ارائه مدلی جدید در سیستمهای کنترل تولید و موجودی برای اقلام فاسد شدنی با تقاضای وابسته به قیمت محصول، ارزش زمانی پول و مجاز بودن کمبود

مسعود ربانی*، رضا توکلی مقدم* و هاشم وحدانی**
گروه مهندسی صنایع، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران
دانشکدهٔ مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت مقاله: ۸۴/۷/۱۹– دریافت نسخه نهایی: ۸۷/۸/۲۶)

چکیده – در این مقاله، رویکردی جدید برای حل مدل موجودی برای اقلام فاسد شدنی با جریان نقدی تنزیل یافته ارائه شده است. اقلام تولیدی با نرخی متغیر با زمان که از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند، دچار خرابی می‌شوند. در این مدل موجودی، دو نوع کمبود یعنی تقاضای پس افت[1] و فروش از دست رفته[2] در نظر گرفته شده که در این حالت تقاضا برای اقلام تولیدی با نرخی متغیر، که تابعی از زمان است دچار پس افت می‌شود. در حالت کلی تقاضا تابعی خطی و نزولی از قیمت محصول است. هدف از مدل موجودی ارائه شده، تعیین سیاست بهینه قیمت‌گذاری محصول و طول مدت تولید در یک سیکل کامل است به‌طوری که ارزش فعلی کل سود حاصله در طی افق برنامه‌ریزی محدود، بیشینه شود. در انتها مثال عددی برای حل مدل موجودی با استفاده از رویکرد ابتکاری پیشنهادی به‌صورت سه مرحله‌ای ارائه شده است.

واژگان کلیدی : ارزش زمانی پول، تقاضای پس افت، فروش از دست رفته، ارزش فعلی سود

A New Inventory Model for Deteriorating Items with Price-dependent Demand, Time-value of money, and Shortages

M. Rabbani, R. Tavakkoli-Moghaddam, and H. Vahdani

Department of Industrial Engineering, College of Engineering, University of Tehran
Department of Industrial Engineering, Sharif University of Technology

Abstract: ***This paper presents a discounted cash-flow approach to an inventory model for deteriorating items with the two-parameter Weibull distribution. According to our proposed model, two shortages are considered: back-orders and lost-sales,***

* – دانشیار
** – دانشجوی دکتری

in which the back-order rate is a varying function of the time when the shortage happens. In general, the demand rate is a linear function of the selling price. The objective of this model is to determine the optimal pricing policy and the optimal throughput time in such a way that the total net present value of profits is maximized in the given planning horizon. Finally, a numerical example is provided to solve the model presented using our proposed three-stage approach.

Keywords: *Time-value of money, Back-order demand, Lost-sales, Present value of profits.*

۱- مقدمه

در مدلهای سنتی کنترل موجودی، فاکتورهایی از قبیل ارزش زمانی پول، تورم و خرابی محصولات در طول مدت نگهداری و حمل و نقل درون کارخانه‌ای وارد مدل نمی‌شدند. در شرایط واقعی عواملی همچون فرصتهای سرمایه‌گذاری از دست رفته به علت سرمایه درگیر در موجودیها، خرابی و فاسد شدن محصولات به دلایل پیش بینی نشده و یا ساختاری و غیره توجه خاص به این فاکتورها را الزامی می‌کند. به طور خاص می‌توان به محصولاتی از قبیل مواد دارویی و محصولات لبنی و غیره به عنوان محصولاتی که مدل قابل اعمال بر روی آنهاست، اشاره کرد.

از لحاظ پیشینه تاریخی، گر و شرادر [۱] اولین بار مسئله فاسد شدن محصولات را برای مسایل کنترل موجودی ارائه کرده‌اند. بعد از آن ایلون و مالایا [۲] مدل فوق را گسترش داده و تقاضای وابسته به قیمت محصول را مطرح کرده‌اند. کوهن [۳] مدلی برای سیستم موجودی با در نظر گرفتن کمبود برای اقلام فاسد شدنی با نرخ خرابی که از توزیع نمایی پیروی می‌کند، ارائه داده است. کنگ و کیم [۴] مدل کوهن را گسترش داده‌اند و سیستم موجودی با نرخ تولید محدود و بدون در نظر گرفتن کمبود را مدل کرده‌اند. اگراوال و جگی [۵] در مقاله خود به وجود یک نقص در مدل کوهن اشاره کرده و روش ساده‌تری را برای محاسبه قیمت محصول و سیاست تولیدی بهینه ارائه داده‌اند. بعد از آن وی [۶] مدل فوق را برای اقلام فاسد شدنی که نرخ خرابی آنها از یک توزیع ویبول پیروی می‌کرد، ارائه داده‌اند. بوزاکات [۷] اولین کسی بود که مفهوم تورم را وارد مدلهای کنترل موجودی کرد. میزرا [۸] به‌طور همزمان تاثیر تورم و ارزش زمانی پول را در هر دو حالت نرخ تورم داخلی و خارجی بررسی و تاثیر نرخ بهره و نرخ تورم بر روی استراتژی بهینه تولید را نشان داد. چندرا و بهنار [۹] مدل میزرا را گسترش داده و اثر وجود کمبود در سیستم موجودی را بررسی کرده‌اند. سارکر و پن [۱۰] مدلی جدید برای سیستم تولیدی با نرخ تولید محدود و مجاز بودن کمبود ارائه داده‌اند.

چانگ [۱۱] الگوریتمی جدید را برای حل مدل ارائه شده در سیستم موجودی با نرخ تولید محدود و افق برنامه‌ریزی نامحدود ارائه داده است. داتا و پال [۱۲] تاثیرات تورم وارزش زمانی پول در مدل موجودی با نرخ تقاضای خطی وابسته به زمان و مجاز بودن کمبود در سیستم را بررسی کرده‌اند. هاریگا [۱۳] مدل داتا و پال را گسترش داده و تابع نرخ تقاضای نزولی و پریودهای متغیر تولیدی را وارد مدل کرد. تنگ و چنگ [۱۴] مدلی را برای تعیین سیاست بهینه تولید اقلام فاسد شدنی در شرایطی که تقاضا همزمان تابعی از قیمت محصول و سطح موجودی در دست باشد، ارائه کرده‌اند.

