطع x=0.91 m



شکل ۷- توزیع ضریب اصطکاک در امتداد سطح در مسئله دوم روش مورد بحث در این مقاله و روش "بیم-وارمینگ" ترسیم



ضریب اصطکاک و ضریب انتقال گرمایی جابجایی که از معادلات زیر محاسبه می شوند، دقیقتر دیده می شود.

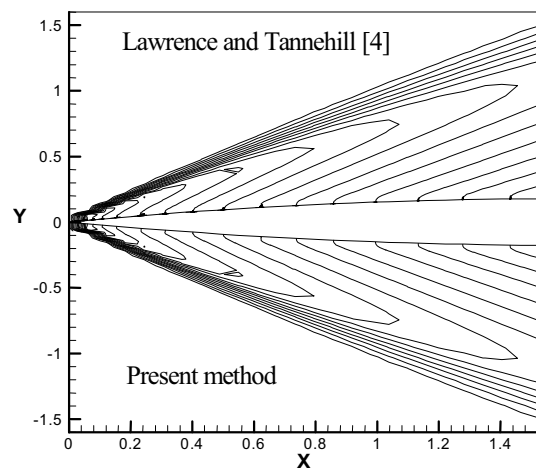
$$C_h = \frac{\mu_{wall}}{Re_\infty} \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2 + 1 - T_w} \frac{\partial T}{\partial y} \quad C_f = \frac{\mu_{wall}}{Re_\infty} \frac{\partial u}{\partial y}$$

در شکل (۷) توزیع ضریب اصطکاک و در شکل (۸) توزیع ضریب انتقال گرما در طول صفحه آورده شده است. در این اشکال تفاوت بین نتایج روش این مقاله و نتایج مرجع [۴] به وضوح آشکار است. علاوه بر آن ملاحظه می شود که نتایج این مقاله تطابق بهتری با نتایج ناویر-استوکس دارد.

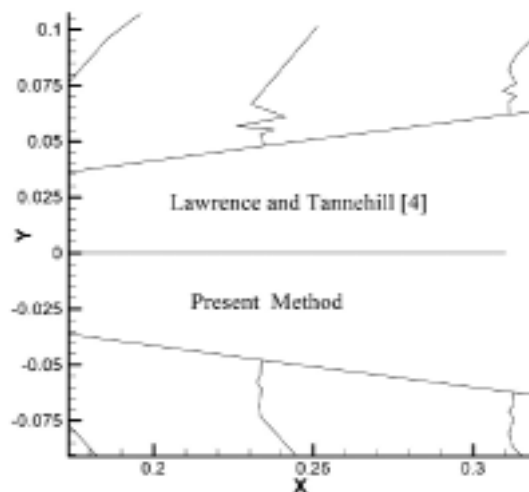
سومین مسئله جریان تقارن محوری حول یک "دماغه مماسی"<sup>۱۸</sup> است، شرایط مرزی و جریان آزاد آن چنین است:

$$M_\infty = 2.0 \quad Re_L = 14597 \quad \bar{T}_\infty = 216.407^\circ K \quad \bar{T}_w = 216.407^\circ K$$

طول جسم برابر با ۱/۶۲۵ متر است که طول مشخصه برای بی بعد سازی برابر این طول در نظر گرفته شده است ۵۰ سلول در جهت شعاعی در نظر گرفته شده است و برای ایجاد صفحه اطلاعات اولیه پیشروی با گامهای بسیار کوچک از نوک دماغه آغاز می شود و تا مقطع ۰/۰۵ متری از نوک ادامه پیدا می کند و از این مقطع با داشتن صفحه اطلاعات اولیه تا انتهای میدان پیشروی با ۵۰۰ گام ادامه پیدا می کند. لازم به ذکر است برای این مسئله با استفاده از شبکه ذکر شده نتایج مستقل از ابعاد شبکه بدست آمده است. در این مسئله به دلیل پایین بودن عدد ماخ، تفاوت روش "رو" ارائه شده در مرجع [۴] و روش ارائه شده در این مقاله کاملاً آشکار می شود. این موضوع در شکل (۹) نشان داده شده است در شکل (۹-الف) خطوط فشار ثابت دو روش مقایسه شده اند در ظاهر شکل متقارن است ولی جوابها یکسان است ولی با بررسی دقیقتر نتایج در مجاورت سطح جسم تفاوت آشکار می شود. در شکل (۹-ب) این تفاوت نشان داده شده است. همان طور که قبلاً ذکر شد به علت تغییر ناگهانی روش محاسبه شارهای غیر لزج در ناحیه زیر صوت و در ناحیه مافوق صوت، نتایج روش مرجع [۴] در مجاورت خط صوتی با نوسان توأم است و این در شرایطی است که در روش ارائه شده در این مقاله مشکل به حداقل رسیده است. در