جولای و همکاران [۱۵] سیاست بهینه تولید را برای اقلام فاسد شدنی که تابع تقاضای آنها وابسته به سطح موجودی بوده و تابع عمر محصولات از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند، با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول ارائه داده‌اند. در مدل ایشان میزان تقاضای پس‌افت در دوره کمبود به‌صورت درصد ثابتی از کل تقاضای وارده که طبق فرضیات مدل در طی این دوره نرخ ثابتی نیز دارد، محاسبه شده است. وی و لا [۱۶] مدل موجودی برای سیستمی با نرخ تقاضای وابسته به قیمت محصول برای اقلام فاسد شدنی که نرخ خرابی آنها از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند و کمبود یعنی تقاضای پس افت مجاز است، با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول ارائه داده‌اند. مقالات متعدد دیگری نیز در سالهای اخیر در مجلات معتبر داخلی و خارجی پیرامون

موضوع مورد بحث به چاپ رسیده است که به علت تعدد بسیار آنها به ذکر موارد فوق بسنده کرده و تمرکز بحث را بر روی مدل اصلی تحت بررسی قرار می‌دهیم.

مبنای اصلی این مقاله، مدل ارائه شده توسط وی و لا [۱۶] است. مشخصه اصلی مدل ارائه شده در این مقاله که به وضوح آن را از مدل ایشان و همچنین مدل جولای و همکاران [۱۵] متمایز می‌سازد، در نظر گرفتن همزمان دو نوع کمبود یعنی تقاضای پس افت و فروش از دست رفته با اعمال نرخ موثر تقاضای پس افت است که تابعی متغیر از زمان در نظر گرفته شده و بر تابع تقاضا اثر می‌کند است. ضمن اینکه تعیین سیاست بهینه قیمت‌گذاری نیز این مقاله را از مقالات دیگر متمایز می‌کند.

در این مقاله، از رویکرد جریان نقدی تنزیل‌یافته[۳] برای اعمال ارزش زمانی پول درمدل ارائه شده برای سیستم تولید و موجودی با مشخصات زیر استفاده شده است:

۱- اقلام تولیدی فاسد شدنی بوده و تابع چگالی عمر محصولات از توزیع ویبول با پارامترهای α,β پیروی می‌کند.

۲- دو نوع کمبود، تقاضای پس افت و فروش از دست رفته، مجاز است. نرخ تقاضای پس افت به‌صورت تابعی از زمان که بر نرخ تقاضا اثر می‌گذارد، در نظر گرفته شده است.

۳- تقاضا به‌صورت تابعی نزولی و خطی از قیمت فروش محصول در نظر گرفته شده است.

تابع هدف مسئله به‌صورت حداکثر کردن ارزش فعلی سود است. تمامی فاکتورهای موثر در تابع سود با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول در تابع هدف وارد شده‌اند.

۲- توسعه مدل ریاضی

۲-۱- مفروضات مدل

مدل ریاضی ارائه شده در مدل بر اساس مفروضات زیر بنا نهاده شده است:

۱- افق برنامه‌ریزی محدود است.

۲- زمان تا خرابی محصولات از یک توزیع ویبول با پارامترهای α,β پیروی می‌کند.

۳- ارزش زمانی پول درمدل لحاظ شده است.

۴- هر دو نوع کمبود (یعنی تقاضای پس افت و فروش از دست رفته) مجاز است.

۵- هیچ گونه جایگزینی یا دوباره کاری بر روی محصولات خراب و فاسد شده صورت نمی‌گیرد.

۶- مرکب شدن به‌صورت پیوسته صورت می‌گیرد.

۷- نرخ تقاضا تابعی خطی و نزولی از قیمت محصول می‌باشد.

۸- نرخ تولید محدود و ثابت بوده و بزرگتر از نرخ تقاضاست.

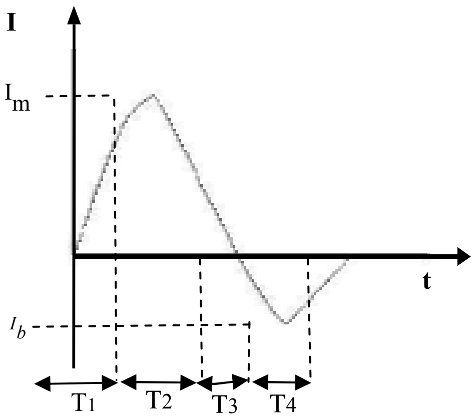
۹- مقدار تولید، سطح موجودی، پریودهای مختلف زمانی تشکیل دهنده هر سیکل و میزان تقاضا هر یک متغیرهای پیوسته در نظر گرفته شده‌اند و فقط تعداد سیکلهای تولیدی در افق برنامه‌ریزی عدد صحیح است.

۱۰- مبادله کالا با پول به‌صورت آنی صورت می‌گیرد.

۲-۲- معرفی پارامترهای به‌کاررفته در مدل

برای سهولت در فهم مطالب، نمای کلی از وضعیت تغییرات سطوح موجودی در یک سیکل تولیدی، در قالب شکل (۱) ارائه شده است:

در پریود T1 در هر سیکل، تولید تا رسیدن به حداکثر سطح موجودی صورت می‌گیرد و تقاضا براورده می‌شود و عامل فاسد شدن نیز بر روی موجودیها تاثیر می‌گذارد. پارامتر زمان در این فاصله با t_1 نشان داده شده است. در فاصلهٔ T2 در هر سیکل، تولید متوقف بوده و سطح موجودی‌ها کاهش یافته (بنا به تقاضا و نرخ خرابی) و این کاهش تا زمان T1+T2 در هر سیکل ادامه می‌یابد تا سطح موجودیها به صفر برسد. از این لحظه به بعد یعنی در فاصله زمانی T3 سطح موجودی منفی شده و دچار کمبود می‌شویم. البته شیب لحظه‌ای نمودار در این قسمت کمتر از نرخ تقاضای رسیده به کارخانه است چرا که



شکل ۱- تغییرات سطح موجودی در یک سیکل کامل تولیدی

قسمتی از تقاضا در این قسمت بنا بـه حالـت فـروش از دسـت رفته از سیستم حذف می‌شود. مقدار تقاضای پس افت با نرخـی که تابعی از زمان است و بر تقاضای محصول اعمـال مـی‌شـود، قابل محاسبه است. در لحظهٔ T1+T2+T3 در هر سیکل تولیدی، دوباره آماده‌سازی صورت گرفته و تولید بـرای مرتفـع سـاختن تقاضای پس افت و تقاضـای رسـیده صـورت مـی‌گیـرد تـا در انتهای این پریود سطح موجودی به صفر می‌رسد و از اینجـا بـه بعد سیکل جدید آغاز می‌شود.

لازم به ذکر است که در پریود T4، دیگر با فروش از دسـت رفته مواجه نیستیم چرا که بنا به سیاست اتخـاذ شـده بـر آوردن تقاضا و عدم مطلوبیت کمبود از نوع فـروش از دسـت رفتـه بـا توجـه بـه تـاثیر منفـی آن در موقعیـت رقـابتی موسـسه، ابتـدا تقاضاهای جدید براورده می‌شوند. حال بـه معرفـی پارامترهـای به‌کار رفته در مدل می‌پردازیم:

d(s) : نرخ تقاضا که تـابعی نزولـی از قیمـت فـروش محـصول است:

$d(s) = g - hs$

g,h : پارامترهای ثابت و مثبت بوده و بنا بـه شـرایط حـاکم بـر بازار و به‌صورت تجربی قابل محاسبه‌اند. همچنـین بایـد رابطـه زیر برقرار باشد:

$g\text{-}hs > 0$ یا $s < g/h$

C : هزینه هر واحد از محصول تولیدی در زمان $t = 0$

S : قیمت فروش هر واحد در زمان $t = 0$

P : نرخ تولید $(P > d(s))$

$I_j(t_j)$: سطح موجودی در زمان t_j در پریود j ام

H : افق برنامه‌ریزی

T : سیکل تولیدی

N : تعداد سیکلهای تولیدی در افق برنامه‌ریزی $(N = H/T)$

$T_1 + T_2$: طول پریودی از هر سیکل که سطح موجـودی در آن مثبت است

$T_3 + T_4$: طـول پریـودی از هـر سـیکل کـه در آن بـا کمبـود مواجه‌ایم

r : مقدار ثابتی که نشان دهنده اختلاف بین نـرخ تنزیـل و نـرخ تورم است

I_m : حداکثر سطح موجودی

I_b : حداکثر مقدار کمبود

C_1 : هزینه آماده‌سازی در زمان $t = 0$

C_2 : هزینه نگهداری هر واحد محصول در واحد زمان در زمـان $t = 0$

C_3 : هزینه هر واحد تقاضای پس افت در واحد زمان در زمـان $t = 0$

C_4 : هزینه هر واحد تقاضای ازدست رفته در زمان $t = 0$

z(t) : نرخ آنی خرابی

k : نرخ تقاضای پس افت که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = \frac{1}{1+\gamma(T_3 - t_3)}$$

γ یک مقدار ثابت ومثبت است. بدین ترتیب هر چه در پریود T_3 جلوتر می‌رویم، با افزایش t_3 نرخ فوق افزایش می‌یابد که کاملاً نشان دهندهٔ شرایط حاکم بر دنیای واقعی است، چراکه با نزدیک شدن به پریود T_4 که بازه تولیدی است، تقاضاهای رسیده، به میزان بیشتری پذیرفته می‌شوند و بر روی نظر مشتریان نیز در انتخاب شرکت به عنوان تامین کننده تاثیر مثبت دارد.

۲-۳- ارائه مدل ریاضی

در ابتدا به محاسبهٔ نرخ آنی خرابی می‌پردازیم. اگر $f(t)$ تابع چگالی احتمال عمر محصول باشد که طبق تعریف از توزیع ویبول با پارامترهای β , α برخوردار است، آنگاه نرخ آنی خرابی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

$F(t)$: تابع توزیع تجمعی عمر محصول

تابع چگالی ویبول به‌صورت زیر است:

$$f(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}} \qquad \alpha, \beta > 0 \ , \ t > 0 \qquad (۲)$$

α , β به ترتیب پارامترهای مقیاس و شکل توزیع ویبول هستند. باید توجه داشت که با قرار دادن $\beta = 1$، چگالی توزیع نمایی که کاربرد بسیار زیادی نیز در زمینهٔ تقریب زدن طول عمر محصولات مختلف دارد، به‌دست می‌آید. برای چگالی احتمال ویبول داریم:

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t^{\beta}} \qquad (۳)$$

لذا نرخ آنی خرابی برابر خواهد بود با:

$$Z(t) = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}}}{e^{-\alpha t^{\beta}}} = \alpha\beta t^{\beta-1} \qquad (۴)$$

حال بعد از معرفی پارامترهای فوق، می‌توانیم تغییرات سیستم موجودی با گذشت زمان را در قالب معادلات دیفرانسیل مربوطه، نشان دهیم. در لحظه $t = 0$ اولین آماده‌سازی صورت می‌گیرد. در این لحظه موجودی در دست صفر است. در پریود T_1سطح موجودی تحت تاثیر نرخهای تولید، تقاضا و خرابی قرار داشته و افزایش می‌یابد تا به بیشترین حد خود (I_m) می‌رسد. در پریود زمانی T_2 تولید متوقف و سطح موجودی تحت تاثیر نرخ تقاضا و نرخ خرابی کاهش می‌یابد تا به زمان $t = T_1 + T_2$ می‌رسد که سطح موجودی در آن صفر است. در پریود زمانیT_3، مقادیر کمبود شروع و تقاضای پس افت افزایش می‌یابد تا به زمان $t = T_1 + T_2 + T_3$ که مقدار کمبود در بالاترین سطح قرار دارد می‌رسد. در ابتدای پریود زمانی T_4مجدداً آماده‌سازی صورت گرفته و تولید آغاز می‌شود و به تقاضای پس افت و تقاضای رسیده، رسیدگی می‌شود. این مراحل در قالب معادلات دیفرانسیل زیر معرفی شده‌اند:

$$\frac{dI_1(t_1)}{dt_1} = P - [d(s) + \alpha\beta t_1^{\beta-1} I_1(t_1)] \qquad 0 \le t_1 \le T_1 \qquad (۵)$$

$$\frac{dI_2(t_2)}{dt_2} = -[d(s) + \alpha\beta t_2^{\beta-1} I_2(t_2)] \qquad 0 \le t_2 \le T_2 \qquad (۶)$$

$$\frac{dI_3(t_3)}{dt_3} = -[\frac{d(s)}{1+\gamma(T_3 - t_3)}] \qquad 0 \le t_3 \le T_3 \qquad (۷)$$

$$\frac{dI_4(t_4)}{dt_4} = P - d(s) \qquad 0 \le t_4 \le T_4 \qquad (۸)$$

با کمک شرایط مرزی زیر معادلات فوق را می‌توان حل کرد:

$$I_1(0) = 0$$

$$I_2(0) = I_m$$

$$I_3(0) = 0$$

$$I_4(0) = -I_b$$

بدین ترتیب با در اختیار داشتن معادلات $I_i(t_1)$ قادر خواهیم بود تمامی فاکتورهای موثر بر تابع سود شامل درامد حاصل از فروش و هزینه‌های موجودی را محاسبه کنیم. نتایج زیر از حل معادلات فوق حاصل می‌شود:

$$I_1(t_1) = \frac{\int_0^{t_1} [P - d(s)] e^{\alpha u^{\beta}} du}{e^{\alpha t_1^{\beta}}} \qquad 0 \le t_1 \le T_1 \qquad (۹)$$

$$I_2(t_2) = \frac{I_m - d(s) \int_0^{t_2} e^{\alpha u^{\beta}} du}{e^{\alpha t_2^{\beta}}} \qquad 0 \le t_2 \le T_2 \qquad (۱۰)$$

$$I_3(t_3) = \frac{d(s)}{\gamma} Ln(\frac{1+\gamma(T_3 - t_3)}{1+\gamma T_3}) \qquad 0 \le t_3 \le T_3 \qquad (۱۱)$$

$$I_4(t_4) = [P - d(s)] t_4 - I_b \qquad 0 \le t_4 \le T_4 \qquad (۱۲)$$

حال به کمک معادله (۱۰) می‌توانیم حداکثر سطح موجودی را محاسبه کنیم:

$$I_m = d(s)\int_0^{T_2} e^{\alpha u^{\beta}}du = d(s)\int_0^{T_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n u^{n\beta}}{n!} = d(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n T_2^{n\beta+1}}{n!(n\beta+1)} \qquad (۱۳)$$

با فرض اینکه α مقدار کوچکی باشد، می‌توان از جملات با توان ۲ و بالاتر شامل α در معادلهٔ فوق صرف‌نظر کرد. لذا خواهیم داشت:

$$I_m = d(s)\left(T_2 + \frac{\alpha T_2^{\beta+1}}{\beta+1}\right) \qquad (۱۴)$$

به همین صورت با استفاده از معادلهٔ (۱۱) حداکثر مقدار کمبود برابر خواهد بود با:

$$I_3(t_3) = -I_b = \frac{d(s)}{\gamma}Ln\left(\frac{1}{1+\gamma T_3}\right)$$
$$I_b = \frac{d(s)}{\gamma}Ln\left(1+\gamma T_3\right) \qquad (۱۵)$$

حال به محاسبه تک تک عوامل تشکیل دهنده تابع سود نهایی که همان تابع هدف مسئله است، می‌پردازیم:

۲-۳-۱- ارزش فعلی درامد حاصل از فروش

تولید انجام شده در پریود T_1 به دلیل تقاضا و خرابی در پریود T_1 و T_2 مصرف می‌شود.در پریود T_4 نیز تمام محصولات تولیدی برای براورده سازی تقاضای رسیده و تقاضای پس افت، مصرف می‌شود. با فرض اینکه درامدهای حاصل از فروش به‌صورت آنی قابل‌حصول باشد، ارزش فعلی درامد حاصل از فروش برابر است با:

$$R = S\left\{\int_0^{T_1} d(s)e^{-rt_1}dt_1 + \int_0^{T_2} d(s)e^{-r(T_1+t_2)}dt_2 + \int_0^{T_4} Pe^{-r(T_1+T_2+T_3+t_4)}dt_4\right\}$$
$$= \frac{S}{r}\left\{d(s) - e^{-r(T_1+T_2)}d(s) - Pe^{-r(T_1+T_2+T_3+T_4)} + Pe^{-r(T_1+T_2+T_3+T_4)}\right\}$$
(۱۶)

با فرض اینکه r مقدار کوچکی باشد، می‌توانیم جواب تقریبی زیر را با صرف‌نظر کردن از جملاتی که درجه r در آنها ۲ و بالاتر است، به‌دست آوریم:

$$R \cong \frac{S}{2}(2d(s)T_2 - d(s)rT_2^2 - 2PrT_2T_4 + 2d(s)T_1 - d(s)rT_1^2 + 2PT_4 - PrT_4^2 - 2d(s)rT_1T_2 - 2PrT_1T_4 - 2PrT_3T_4) \qquad (۱۷)$$

۲-۳-۲- ارزش فعلی هزینه‌های آماده سازی

در ابتدای سیکل اول،یک آماده سازی با هزینه C_1 صورت می‌گیرد و آماده‌سازی بعدی در زمان $t = T_1 + T_2 + T_3$ با همان هزینه C_1 رخ می‌دهد. از اینجا به بعد سایر زمانهای آماده‌سازی عبارت‌اند از:

$t = T_1 + T_2 + T_3 + i\times T\ ,\ i= 1, 2, \dots, N-1$

X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = c_1e^{-r(T_1+T_2+T_3)} \qquad (۱۸)$$