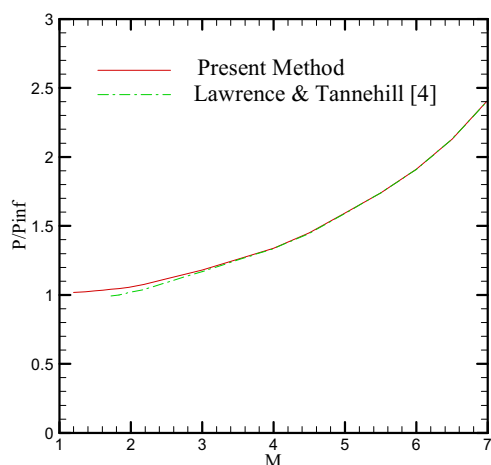
الف-



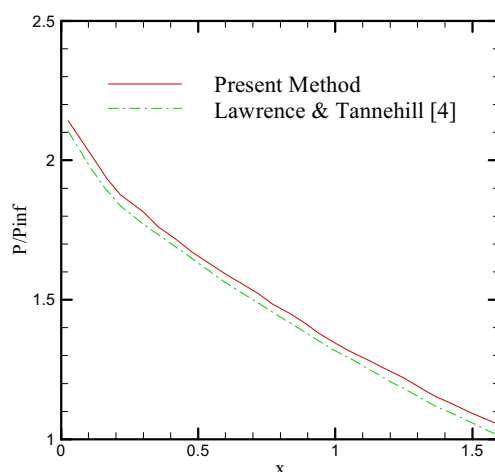
ب-

شکل ۹- خطوط فشار ثابت روی دماغه تقارن محوری در عدد ماخ ۲

آن مقایسه این نتایج با نتایج حل معادلات ناویر-استوکس نشان می دهد که نتایج روش اصلاحی تطابق بهتری با نتایج ناویر-استوکس دارد. این موضوع در شکل‌های (۵) تا (۸) نشان داده شده است. در شکل (۵) نیمرخ عرضی مولفه سرعت در جهت X در مقطع  $X = 0/91 \text{ m}$  و در شکل (۶) نیمرخ عرضی توزیع دما در این مقطع آورده شده است ملاحظه می شود که نتایج روش ارائه شده با نتایج روش مرجع [۴] در ناحیه زیر صوت جریان تفاوت دارند ولی نتایج روش این مقاله به نتایج ناویر-استوکس نزدیک تر است. همین روند در نتایج توزیع



شکل ۱۱- توزیع فشار در مسئله دوم بر حسب عدد ماخ جریان آزاد



شکل ۱۰- توزیع فشار در طول دماغه تقارن محوری در عدد ماخ ۲ در مسئله دوم

ارائه شد و با نتایج روشهای عددی دیگر مقایسه شد. در اعداد ماخ بالا به دلیل نزدیکی خط صوتی با سطح جسم تفاوت چندانی بین نتایج روش ارائه شده و روش "آپ ویند" مرجع [۴] مشاهده نمی شود ولی در اعداد ماخ پایین تفاوت دو روش آشکار می شود. در روش مرجع [۴] به علت تغییر در روند محاسبه شارهای غیر لزج نتایج با نوسان توام است و این نوسان در روش ارائه شده در این مقاله به حداقل رسیده است. علاوه بر آن با مقایسه نتایج دو روش حل مذکور با نتایج حل معادلات ناویر-استوکس ملاحظه می شود که نتایج روش ارائه شده در این مقاله تطابق بهتری با نتایج حل معادلات ناویر-استوکس از خود نشان می دهد.