همانند قسمت قبل با فرض کوچک بودن r، مقدار تقریبی x برابر خواهد بود با:

$$X \cong C_1\left[1-r(T_1+T_2+T_3)\right] \qquad (۱۹)$$

لذا ارزش فعلی کل هزینه‌های آماده‌سازی برا بر است با:

$$C_s = C_1 + \sum_{i=0}^{N-1}Xe^{-r(iT)} \qquad (۲۰)$$

۲-۳-۳- ارزش فعلی هزینه‌های نگهداری محصولات

در پریودهای T_1 و T_2 که سطح موجودی مثبت است، متحمل هزینه‌های نگهداری می‌شویم که پارامترهای مختلفی از جمله هزینه بیمه، سرمایه درگیر، هزینه‌های انبارداری و غیره را در بر می‌گیرد. ارزش فعلی هزینه‌های نگهداری برابر است با:

$$C_H = C_2\left\{\int_0^{T_1} I_1(t_1)\,e^{-rt_1}dt_1 + \int_0^{T_2} I_2(t_2)\,e^{-r(T_1+t_2)}dt_2\right\}$$
$$= C_2\int_0^{T_1}\left(\frac{\int_0^{t_1}[P-d(s)]\,e^{\alpha u^{\beta}}du}{e^{\alpha t_1^{\beta}}}\right)e^{-rt_1}dt_1 + C_2\int_0^{T_2}\left(\frac{\int_0^{T_2}d(s)\,e^{\alpha u^{\beta}}du - \int_0^{t_2}d(s)\,e^{\alpha u^{\beta}}du}{e^{\alpha t_2^{\beta}}}\right)e^{-r(T_1+t_2)}dt_2$$
(۲۱)

با فرض کوچک بودن مقادیر α و r با صرف‌نظرکردن از جملات با توانهای ۲ و بزرگتر و همچنین جملاتی که شامل عبارتی بر

حسب حاصل ضرب α و r هستند، عبارت زیر حاصل خواهد شد:

$$C_H = C_2\left[P-d(s)\right]\left[\frac{T_1^2}{2}-\frac{rT_1^3}{3}-\frac{\alpha\beta T_1^{\beta+1}}{(\beta+1)(\beta+2)}\right] + C_2 d(s)\left[\frac{T_2^2(1-rT_1)}{2}-\frac{rT_2^3}{6}+\frac{\alpha\beta T_2^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)}\right] \quad (۲۲)$$

۲-۳-۴- ارزش فعلی هزینه‌های کمبود

در پریود زمانی T_3 و T_4 سیستم با کمبود مواجه می‌شود. در پریود T_3 هزینه‌های کمبود شامل هزینه‌های ناشی از تقاضای پس افت و فروش از دست رفته است ولی در پریود T_4 فقط شامل هزینه تقاضای پس افت است. نحوهٔ محاسبه این هزینه‌ها به‌صورت مشروح در زیر ارائه شده است:

۲-۳-۴-۱- هزینه تقاضای پس افت

$$C_{Sh_1} = C_3\left\{\int_0^{T_3} -I_3(t_3)\, e^{-r(T_1+T_2+t_3)}dt_3 + \int_0^{T_4} -I_4(t_4)\, e^{-r(T_1+T_2+T_3+t_4)}dt_4\right\}$$

$$= C_3\left\{\int_0^{T_3} -\frac{d(s)}{\gamma}\, Ln\left(\frac{1+\gamma\,(T_3-t_3)}{1+\gamma\, T_3}\right)e^{-r(T_1+T_2+t_3)}dt_3 + \int_0^{T_4} -\frac{d(s)}{\gamma}\big(P-d(s)\big)\,(T_4-t_4)e^{-r(T_1+T_2+T_3+t_4)}dt_4\right\} \quad (۲۳)$$

با حل معادلات فوق نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$C_{sh_1} = \frac{-C_3 d(s)}{r\gamma}e^{-r(T_1+T_2+T_3)}\Big(-\ln\big(\frac{1}{1+\gamma T_3}\big) + e^{\frac{-r}{\gamma}}\big(rT_3\ln(1+\gamma T_3)\big) + \frac{r^2}{4\gamma^2}(-\gamma^2T_3^2-2\gamma T_3) + \frac{r^3}{18\gamma^3}(1-(1+\gamma T_3)^3)\Big)) + \ldots + C_3(P-d(s))\Big(\frac{e^{-r(T_1+T_2+T_3+T_4)}}{r^2}+\frac{T_4}{r}e^{-r(T_1+T_2+T_3)} - \frac{1}{r^2}e^{-r(T_1+T_2+T_3)}\Big) \quad (۲۴)$$

۲-۳-۴-۲- هزینه فروش از دست رفته

$$C_{sh_2} = C_4\int_0^{T_3}\frac{\gamma(T_3-t_3)d(s)}{1+\gamma(T_3-t_3)}e^{-r(T_1+T_2+t_3)}dt_3$$

$$= C_4 d(s)e^{-r(T_1+T_2+T_3+\frac{1}{\gamma})}\times \Big[-\frac{1}{\gamma}-\frac{T_3 r}{\gamma}-\frac{T_3^2 r}{2}+\frac{r^2}{12\gamma^3}+\frac{r^3}{72\gamma^4}+\frac{r^4}{480\gamma^5}+\ldots + \ln(1+\gamma T_3)\times(T_3-\frac{1+\gamma T_3}{\gamma}) + (\frac{1+\gamma T_3}{\gamma})(T_3 r+1) + (1+\gamma T_3)^2\frac{r^2}{4\gamma^2} + (\frac{r}{18\gamma}-\frac{1}{12\gamma})(1+\gamma T_3)^3(\frac{r}{\gamma})^2+\ldots\ldots)\Big] \quad (۲۵)$$