شکل (۱۰) توزیع فشار روی سطح جسم در طول مربوط به روش ارائه شده و روش مرجع [۴] با یکدیگر مقایسه شده است این توزیع فشار برای عدد ماخ ۲ ترسیم شده است که البته با افزایش عدد ماخ اختلاف نتایج دو روش کاهش و با کاهش عدد ماخ این اختلاف افزایش پیدا می کند. این موضوع در شکل (۱۱) نشان داده شده است. در این شکل فشار روی سطح در مقطع انتهایی جسم بر حسب عدد ماخ ترسیم شده است در عدد ماخ ۱/۶ به پایین روش مرجع [۴] به علت نوسانات شدید قادر به حل مسئله نیست. در حالی که روش موجود قادر است تا عدد ماخ ۱/۲ این مسئله را حل کند.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش "آپ ویند" بر مبنای روش "رو"

## واژه نامه

- |                  |                      |                             |
|------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1-upwind         | 7- Killeen           | 13-Vigneron technique       |
| 2-Roe's method   | 8-McDonald           | 14-Southland                |
| 3-Beam&Warming   | 9-central difference | 15-Riemanian solver problem |
| 4-space marching | 10-shock waves       | 16-shock capturing          |
| 5-streamwise     | 11-time marching     | 17-thin layer Navier-Stokes |
| 6-Lindemach      | 12-conservative      | 18-Tangent Ogive            |

1. Schiff, L.B., and Steger, J. L., "Numerical Simulation of Steady of Steady Supersonic Viscous Flow," *AIAA Paper* 79-0130, January 1979.
2. Vigneron, Y. C., Rakich, J., V., and Tannehill, J., C., "Calculation of Supersonic Flow over Delta Wings with Sharp Subsonic Leading Edges," *AIAA Paper* 78-1137, July 1978.
۳. اصفهانیان، و هجران فر، ک. "شبییه سازی جریان تقارن محوری دائم، لزج و مافوق صوت با استفاده از معادلات سهموی شده ناویر-استوکس، چهارمین کنفرانس دینامیک شماره‌ها، دانشگاه تربیت مدرس، مهر ماه ۱۳۷۵.
4. Lawrence, S., L., Tannehill J. C., and Chausee D. S., "An Upwind Algorithm for the Parabolized Navier-Stokes Equations," *AIAA Paper* 86-1117, 1986.
5. Korte, J. J., and McRae, D. S., "Explicit Upwind Algorithm for the Parabolized Navier-Stokes Equations," *AIAA Paper* 88-0716, January 1988.
6. Korte, J. J., and McRae, D. S., "Numerical Simulation of Flow over a Hypersonic Aircraft Using an Explicit Upwind PNS Solver," *AIAA Paper* 89-1829, June 1989.
۷. میرزایی، م، خالقی، ح. و کریمیان، س. م. ح.، "روش آپ ویند در حل معادلات سهموی شده ناویر-استوکس"، پنجمین کنفرانس دینامیک شماره‌ها، دانشگاه فردوسی مشهد، ۳ تا ۵ شهریور ۱۳۷۷.
8. Lindemach, I., Killeen, J., "Alternating Direction Implicit Techniques for Two-Dimensional Magneto Hydrodynamics Calculations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 19, pp. 150-178, 1975.
9. McDonald., and Briley, W. R., "Three Dimensional Supersonic Flow of a Viscous or Inviscid Gas," *Journal of Computational Physics*, Vol.19, pp.150-178, October, 1975.
10. Beam, R. M., and Warming R. F., "An Implicit Factored Scheme for Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, Vol. 16, No.4, pp.393-402, 1978.
11. Miller, J., H., and Tannehill, J, C., "Computation of Supersonic Flows with Embedded Separated Regions Using an Efficient PNS Algorithm," *AIAA Paper* 97-1942, 1997
12. Miller, J., H., and Tannehill, J, C., "PNS Algorithm for Solving Supersonic Flows with Upstream Influences," *AIAA Paper* 98-0226, 1998.
13. Roe, P., L, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol.43, pp.357-372, 1981.
14. Powell, K. G., "Toward A Genuinely Multi-Dimensional Upwind Scheme", Presented at the Lecture Series "Computational Fluid Dynamics" at Von Karman Institute for Fluid Dynamics, March 1990.
15. Anderson, D. A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R., H., *Computational Methods in Fluid Flow and Heat Transfer*, McGraw Hill Book Company, New York, 1997.
16. Chakravarthy, S.R., and Szema, K.Y., "An Euler Solver for Three-Dimensional Supersonic Flow With Subsonic Pockets," *AIAA Paper* 85-1703, July, 1985.
17. Gielda and D. McRae, "An Accurate, Stable, Explicit, Parabolized Navier-Stokes Solver For High Speed Flows," *AIAA Paper* 86-1116, May 1986.
18. Mohammadi, B., "Fluid Dynamics Computation with NSC2KE, a User-Guide, Release 1.0", INSTITUT National De Recherche Informatique ET En Automatique, 1994.