۲-۳-۵- ارزش فعلی هزینه اقلام تولیدی

اقلام تولیدی در پریودهای T_1 و T_4، صرف تقاضای رسیده در پریود T_1 و T_2 و تقاضای پس افت و رسیده در پریود T_3 و T_4 می‌شود. از این رو هزینه اقلام شامل اقلام فروش رفته و فاسد شده است. بدین ترتیب هزینه اقلام در طی یک سیکل برابر خواهد بود با:

$$C_p = CPT_1 + CPT_4e^{-r(T_1+T_2+T_3)} \quad (۲۶)$$

همانند قسمتهای قبل به ازای مقادیر کوچک r خواهیم داشت:

$$C_p = CPT_1 + CPT_4\left[1-r(T_1+T_2+T_3)\right] \quad (۲۷)$$

۳- محاسبه ارزش فعلی سود خالص

افق برنامه‌ریزی مدنظر از N سیکل تولیدی تشکیل شده است. با توجه به اینکه در ابتدای سیکل اول، موجودی صفر است، یک آماده سازی با هزینه C_1 صورت می‌گیرد که هزینه آن را باید از درامدهای خالص کم کرد. نهایتاً افق برنامه‌ریزی شامل N+1 آماده سازی است که به ازای هر کدام از آنها یک دسته تولیدی خواهیم داشت. اندازه دسته تولیدی اول PT_1 و اندازه دسته تولیدی دوم تا N ام برابر $P(T_4+T_1)$ خواهد بود. اندازه دسته تولیدی آخر نیز PT_4 است. حال با در اختیار داشتن مولفه‌هایی که محاسبه کردیم قادریم تابع سود نهایی (NP_T) را به‌دست آوریم. توضیح اینکه مقادیر فوق را باید به ازای N

پریود وبا در نظر گرفتن ارزش زمانی پول، در تابع هدف واردکرد. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$NP_T = \left(R-X-C_H-C_P-C_{sh_1}-C_{sh_2}\right)\sum_{i=0}^{N} e^{irT} - C_1$$
$$= \left(R-X-C_H-C_P-C_{sh_1}-C_{sh_2}\right)\left(\frac{1-e^{-rNT}}{1-e^{-rT}}\right) - C_1 \qquad (۲۸)$$

تابع فوق از متغیرهای S, N, T4, T3 ,T2, T1 تشکیل شده است و به وضوح از پیچیدگی بالایی نیز برخوردار است. بی‌شک حل تحلیلی چنین معادله‌ای بر اساس شش متغیر فوق ناممکن است. لذا باید به دنبال آن باشیم که به نحوی تعداد متغیرها را با کمک برخی روابط کمکی کاهش دهیم. در این راستا از روابط حدی که در حل معادلات دیفرانسیل از آنها استفاده کردیم، بهره می‌بریم. با کمک معادلات (۹) و (۱۰) و دانستن این مطلب که:

$$I_1(T_1) = I_2(T_2) = I_m$$

داریم:

$$\frac{\int_0^{T_1}\left[P-d(s)\right]e^{\alpha u^\beta}du}{e^{\alpha T_1^\beta}} = \int_0^{T_2} d(s)e^{\alpha u^\beta}du \qquad (۲۹)$$

جواب تقریبی معادله (۲۹) که از حذف جملات درجه ۲ و بالاتر بر حسب آلفا به‌دست می‌آید، برابر خواهد بود با:

$$\left(P-d(s)\right)\left(T_1-\frac{\alpha\beta T_1^{\beta+1}}{\beta+1}\right) \cong d(s)\left(T_2+\frac{\alpha T_2^{\beta+1}}{\beta+1}\right) \qquad (۳۰)$$

حل معادله (۳۰) به‌صورت تحلیلی بسیار مشکل است. لذا برای سهولت و امکانپذیری حل مسئله، از جمله $\frac{\alpha\beta T_1^{\beta+1}}{\beta+1}$ در طرف چپ معادله (۳۰) بالا صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$T_1 \cong \frac{d(s)}{P-d(s)}\left(T_2+\frac{\alpha T_2^{\beta+1}}{\beta+1}\right) \qquad (۳۱)$$

بدین ترتیب متغیر T_1 از معادلات حذف می‌شود. به روش مشابه قادر خواهیم بود متغیرهای T_4 و T_4 را نیز به‌صورت توابعی از T_2 به‌دست آوریم. برای این منظور از معادلات زیر استفاده می‌کنیم:

$$T_3 + T_4 = T - T_1 - T_2 \qquad (۳۲)$$

$$I_b = \left[P-d(s)\right] T_4 = \frac{d(s)}{\gamma} Ln(1+\gamma T_3) \qquad (۳۳)$$

برای حل همزمان معادلات(۳۲) و (۳۳) به‌منظور حذف متغیرهای T_3 و T_4 از معادلات، با توجه به پیچیدگی معادله (۳۳) از نرم افزار MATLAB استفاده شده است. جوابهای حاصل در برنامه‌ای که به منظور حل تابع هدف نهایی تدوین شده است، به‌کاررفته که با توجه به پیچیدگی معادلات از آوردن آنها در این قسمت خودداری می‌کنیم. مقدار متغیر T نیز از معادله T=H/N قابل جایگزینی در تابع هدف اصلی است. بدین ترتیب تابع هدف، تابعی از ۳ متغیر N , S و T_2 به‌صورت زیر خواهد بود:

Maximize $NP_T(S, T_2, N)$
s.t.
$C < S < g/h$
$0 \le T_2 < T$

۴- بررسی و حل مدل

تابع هدف مسئله به‌صورت حداکثر سازی تابع ۳ متغیره NP_T است. از آنجایی که پیدا کردن جوابهای بهینه این مسئله به روش تحلیلی و روشهای مرسوم ریاضیاتی، با توجه به پیچیدگی بسیار بالای تابع هدف عملاً ناممکن است، در این مقاله برای رسیدن به حل بهینه این مدل از یک روش ابتکاری به شرحی که در ادامه می‌آید استفاده می‌کنیم. این روش ابتکاری از سه مرحله تشکیل شده است:

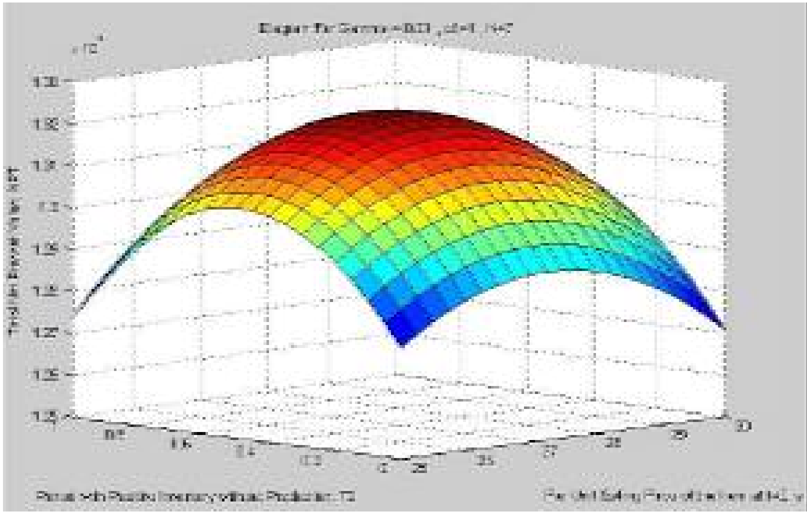
۱- انتخاب مقدار اختیاری برای N

۲- محاسبه مشتقات جزیی NP_t نسبت به تنها متغیرهای اصلی مسئله یعنی T_2 و S و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول حاصل از برابر قرار دادن این مشتقات با صفر

$$\frac{\partial}{\partial T_2} NP_T(S, T_2, N) = 0 \qquad (۳۴)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} NP_T(S, T_2, N) = 0 \qquad (۳۵)$$

۳- تکرار قدم ۲ برای Nهای مختلف ومحاسبه مقدار بهینه تابع هدف برای هر یک از جوابهایی که از حل دستگاه بالا به‌دست می‌آید. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم تا به جواب بهینه که از مقایسه تمامی این مقادیر با هم قابل حصول



شکل ۲- منحنی تغییرات تابع هدف بر حسب متغیرهای S و T_2

است، برسیم. شایان ذکر است شرایط لازم برای اعتبار جواب حاصل از این روش، محدب بودن تابع هدف است، لذا جواب بهینه باید در شرایط زیر صدق کند:

$$\left(\frac{\partial^2 NP_T}{\partial s \partial T_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 NP_T}{\partial T_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 NP_T}{\partial T_2^2}\right) < 0 \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{\partial^2 NP_T}{\partial T_2^2} < 0 \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{\partial^2 NP_T}{\partial s^2} < 0 \quad \text{(ج)}$$

شرایط فوق به نوعی تضمینی برای وجود یک نقطه ماکزیمم برای تابع سود هستند. البته در این مدل برای حصول اطمینان از برقراری روابط (الف)، (ب) و (ج) بعد از اینکه مقدار بهینه تابع هدف در هر مرحله بر اساس متد فوق الذکر مشخص شد، به‌صورت عددی به بررسی صحت و سقم شرایط فوق بسنده می‌کنیم، چرا که اثبات تحلیلی چنین امری عملاً ناممکن است.

در این مقاله، برای حل مسئله فوق از نرم افزار MATLAB استفاده شده است. از جمله قابلیتهای این نرم افزار رسم منحنیهای توابع مختلف با پیچیدگیهای بالاست که از این قابلیت در حل این مسئله به بهترین نحو استفاده شده است. با ترسیم منحنی تغییرات تابع NP_T بر حسب متغیرهای T_2 و S به راحتی می‌توان از محدب بودن تابع هدف و در نتیجه برقراری شرایط (الف)، (ب) و (ج) برای جواب بهینه و قابل اتکا بودن آن اطمینان حاصل کرد. با انتخاب مقادیر مختلف برای پارامترهای موجود در مسئله قادر خواهیم بود فضاهای مختلف تولیدی را بررسی کنیم. به عنوان مثال در صورتی‌که در سیستم مد نظر فروش از دست رفته وجود نداشته باشد، می‌توان با انتخاب $\gamma = 0$ و $C_4=0$ به هدف خود رسید. نکته قابل توجه اینکه در این مسئله با توجه به معادلات مربوط به هزینه‌های تقاضای پس افت و فروش از دست رفته و اینکه پارامتر γ در مخرج برخی کسرها ظاهر شده است، نمی‌توان مستقیماً γ را برابر صفر قرار داد و باید تغییرات تابع هدف را در حالت حدی مورد بررسی قرار داد.

۵- نتایج محاسباتی

تمامی پارامترها مطابق مثالی که در [۱۶] ارائه شده است، انتخاب شده‌اند به غیر از γ و C_4 که در آن مدل وجود ندارند. مقادیر هر یک از پارامترها در زیر ارائه شده است.

C1=80/set up , C2=0.6/unit/year , C3=1.4/unit/year , C4=1/unit , C=5/unit , $\alpha = 0.05$, $\beta = 1.5$

r =0.08 , g=200 , h=4 , P=400/year , H=10 (year) , $\gamma = 0.01$

شکل (۲) تغییرات تابع هدف را به ازای N=7 نشان می‌دهد. محدب بودن تابع هدف کاملاً مشهود است. در جدول (۱) نتایج کامل محاسبات به همراه مقدار بهینه تابع هدف به ازای مقادیر مختلف N ارائه شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این سیستم موجودی

جدول ۱- نتایج کامل محاسبات به همراه مقدار بهینه تابع هدف برای مثال ارائه شده

ارزش فعلی سود	T	T_4	T_3	T_2	T_1	S	تعداد سیکل تولیدی (N)
۱۲۹۶۰/۰۰	۱/۶۷	۰/۱۰	۰/۳۴	۰/۹۵	۰/۲۸	۲۷/۷۵	۶
۱۳۲۲۲/۰۰	۱/۴۳	۰/۱۶	۰/۵۶	۰/۵۵	۰/۱۶	۲۷/۵۰	۷
۱۳۵۵۲/۰۰	۱/۲۵	۰/۲۲	۰/۷۷	۰/۲۰	۰/۰۶	۲۷/۲۵	۸
۱۳۹۳۵/۰۰	۱/۱۱	۰/۲۶	۰/۸۵	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۷۵	۹
.							.
.							.
.							.
۱۵۳۳۸/۰۰	۰/۴۸	۰/۱۱	۰/۳۶	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۰۰	۲۱
۱۵۳۳۹/۰۰	۰/۴۵	۰/۱۱	۰/۳۵	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۰۰	(بهینه)۲۲
۱۵۳۳۳/۰۰	۰/۴۳	۰/۱۰	۰/۳۳	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۰۰	۲۳
۱۵۳۲۱/۰۰	۰/۴۲	۰/۱۰	۰/۳۲	۰/۰۰	۰/۰۰	۲۶/۰۰	۲۴

زمانی سود حاصله حداکثر می‌شود کـه هـیچ گـاه موجـودی در دست مثبت نشود و عملاً سیستمی خواهیم داشـت کـه در هـر سیکل کامل، در بازه زمانی به طول T_3 تولید متوقف و به محض رسیدن به حداکثر سطح کمبود مجاز، تولید شروع و تا زمانی که سطح موجودی به صفر می‌رسد، تولید ادامه خواهد داشت.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به مطالعه سیـستم موجـودی بـرای اقـلام فاسـد شدنی که نرخ خرابی از یک توزیع ویبول پیروی می‌کند، پرداخته شده است. هـر دو نـوع کمبـود یعنـی فـروش از دسـت رفتـه و تقاضای پس افت در مدل وارد شده است. مقدار تقاضا به‌صورت تابعی خطی از قیمت محصول در نظر گرفته شده اسـت و بـدین ترتیب قیمت محصول نیز جزو پارامترهایی که بایـد مقـدار بهینـه آنها تعیین شود، قرار می‌گیـرد. ارزش زمـانی پـول در مـدل وارد شده و مرکب شدن پول به‌صـورت پیوسـته در نظـر گرفتـه شـده است. تابع هدف به‌صورت حداکثر کـردن ارزش فعلـی سـود در یک افق زمانی محدود است. مثالی نیز برای تبیـین مـدل و نحـوه عملکرد مدل ارائه شده است. نتایج محاسباتی نشان مـی‌دهـد کـه تولید زمانی شروع می‌شود کـه بـه حـداکثر سـطح کمبـود مجـاز برحسب موجودی در دست رسیده و تولید تا زمانی که به سـطح موجودی صفر می‌رسد ادامه می‌یابد. در این صورت سود حاصـله از این سیستم موجودی حداکثر می‌شود. به عنـوان پیـشنهاد بـرای ادامه مطالعات در ایـن زمینـه مـی‌تـوان بـه مـواردی از جملـه در نظرگرفتن پارامترهای تصادفی و یا فازی در مدل اشاره کرد.

واژه نامه

1. backorders
2. lost Sales
3. discounted cash flow

مراجع

1. Ghare, P.M., and Schrader, G.F., "A Model for Exponentially Decaying Inventory," *Journal of Industrial Engineering*, Vol. 14, pp. 238-43, 1963.

2. Eilon, S., and Mallaya, R.V., "Issuing and Pricing Policy of Semi-Perishables," *Proceedings of the 4th International Conference on Operational Research*,

New York: Wiley-Interscience, 1996.
3. Cohen, M.A., "Joint Pricing and Ordering Policy for Exponentially Decaying Inventory With Known Demand, Naval Research Logistics Quarterly," Vol. 24, pp. 257-68, 1997.
4. Kang, S., and Kim, I. "A Study on the Price and Production Level of the Deteriorating Inventory System," *International Journal of Production Research*, Vol. 21, pp. 899-908, 1983.
5. Aggarwal, S.P., and Jaggi, C.K., "Ordering Policy for Decaying Inventory", *International Journal of Systems Science*, Vol. 20, pp. 151-5, 1989.
6. Wee, H.M., "A replenishment Policy for Items with a Price-Dependent Demand and Varying Rate of Deterioration," Production Planning and Control, Vol. 8, pp. 494-9, 1997.
7. Buzacott, J.A., "Economic Order Quantities with Inflation," Operational Research Quarterly," Vol. 26, 553-8, 1975.
8. Misra, R.B., "A Note on Optimal Inventory Management Under Inflation," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 26, pp. 161-5, 1979.
9. Chnadra, M.J., and Bahner, M.L., "The effects of inflation and the time value of money on some inventory systems," *International Journal of Production Research*, Vol. 23, pp. 723-30, 1985.
10. Sarker, B.R., and Pan, H., "Effects of Inflation and Time Value of Money on Order Quantity and Allowable Shortage," *International Journal of Production Economics*, Vol. 34, pp. 65-72, 1994.
11. Chung, K.J., "Optimal Ordering Time Interval Taking Account of Time Value," *Production Planning and Control*, Vol. 7, pp. 264-7, 1996.
12. Datta, T.K., and Pal, A.K., "Effects of Inflation And Time Value Of Money on An Inventory Model with Linear Time-Dependent Demand Rate and Shortages," *European Journal of Operational Research,* Vol. 52, pp. 326-33, 1991.
13. Hariga, M.A., "Effects Of Inflation And Time Value of Money on an Inventory Model with Time Dependent Demand Rate and Shortages," *European Journal of Operational Research*, Vol. 81, pp. 512-20, 1995.
14. Teng, J.-T., and Chang, C.-T., "Economic Production Quantity Models For Deteriorating Items with Price- and Stock-Dependent Demand," *Computers and Operations Research*, Vol. 32, pp. 297-308, 2005.
15. Jolai, F., Tavakkoli-Moghaddam, R., Rabbani, M., and Sadoughian, M.R., "An economic production lot size model with deteriorating items, stock-dependent demand, inflation, and partial backlogging," Applied Mathematics and Computation, Vol. 181, pp. 380-389, 2006.
16. Wee, H.M., and Law, S.H., "Economic Production Lot Size for Deteriorating Items Taking Account of Time Value of Money," *Computer and Operations Research*, Vol. 26, pp. 545-58, 1999.